

文章编号: 1672-2892(2010)06-0641-06

## 被动虚拟阵列的 CRB 界及最大似然估计方法研究

孙宝华, 汤俊, 唐波

(清华大学 电子工程系, 北京 100084)

**摘 要:** 针对利用机载运动平台对窄带微波信号进行侦测的背景, 研究了被动虚拟阵列(PASA)对窄带微波信号参数估计性能。在考虑方向角、频率和幅度均为未知参数的条件下, 推导了方向角估计的克拉美劳界(CRB)的表达式, 同时给出了 PASA 合成孔径长度的选取方案。另外, 本文给出了 PASA 对方位角估计的最大似然(ML)估计算法。研究表明, 随着合成孔径长度和信噪比的增加, ML 估计误差可以很快地收敛于 CRB, 但存在阈值效应。计算机仿真结果验证了本文研究结果的正确性。

**关键词:** 被动虚拟阵列; 克拉美劳界; 最大似然估计; 合成孔径

**中图分类号:** TN971.<sup>+</sup>1

**文献标识码:** A

## CRB and maximum likelihood estimation for passive synthetic array

SUN Bao-hua, TANG Jun, TANG Bo

(Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** In this article, performance of estimation of signal parameters in PAssive Synthetic Array (PASA) is studied, focusing on the background of airborne platform intercepting narrowband microwave signals. Cramer-Rao Bound(CRB) of bearing is derived in case that none of bearing, frequency and amplitude is known. And a synthetic aperture selecting method is given to achieve the desired estimation precision. In addition, Maximum Likelihood(ML) estimator is derived for PASA. It is demonstrated that ML estimating error can converge to CRB quickly with increasing synthetic aperture length and Signal to Noise Ratio(SNR), but a threshold effect exists. The result is validated by computer simulation.

**Key words:** PAssive Synthetic Array; Cramer-Rao Bound; Maximum Likelihood; synthetic aperture

虚拟阵列可以在实际阵元数量比较小的情况下, 通过接收平台的运动, 合成大的天线孔径, 从而提高单点测向的精密程度。被动虚拟阵列(PAssive Synthetic Array, PASA), 也称为被动合成孔径技术, 是指虚拟阵列不主动发射信号, 而依靠接收目标的辐射信号, 以此对目标参数进行估计的技术。

从目前的公开文献来看, 被动虚拟阵列性能和算法的研究主要集中在水声领域中<sup>[1-7]</sup>。目前, 在微波领域内, 主动式虚拟阵列技术(如合成孔径雷达)已经得到了充分的研究和应用<sup>[8-9]</sup>。但是, 基于被动虚拟阵列的研究工作还未得到充分开展。本文工作以机载平台对窄带微波信号的测向技术为背景, 初步研究了被动虚拟阵列在这个领域内应用的可能性。

### 1 被动虚拟阵列的 CRB 界

#### 1.1 信号模型

假定模型如图 1 所示, 机载平台和远场目标在同一平面上, 以已知的速度  $v$  运动。 $N$  个各向同性的阵元组成等间距的线阵, 阵元间隔为  $d$ 。机载平台在时刻  $t_k = \delta_T(k-1)$  ( $k=1, 2, \dots, K$ ;  $\delta_T$  表示采样间隔;  $K$  表示采样点数)对接收到的信号采样。信号的波达方向为  $\theta$ 。

接收到的信号为:

$$y_{n,k} = x_{n,k} + w_{n,k} \quad (1)$$

式中:  $y_{n,k}$  为第  $n$  个阵元在时刻  $t_k$  接收到的信号,  $n=1,2,\dots,N$ ;  
 $x_{n,k}$  为第  $n$  个阵元在  $t_k$  时刻期望接收的信号;  $w_{n,k}$  为第  $n$  个  
阵元在  $t_k$  时刻接收到的噪声。假定各阵元在各时刻接收到的  
是独立同分布的高斯白噪声, 均值为 0, 方差为  $\sigma^2$ 。

