

利用 T - PROGS 确定最优钻孔密度

蔡雪峰¹, 夏源¹, 杨丽雅^{1,2}

(1. 桂林理工大学 环境科学与工程学院, 广西 桂林 541006; 2. 河海大学 文天学院, 安徽 马鞍山 243031)

摘要: 为了在水文地质钻探时找到合理的钻孔密度, 避免钻孔集中出现数据的冗余, 造成介质类别有偏向于高密度钻孔岩性类别的趋势。本文以某实测区域为研究对象, 运用 GMS 软件中 T - PROGS 模块, 模拟在非均匀介质中均匀分布钻孔以确定最优钻孔密度。通过马尔可夫数学预测模型对计算机模拟数据进行甄选, 得出在钻孔密度为 30 孔/km², 获得的水文地质资料的可信度较高, 可以最大限度的节省人力物力。本文研究结果表明: 结合 GMS 软件与马尔可夫预测模型对探明地质类型分布是可行的。

关键词: 转移概率; 数值模拟; 马尔科夫链; T - PROGS; 最优钻孔密度

中图分类号: TV221.2

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2016)05-0113-05

Determination on most appropriate drill hole density based on T - PROGS

CAI Xuefeng¹, XIA Yuan¹, YANG Liya^{1,2}

(1. College of Environmental Science and Engineering, Guilin University of Technology, Guilin 541006, China;

2. Wen Tian College, Hohai University, Ma'anshan 243031, China)

Abstract: In order to find a reasonable drill hole density in hydrogeology drilling. Taking an actual measurement area as the research object, the paper used T - PROGS model of groundwater numerical simulation software GMS to drilling path has been proposed based on uniform distribution in simulate non - uniform medium to look for most suitable drill hole density. By mathematical patterns in the prediction of vMarkov's theory to select computer simulation data and got the conclusion that when density of drill hole is 30 bore holes per square km could got higher reliability, so that save the most resources. The result indicates that it is feasible to combine software GMS with Markov's mathematical patterns to predicting formation distribution.

Key words: transfer probability; numerical simulation; Markov chain; T - PROGS; most appropriate drill hole density

在进行水文地质勘察时, 控制区中复杂的地理环境导致岩层的岩性、构造、厚度等水文地质条件相差较大, 不同含水介质的非均质性不同, 常常需要选用不同的钻孔密度进行钻探^[1]。因此在控制区求得水文地质勘探孔的合理密度, 对以最少工作量、最低成本和最短时间获取完整的水文资料具有重要意义。

要获得最优钻孔布置密度, 就需要考虑介质的非均质性, 通常采用地质统计方法来研究介质的非均质性。传统的多元指示地质统计模型基于交叉变差函数(cross - variogram) 没有考虑地质体分布存

在不对称性的缺陷, 描述复杂空间的连续性有局限性, 与基于马尔可夫链的多元指示地质统计模型相比, 后者可以很好地反映复杂空间的连续性, 弥补了传统地质统计模型, 简化了各向异性的处理过程^[2]。马尔可夫预测模型是通过研究系统对象的状态转移概率来进行预测, 因此确定状态转移概率是马尔可夫模型预测的关键^[3]。马尔可夫状态转移概率矩阵估算的越准确预测的结果越精确。美国科学家 Carle 根据马尔可夫链模型开发了 T - RPOGS(Transition Probability Geostatistical Software) 转移概率地质统计软件(被应用于地下水数值模拟

收稿日期: 2015-12-30; 修回日期: 2016-05-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(41302197); 国家科技支撑计划(2012BAC26B00); 广西自然科学基金项目(2013GXNSFBA019211, 2014GXNSFBA118236, 2012GXNSFGA060001)