对于单个信源的窄带信号, 有:

$$x_{n,k} = a_{t_k} \exp \left[ j2\pi f' \left( t_k - \frac{(n-1)d \sin \theta}{c} \right) \right] \quad (2)$$

式中:  $a_{t_k}$  为窄带信号在  $t_k$  时刻的幅度;  $f' = f_0 + f_d$  为收到  
信号的频率, 其中,  $f_0$  是信源频率,  $f_d = f_0 \frac{v \sin \theta}{c}$  是相对运

动产生的多普勒频移;  $c$  为光速;  $\theta$  是待估计的角度。将  $f'$  代入式(2),  $x_{n,k}$  表示为:

$$x_{n,k} = a_{t_k} \exp \left( j2\pi f_0 \left( 1 + \frac{v \sin \theta}{c} \right) \left( t_k - \frac{(n-1)d \sin \theta}{c} \right) \right) \quad (3)$$

对于带宽为  $B_0$  的窄带信号, 有:

$$a_{t_k} \approx a_{t_k + \tau} \quad (4)$$

式中  $\tau$  满足:

$$\tau \ll \frac{1}{B_0} \quad (5)$$

令  $\tau$  等于侦测的时间长度  $(K-1)\delta_T$ , 因此对于窄带信号,  $a_{t_k}$  可以看作不随时间变化的量。记作:

$$a_1 = a_{t_k} \quad (6)$$

于是式(3)变为:

$$x_{n,k} = a_1 \exp \left( j2\pi f_0 \left( 1 + \frac{v \sin \theta}{c} \right) \left( t_k - \frac{(n-1)d \sin \theta}{c} \right) \right) \quad (7)$$

令:  $\mathbf{x}(k) = [x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{N,k}]$ ,  $\mathbf{y}(k) = [y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{N,k}]$ ,  $\mathbf{w}(k) = [w_{1,k}, w_{2,k}, \dots, w_{N,k}]$ 。

于是, 信号模型的矢量形式为:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (8)$$

式中  $\mathbf{y}(k)$ ,  $\mathbf{x}(k)$ ,  $\mathbf{w}(k)$  都是  $N \times 1$  的向量,  $\mathbf{w}(k)$  的自相关函数为对角阵  $\mathbf{R}$ 。令:  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}^T(1), \mathbf{y}^T(2), \dots, \mathbf{y}^T(K)]^T$ , 则  $\mathbf{Y}$  的  
概率密度函数(Probability Density Function, PDF)为:

$$p(\mathbf{Y}; \theta) = c_1 \prod_{k=1}^K \exp \left( -(\mathbf{y}(k) - \mathbf{x}(k))^H \cdot \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y}(k) - \mathbf{x}(k)) \right) \quad (9)$$

式中  $c_1$  是使得上式积分为 1 的常数项。将式(9)的矩阵形式展开, 得:

$$p(\mathbf{Y}; \theta) = c_1 \prod_{k=1}^K \prod_{n=1}^N \exp \left( -(y_{n,k} - x_{n,k})^* \cdot \sigma^{-2} (y_{n,k} - x_{n,k}) \right) \quad (10)$$

## 1.2 单独估计方向角 $\theta$ 的 CRB

假设频率  $f_0$  和幅度  $a_1$  为已知的确定性参数, 只估计一个参数  $\theta$ , 文献[1,3]已给出此种情况的结果。令  $\rho = a_1^2 / \sigma^2$   
为信噪比,  $L = (N-1)d$  表示物理孔径长度,  $D = v\delta_T(K-1)$  表示虚拟孔径长度。对于标准阵列有  $d = \lambda / 2 = c / (2f_0)$ ,  
得到方向角  $\theta$  的 CRB:

$$CRB(\theta) = \frac{1}{\rho \pi^2 (\cos^2 \theta) KN(N-1)(2N-1)} \frac{3}{\left(\frac{D}{L}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{D}{L}\right) + 1} \quad (11)$$

当  $v=0$  时,  $D=0$ 。此时就得到静止时的 CRB<sub>s</sub>:

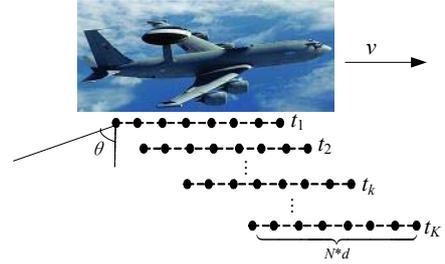


Fig.1 Airborne PASA intercepting narrowband microwave signal  
图1 机载平台被动虚拟阵列侦测窄带微波信号

$$CRB_s(\theta) = \frac{3}{\rho\pi^2(\cos^2\theta)KN(N-1)(2N-1)} \tag{12}$$

二者相除，得到虚拟阵列与  $CRB_s$  的比值：

$$\frac{CRB(\theta)}{CRB_s(\theta)} = \frac{1}{\left(\frac{D}{L}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{D}{L}\right) + 1} \tag{13}$$

这正是文献[1,3]中给出的结论。

### 1.3 方向角 $\theta$ 和频率 $f_0$ 联合估计的 CRB

假设幅度  $a_1$  是已知的确定性参数，Sullivan 已经在文献[2]中给出联合估计未知参数  $\theta$  和  $f_0$  的结果。

### 1.4 方向角 $\theta$ 、频率 $f_0$ 和幅度 $a_1$ 联合估计的 CRB

假设  $\theta, f_0, a_1$  均为未知的确定性参数，这是本文重点研究的情况。此时，需要对 3 个参数联合估计，然后根据费舍信息阵得出  $\theta$  的 CRB。

令： $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)^T = (\theta, f_0, a_1)^T$  为待估矢量。则费舍信息阵为：

$$[I(\Theta)] = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{Y}; \Theta)}{\partial \Theta^2} \right] \tag{14}$$

式中  $\Theta_i$  表示向量  $\Theta$  的第  $i$  个元素， $[I(\Theta)]_{ij} = -E \left[ \frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{Y}; \Theta)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \right]$ 。

于是，得到费舍信息阵为：

$$I(\Theta) = \frac{2a_1^2}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{K-1} (2\pi f_0)^2 \psi_1^2 & \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{K-1} (2\pi)^2 f_0 \psi_1 \psi_2 & 0 \\ \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{K-1} (2\pi)^2 f_0 \psi_1 \psi_2 & \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{K-1} (2\pi)^2 \psi_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_1^2} \end{pmatrix} \tag{15}$$

式中： $\psi_1 = \left( \frac{v}{c} \cos \theta \cdot t_k - \frac{(n-1)d}{c} \cos \theta - \frac{v(n-1)d \sin 2\theta}{c^2} \right)$ ； $\psi_2 = \left( t_k + \frac{v}{c} \sin \theta \cdot t_k - \frac{(n-1)d}{c} \sin \theta - \frac{v(n-1)d \sin^2 \theta}{c^2} \right)$ 。

那么，角度  $\theta$  的 CRB 为：

$$CRB(\theta) = \frac{\sigma^2}{2a_1^2} \frac{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=1}^{K-1} (2\pi)^2 \psi_2^2}{\det(I(\Theta))} \tag{16}$$

式中  $\det(\cdot)$  表示取行列式。因为式(16)是  $\psi_1$  和  $\psi_2$  平方的多项式求和的形式，比较复杂，为了化简式(16)，首先略去  $\psi_1$  和  $\psi_2$  中含有的  $1/c^2$  项，得到如下近似：

$$\psi_1 = \left( \frac{v}{c} \cos \theta \cdot t_k - \frac{(n-1)d}{c} \cos \theta - \frac{v(n-1)d \sin 2\theta}{c^2} \right) \approx \frac{\cos \theta}{c} (vt_k - (n-1)d)$$

$$\psi_2 = \left( t_k + \frac{v}{c} \sin \theta \cdot t_k - \frac{(n-1)d}{c} \sin \theta - \frac{v(n-1)d \sin^2 \theta}{c^2} \right) \approx t_k + \frac{\sin \theta}{c} (vt_k - (n-1)d)$$

将上面的  $\psi_1$  和  $\psi_2$  代入式(16)，同时利用  $2(K-1) \approx 2K-1$ ， $2(N-1) \approx 2N-1$ ，并略去含有的  $1/c^2$  项后，上式化简为：

$$CRB(\theta) = \frac{\sigma^2}{a_1^2} \frac{c^2}{(2\pi f_0 \cos \theta)^2 d^2} \frac{1}{KN(N-1)(2N-1)} \frac{48}{7} \tag{17}$$

在标准阵列  $d = \lambda / 2 = c / (2f_0)$  情况下:

$$CRB(\theta) = \frac{1}{\rho\pi^2 (\cos \theta)^2 KN(N-1)(2N-1)} \frac{48}{7} \quad (18)$$

对比式(18)和式(11), 可以发现, 3个参数联合估计和单独估计方向角的共同点在于: 二者的第1项因子相同, 即都与信噪比、方向角余弦的平方、采样点数和阵元数有关。不同点在于二者的第2项因子不同, 式(18)中第2项因子为  $48/7$ , 而式(11)中第2项因子为  $\frac{3}{\left(\frac{D}{L}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(\frac{D}{L}\right) + 1}$ 。当  $D/L$  取  $3/4$  时式(11)取得最大值, 且恰好等于式(18)。

即联合估计的 CRB 大于等于单独估计的 CRB, 这与经典估计的理论吻合。

### 1.5 CRB 随合成孔径的变化

在工程应用中, 需要知道达到所需精密度要求的最短合成孔径长度(Synthetic Aperture Length, SAL)。对于  $K \approx K-1$ , 有  $K \approx D / (v\delta_T)$  的近似。将式(18)整理为:

$$CRB(\theta) = \frac{v\delta_T}{\rho\pi^2 \cos^2 \theta v\delta_T KN(N-1)(2N-1)} \frac{48}{7} = \frac{v\delta_T}{\rho\pi^2 \cos^2 \theta DN(N-1)(2N-1)} \frac{48}{7} \quad (19)$$

在图3的仿真结果中可以看出, 随着 SAL 的增加, CRB 逐渐下降。但是存在着阈值效应, CRB 在 SAL 的阈值点两侧斜率差异明显。为了得到 SAL 的阈值, 写出 CRB 变化率和 SAL 的关系:

$$\frac{\partial CRB(\theta)}{\partial D} = -\frac{v\delta_T}{\rho\pi^2 \cos^2 \theta D^2 N(N-1)(2N-1)} \frac{48}{7} \quad (20)$$

这样, 可以给出被动虚拟阵列 SAL 的选取方案: 在给定估计精密度 CRB 变化率门限值  $CRB'(\theta)$  的条件下, SAL 可以由以下解析式给出:

$$D = \sqrt{-\frac{v\delta_T}{CRB'(\theta)\rho\pi^2 \cos^2 \theta N(N-1)(2N-1)} \frac{48}{7}} \quad (21)$$

这意味着, 在给定的  $CRB'(\theta)$  条件下, SAL 达到  $D$  时, 所获得的性能与合成孔径长度比是最佳的, 当 SAL 大于  $D$  时, CRB 改善不明显; 当 SAL 小于  $D$  时, CRB 迅速恶化。

## 2 被动虚拟阵列 ML 估计

对于确定性参数估计, ML 估计器是一种渐进最佳估计器。当采样点数增多, ML 估计器渐进无偏, 估计方差渐进于 CRB 界。假设信号模型  $f_0$  已知, ML 可以通过对数概率密度函数  $\ln p(y, \theta)$  求导, 求导数为零的点得到:

$$\frac{\partial \ln p(Y; \theta)}{\partial \theta} = -\sigma^{-2} \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \left( \left( -\frac{\partial x_{n,k}}{\partial \theta} \right)^* (y_{n,k} - x_{n,k}) + (y_{n,k} - x_{n,k})^* \left( -\frac{\partial x_{n,k}}{\partial \theta} \right) \right) = 0 \quad (22)$$