作者简介: 蔡雪峰(1989-), 男, 山西朔州人, 硕士, 研究方向为地下水科学与工程。

通讯作者: 夏源(1982-), 男, 贵州遵义人, 副教授, 从事地下水数值模拟方面研究。

软件 GMS 中),实现了基于马尔可夫性质的含水介质转移概率地统计^[4]。与传统多元指示地质统计模型相比,转移概率地统计具有以下优点:(1) T-PROGS 可以反映地质单向分布趋势;(2) T-PROGS 通过根据已有其他地质资料调整转移概率,使得模拟结果符合实际情况^[5]; (3) T-PROGS 使用的是序贯指示模拟,可以产生很多实现,可以统计出地质类型出现的概率^[6]。本文根据马尔可夫状态转移概率矩阵的性质和特点依托 T-RPOGS 软件包,以美国密歇根州 Ottawa 县某场地为例,通过转移概率的计算,得到在非均匀介质中的钻孔在均匀分布与非均匀分布下的最优分布密度,从而为勘察工作提供参考。

1 马尔科夫链原理及在地统计中的应用模型

基于马尔可夫性质的转移概率地统计总体思路是根据钻孔的岩性数据统计得到地质类型上的离散马尔可夫链模型,并使用连续性马尔可夫链进行拟合得到最终的转移概率的统计模型^[7]。可由此数学模型描述:

1.1 马尔可夫数学模型

一维转移概率矩阵 $T(h_\phi)$:

$$T(h_\phi) = \exp(R_\phi h_\phi) \quad (1)$$

式中: h_ϕ 表示在 ϕ 方向一个正步长距离; R_ϕ 为转移率矩阵。其中:

$$T(h_\phi) = \begin{bmatrix} t_{11}(h_\phi) & t_{12}(h_\phi) & \cdots & t_{1K}(h_\phi) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{K1}(h_\phi) & t_{K2}(h_\phi) & \cdots & t_{KK}(h_\phi) \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中每个元素 $t_{jk}(h_\phi)$ 定义为:

$$t_{jk}(h_\phi) = P\{(\text{在 } X + h_\phi \text{ 处为类别 } k \mid \text{在 } X \text{ 处为类别 } j)\} \quad (3)$$

$$R_\phi = \begin{bmatrix} r_{11,\phi} & r_{12,\phi} & \cdots & r_{1K,\phi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{K1,\phi} & r_{K2,\phi} & \cdots & r_{KK,\phi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中: $r_{jk,\phi}$ 表示在 ϕ 方向上从类别 k 转换到类别 j 的变化率。

一维空间马尔科夫链具有如下性质^[8]:

(1) 各种地质类型所占比例和为 1, 即:

$$\sum_{k=1}^K p_k = 1 \quad (5)$$

(2) 转移概率矩阵中 $T(h_\phi)$ 行满足:

$$\sum_{k=1}^K t_{ij}(h_\phi) = 1 \quad \forall j \quad (6)$$

(3) 转移概率矩阵中 $T(h_\phi)$ 列满足:

$$\sum_{k=1}^K p_j t_{jk}(h_\phi) = p \quad \forall k \quad (7)$$

式中: p 为该种介质所占的平均比例, $0 \leq t_{jk}(h_\phi) \leq 1, \forall j, k$ 。

1.2 马尔科夫应用模型

将马尔可夫链从时间域的描述中转换为空间的介质属性的描述,表示如下:对于 N 种地质类型的马尔可夫链模型需要定义一个 $N \times N$ 的转移率矩阵^[9]。转移率定义为:

$$r_{jk,\phi} = \frac{\partial t_{jk}(0)}{\partial h_\phi} \quad \forall j, k \quad (8)$$

转移率矩阵的形式为:

$$R_\phi = \begin{bmatrix} r_{11,\phi} & r_{12,\phi} & \cdots & r_{1K,\phi} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{K1,\phi} & r_{K2,\phi} & \cdots & r_{KK,\phi} \end{bmatrix} \quad (9)$$

T-PROGS 软件使用的计算转移率的方式为^[10]:

$$r_{jk,\phi} = 0.57r_{1jk,\phi} + 0.29r_{2jk,\phi} + 0.14r_{3jk,\phi} \quad (10)$$