化简, 得:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N \left( \left( -x_{n,k}^* y_{n,k} + y_{n,k}^* x_{n,k} \right) \left( v(k-1)\delta_T - (n-1)d - \frac{v(n-1)d2 \sin \theta}{c} \right) \right) = 0 \quad (23)$$

通过寻找满足式(23)的  $\theta$ , 然后选择使式(10)最大的点, 就可以得到被动虚拟阵列的 ML 估计器  $\hat{\theta}$ 。 $\hat{\theta}$  是在机载平台对地面窄带通信信号测角情况下的 ML 估计器。它是一个多项式求和的形式, 利用了所有在时间上和空间上采样得到的信息, 既包含所有  $N$  个阵元的信息, 又包括所有  $K$  个采样时刻的信息。

## 3 仿真结果

### 3.1 CRB 随阵元数的变化

图2给出3个参数联合估计与单独估计2种情况下, CRB 随阵元个数的变化情况。仿真参数为:  $\theta = 35^\circ$ ,  $K = 50$ ,  $f_0 = 900$  MHz,  $c = 3 \times 10^8$  m/s,  $v = 200$  m/s,  $\delta_T = 1 \times 10^{-4}$  s,  $R_{SN} = 0$  dB。

可以看出, 联合估计时的 CRB 要高于单独估计时的 CRB。另外, 无论是联合估计还是单独估计, 估计性能

都随阵元数的增多而提高，但是，存在着阈值效应。阵元数  $N$  在 20 附近时 CRB 的斜率差异明显；当  $N$  小于 20 时，CRB 随阵元数的增加剧烈下降；当  $N$  大于 20 时，CRB 随  $N$  的增加变化缓慢。另外，当  $N$  等于 10 时，PASA 3 个参数联合估计时 CRB 的平方根可以达到  $0.25^\circ$ 。

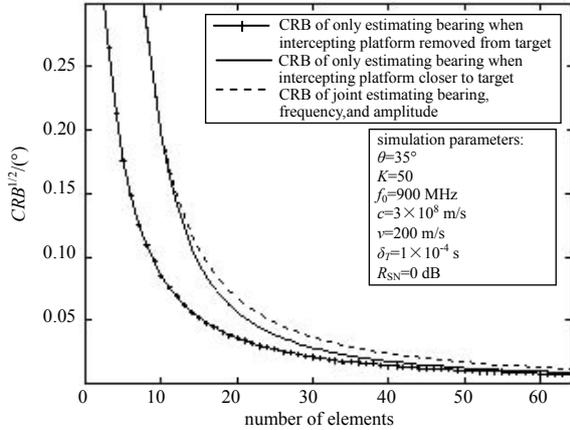


Fig.2 Effect of element number on CRB  
图2 阵元个数对CRB的影响

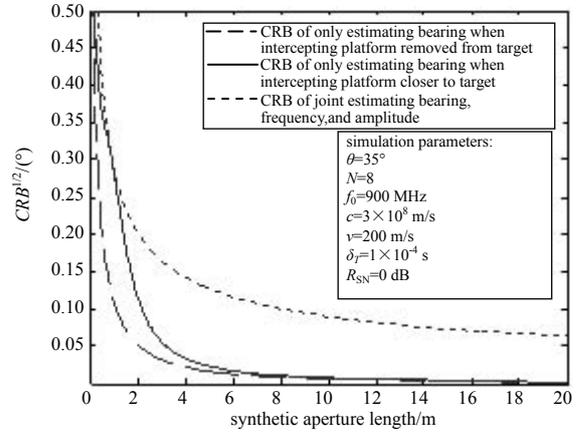


Fig.3 Effect of SAL on CRB  
图3 合成孔径长度对CRB的影响

### 3.2 CRB 随合成孔径长度的变化

CRB 随 SAL 的变化关系如图 3 所示，仿真参数为： $\theta=35^\circ, N=8, f_0=900 \text{ MHz}, c=3 \times 10^8 \text{ m/s}, v=200 \text{ m/s}, \delta_T=1 \times 10^{-4} \text{ s}, R_{SN}=0 \text{ dB}$ 。