式中: r_1, r_2, r_3 分别是原点从 1 个步长、2 个步长和 3 个步长直接连线的斜率。行和必满足:

$$\sum_{k=1}^K r_{jk,\phi} = 0 \quad \forall j \quad (11)$$

即每种地质类型的转移率和为 0, 即地质类型 j 转移到所有地质类型和 k 的和为零(地质类型到自己的转移率为负值),表明从地质类型 j 转移出的地质类型保持平衡,如果不为零表示总有介质转出,或者不转出,不满足物质守恒。 R_ϕ 列必满足:

$$\sum_{k=1}^K p_j r_{jk,\phi} = 0 \quad \forall k \quad (12)$$

为各种地质类型转移到某种地质类型的和为 0, 即从 k 中地质类型转移到某种地质类型的和为零,表明转移到地质类型保持平衡,同理,如果不为零,表示总有介质转入,不符合物质守恒。

2 研究区概况及参考场的建立

以某地的钻孔数据为例,生成的虚拟钻孔设置参数: $dx = 1\ 710\ \text{m}$, $dy = 1\ 080\ \text{m}$, $dh = 80\ \text{m}$, 区域内有钻孔 74 个,研究区域西部靠近湖边主要水文地质岩性为含水介质,该区域是以砂砾、粗砂、细沙为主的沉积地质条件;东部区域以隔水介质为主^[11]。按照浅层含水层组岩性的水力特性, T-PROGS 将种类繁多的岩性概化描述为 4 大类,分别为净砂(clean sand),中细砂(sand-w/-fines),淤泥(silt),黏土

(clay),水文地质参数则根据岩性进行赋值。

高密度区域的钻孔所占比例过大,尤其十分靠近的两钻孔岩性分布类似,会成数据的冗余,由此生成的钻孔介质类别有偏向于高密度钻孔岩性类别的趋势。如图 1(纵横坐标为 GIS 软件中默认的笛卡尔坐标系,+为钻孔)。

在研究区域内,由净砂(clean-sand),中细砂(sand-w/-fines),淤泥(silt),黏土(clay)组成的非均匀介质。图 2 为 4 种地质类型在原始钻孔下运行 T-PROGS 程序得到的 16 幅(样本-地层)转移概率曲线矩阵图。