可以看出，随着 SAL 的增加，CRB 逐渐下降，但是，存在着阈值效应。SAL 在 4 m 附近时 CRB 的斜率差异明显。当 SAL 小于 4 m 时，CRB 随 SAL 的增加剧烈下降；当 SAL 大于 4 m 时，CRB 随 SAL 的增加变化缓慢。CRB 变化率随 SAL 的变化关系曲线如图 4 所示。

可以看出，在给定抽样间隔  $T$  和相对速度  $v$  及其它给定参数条件下，SAL 大于 10 m 时，联合估计时 CRB 的变化率绝对值已经小于  $0.1^\circ/\text{m}$ 。

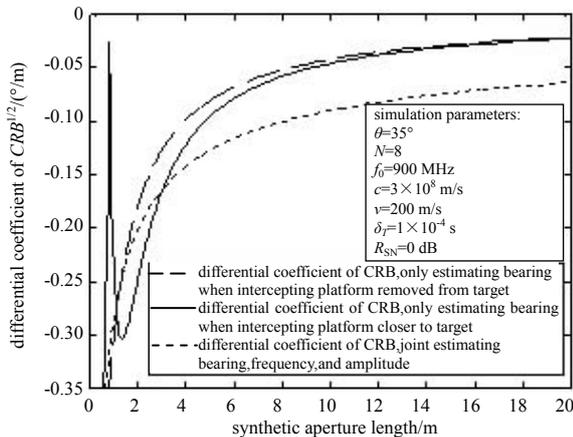


Fig.4 CRB differential coefficient function of SAL  
图4 CRB变化率与合成孔径长度的关系

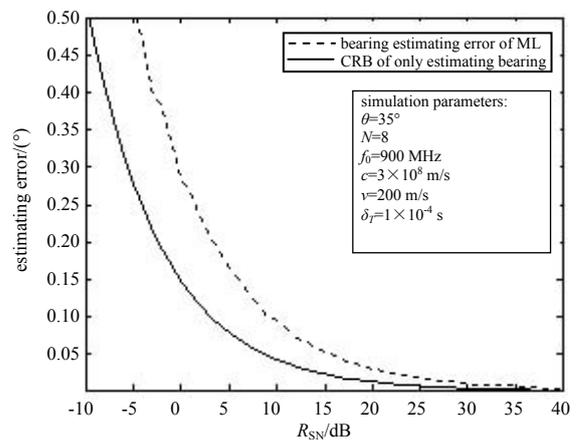


Fig.5 Effect of SNR on ML estimation error  
图5 ML估计误差与信噪比的关系

### 3.3 ML 随 SNR 的变化

图 5 给出 ML 的平均估计误差随 SNR 的变化曲线，ML 算法仿真 100 次计算平均误差，并与 CRB 对比(只考虑  $v < 0$  的情况)。仿真参数为： $\theta=35^\circ, K=50, N=8, f_0=900 \text{ Hz}, c=3 \times 10^8 \text{ m/s}, v=200 \text{ m/s}, \delta_T=1 \times 10^{-4} \text{ s}$ 。

可以看出，随着信噪比的增大，ML 估计的平均误差和 CRB 都在下降，且 ML 的平均估计误差逐渐逼近 CRB。但是，存在着阈值效应， $R_{SN}$  在 10 dB 附近时 CRB 的斜率差异明显。当  $R_{SN} < 10 \text{ dB}$  时，CRB 随  $R_{SN}$  的增加剧烈下降；当  $R_{SN} > 10 \text{ dB}$  时，CRB 随  $R_{SN}$  的增加变化缓慢。另外，当  $R_{SN} > 10 \text{ dB}$  时，ML 估计的平均误差仅比 CRB 高  $0.05^\circ$ ，很好地逼近了 CRB。

### 3.4 ML 随合成孔径长度的变化

图6为ML估计误差平均值随合成孔径长度的变化曲线,ML算法仿真100次计算平均误差,并与CRB对比。仿真参数为: $\theta=35^\circ$ , $N=8$ , $f_0=900$  MHz, $c=3\times 10^8$  m/s, $v=200$  m/s, $\delta_T=1\times 10^{-4}$  s, $R_{SN}=0$  dB。