3 数据处理

当 4 种地质类型曲线在纵向上的转移概率达到平稳后,导出数据,为了获取转移概率大小与在勘察

地质类型时所需的钻孔数量间的关系,选取转移概率由下降状态至平稳状态时的拐点,即步长增加时对转移概率的影响可忽略不计,如表 1 所示。

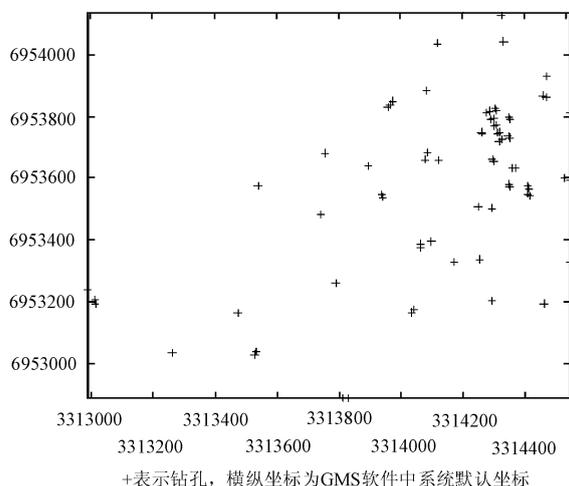
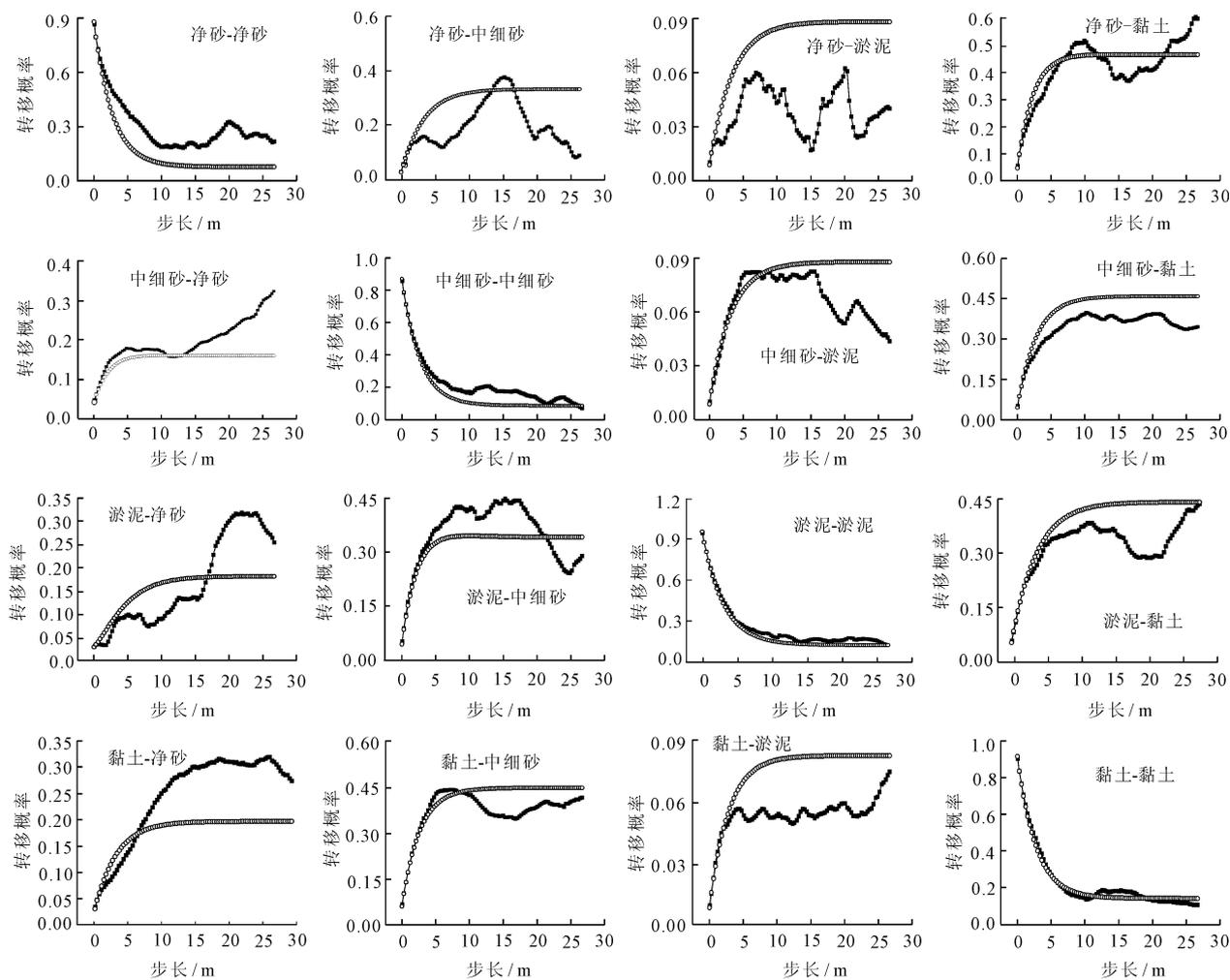


图 1 原始钻孔分布



*步长表示距离钻孔的距离 ■ 实测曲线 ○ 马尔科夫曲线

图 2 4 种地质类型转移概率矩阵图

表1 4种地质类型步长/转移概率

样本属性	地层属性			
	净砂	中细砂	淤泥	黏土
净砂	12.90/0.1400	12.90/0.3303	15.0/0.0890	10.50/0.4496
中细砂	6.30/0.1297	6.0/0.3193	14.70/0.0895	15.0/0.4499
淤泥	19.20/0.1321	11.1/0.4150	20.40/0.0909	18.90/0.4500
黏土	11.40/0.1301	11.40/0.3216	12.90/0.0889	11.70/0.4591

由表1可以看出,在转移概率相差较小时,较大步长可表征该种地质类型的转移概率,因此,以同种地质类型之间的转移概率为主要研究对象。

根据得到的转移概率,可以利用T-PROGS模块里的TSIM程序进行随机实现。为考察钻孔数量对转移概率计算的影响,本文将对不同钻孔数量下的转移概率进行计算结果见表2。具体方法如下:

(1)将74个钻孔所得转移概率视为最准确的结果,并生成1次随机实现,得到该区域的介质分布(插入介质分布图)。将该分布看作真实的介质分布。

(2)在原来已知的74个钻孔基础上,记录原钻孔所在的位置,并在与原钻孔位置不重合的情况下,减少钻孔数量,重新排布钻孔,且保持均匀分布,导入T-PROGS模块算出新的转移概率。

(3)再次记录钻孔位置,重复步骤2,即重新均匀分布钻孔,计算转移概率。重复上述步骤,即钻孔间的间距不断增加,直到所得转移概率逐渐趋于平稳状态。

表2 不同钻孔数和4种地质类型转移概率

钻孔数量	地质类型			
	净砂	中细砂	淤泥	黏土
74	0.1400	0.3303	0.0909	0.4591
66	0.1399	0.2996	0.0999	0.4793
58	0.1194	0.3091	0.0997	0.4997
50	0.1496	0.2998	0.0998	0.4699
42	0.1295	0.2899	0.1295	0.4798
34	0.1199	0.2499	0.1496	0.4899

4 结果分析

通过程序导出的转移概率值,是否受到相关参数设置的影响,这将影响钻孔数的最终确定。相对误差被定义为绝对误差与实测值的比值。一般来说,相对误差更能反映测量的可信程度,因此,建立以相对误差为目标函数的预测模型,更能够减小平均相对误差^[12]。

设经过a步转移后系统处于状态J的概率为

$S_j(a)$,则经a步转移处于J状态的概率估计值 $\hat{S}_j(a)$ 与实际值 $S_j(a)$ 的拟合相对误差 $e_j(a)$ 为:

$$e_j(a) = \frac{|S_j(a) - \hat{S}_j(a)|}{S_j(a)} = \frac{|S_j(a) - \sum_{i=1}^n S_i(k-1)\hat{r}_{jk}|}{S_j(a)} \quad (13)$$

在n个状态下m个阶段转移过程中相对误差之和Q为:

$$Q = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m |e_j(a)| = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{1}{S_j(a)} |S_j(a) - \sum_{i=1}^n S_i(a-1)\hat{r}_{jk}| \quad (14)$$

通过变量代换将非线性的规划模型转化为线性规划模型:

$$\begin{aligned} & \text{设 } u_j(k) \geq 0, v_j(k) \geq 0 \\ & (j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m) \\ & e_j(a) = v_j(k) - u_j(k), \\ & |e_j(a)| = v_j(k) + u_j(k) \end{aligned} \quad (15)$$

将公式(14)与(15)整理得:

$$\begin{aligned} & S_j(a) - \sum_{i=1}^n S_i(a-1)\hat{r}_{jk} + S_j(a)u_j(k) - \\ & S_j(a)v_j(k) = 0 \\ & (j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (16)$$

以相对误差之和最小为指导思想并将约束条件引入模型中,基于不同地质类型与各种不同钻孔数的状态,建立一个在n个状态下的m个阶段转移过程中相对误差之和Q最小为目标函数,以状态转移概率的行和条件和非负性为约束条件的求解马尔可夫状态转移概率矩阵的优化模型^[13]。通过求解上述线性规划模型,可求得状态转移概率矩阵 r_{jk} 的估计值 \hat{r}_{jk} 。

将转移概率导入马尔科夫预测模型,约束条件为:

$$\min Q = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^6 (v_j(k) + u_j(k))$$

$$= u_1(1) + v_1(1) + u_2(1) + v_2(1) + u_3(1) + v_3(1) + u_4(1) + v_4(1) + \dots + u_1(6) + v_1(6) + u_2(6) + v_2(6) + u_3(6) + v_3(6) + u_4(6) + v_4(6) \quad (17)$$