可以看出,随着SAL的增大,ML估计的误差逐渐逼近CRB,但是,存在着阈值效应。SAL在20m附近时CRB的斜率差异明显。当SAL小于20m时,CRB随SAL的增加剧烈下降;当SAL大于20m时,CRB随SAL的增加变化缓慢。在给定仿真参数情况下,SAL大于20m时ML估计的性能很好地逼近CRB。如果速度 $v=200$  m/s,意味着ML可以在0.1s收敛于CRB。

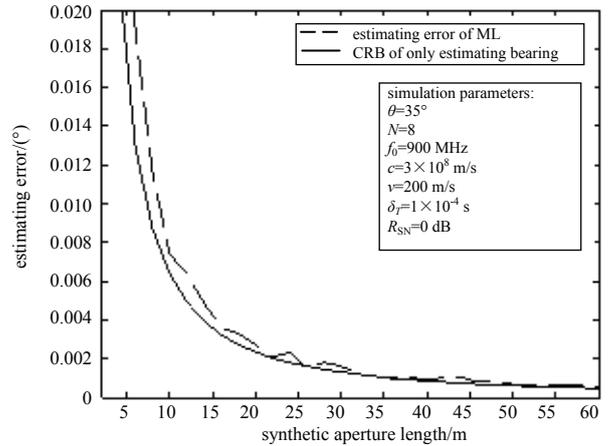


Fig.6 Effect of SAL on ML estimation error  
图6 合成孔径长度对ML平均误差的影响

## 4 结论

本文重点研究了虚拟阵列对窄带信号的测向性能,得出了在方向角、载频和幅度都未知情况下角度估计的CRB。结果表明,影响CRB的因素包括信噪比、方向角余弦的平方,采样点数以及阵元数。测角精密度随着这些参数的增加而得到改善,但测角性能的改善存在阈值效应。另外,本文研究了虚拟阵列的ML算法及其性能,结果表明ML估计器可以在指定条件下很好地收敛于CRB。

### 参考文献:

- [1] Edelson G S. On the Estimation of Source Location Using a Passive Towed Array[D]. Rhode Island:University of Rhode Island, 1993.
- [2] Sullivan E J. A generalized Cramer-Rao lower bound for moving arrays[J]. J. Acoust. Soc. Am., 2009,125(2):EL51-EL57.
- [3] Sullivan E J. On the role of modeling in passive synthetic aperture processing[C]// Oceans 2000 MTS/IEEE conference and exhibition.Providence,RI,USA:[s.n.], 2000.
- [4] Stergiopoulos S,Sullivan E J. Extended Towed Array Processing by an Overlap Correlator[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1989,86(1):158-171.
- [5] Stergiopoulos S,Urban H. A New Passive Synthetic Aperture Technique for Towed Arrays[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1992,17(1):16-25.
- [6] Yen N C,Carey W. Application of synthetic-aperture processing to towed-array data[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1989,86(2):754-765.
- [7] Sullivan E J,Candy J V. Space-time array processing:The model-based approach[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1997,102(5):2809-2820.
- [8] Zeira A,Friedlander B. On the performance of direction finding with time-varying arrays[J]. Signal Processing archive, 1995,43(2):133-147.
- [9] 杨嵩,蔡竟业. 线性调频连续波合成孔径雷达成像算法[J]. 信息与电子工程, 2008,6(3):267-271. (YANG Hao,CAI Jing-ye. Linear Frequency Modulated Continuous Wave-Synthetic Aperture Radar Imaging Algorithm[J]. Information and Electronic Engineering, 2008,6(3):267-271.)

### 作者简介:



孙宝华(1983-),男,黑龙江省齐齐哈尔市人,在读硕士研究生,主要研究方向为被动虚拟阵列.email:sunbao1983@gmail.com.

汤俊(1973-),男,南京市人,副教授,主要研究方向为高速实时雷达信号处理系统、阵列信号处理。

唐波(1985-),男,江西省临川县人,在读博士研究生,主要研究方向为空时自适应信号处理。