约束条件:

$$0.4793 - 0.4591 \hat{r}_{11} - 0.1399 \hat{r}_{21} - 0.2996 \hat{r}_{31} - 0.0999 \hat{r}_{41} + 0.4793 u_1(1) - 0.4793 v_1(1) = 0$$

$$0.2996 - 0.4591 \hat{r}_{12} - 0.1399 \hat{r}_{22} - 0.2996 \hat{r}_{32} - 0.0999 \hat{r}_{42} + 0.4793 u_2(1) - 0.4793 v_2(1) = 0$$

$$0.1399 - 0.4591 \hat{r}_{13} - 0.1399 \hat{r}_{23} - 0.2996 \hat{r}_{33} - 0.0999 \hat{r}_{43} + 0.4793 u_3(1) - 0.4793 v_3(1) = 0$$

$$0.0999 - 0.4591 \hat{r}_{14} - 0.1399 \hat{r}_{24} - 0.2996 \hat{r}_{34} - 0.0999 \hat{r}_{44} + 0.4793 u_4(1) - 0.4793 v_4(1) = 0$$

...,直到 6 组值均代入,由公式(6)中性质可得式(18)

$$\begin{aligned} r'_{11} + r'_{21} + r'_{31} + r'_{41} &= 1 \\ r'_{12} + r'_{22} + r'_{32} + r'_{42} &= 1 \\ r'_{13} + r'_{23} + r'_{33} + r'_{43} &= 1 \\ r'_{14} + r'_{24} + r'_{34} + r'_{44} &= 1 \end{aligned} \quad (18)$$

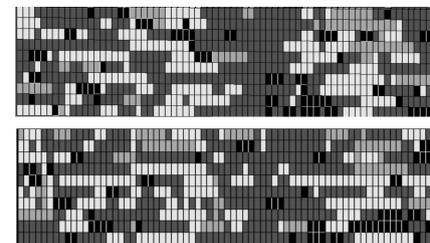


图 3 预测模型剖面(上)和实测区域剖面(下)

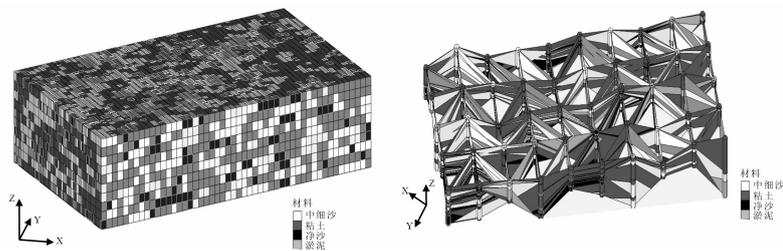


图 4 可模拟场三维模型 & 地层剖面

5 结论

运用 GMS 中的 T-PROGS 模块,根据已知钻孔岩性信息建立研究结构模型,通过改变钻孔数量研究转移概率的变化,建立马尔科夫预测模型,预测数据与模拟数据共同确定最优钻孔密度为 30 孔/km²,最终模拟结果很好地反映了区域地质属性层的分布状况,验证了马尔科夫链在地质属性建模中的有效性。

(1)本文研究方法需要实测钻孔数据,对未勘察的地形,需要结合地形,取一片实验地形,采用传统的勘测方法取得钻孔数据,再运用本文理论得到周围地形的最优钻孔密度。

$$\hat{r}_{ij} \geq 0, v_j(k) \geq 0, u_j(k) \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, ; k = 1, 2, \dots, 6$$

可得到预测值,在 6 组预测值中,在钻孔减少到 50 时,马尔科夫预测与 T-PROGS 程序的值出现了较大变化:

表 3 预测结果与预测精度

	0.1496	0.2998	0.0998	0.4699
50(T-PROGS)				
50(预测模型)	0.1427	0.2101	0.1048	0.4981
相对误差/%	4.61	3.99	5.01	6.00

在 42 孔时,由于钻孔间的转移概率与马尔科夫预测模型间的误差已经很大(均值已经接近 5%),不能够真实的反映地层。取实测地层的剖面与模拟地层剖面对比(图 3),T-PROGS 建立的模型模拟效果较好,能够反映地层中的地质类型变化情况。

选定在 50 孔时为该参考场的最优钻孔密度,即 30 孔/km²,根据这时的钻孔密度的特征长度为 22.6 m,此时计算机模拟的马尔科夫预测曲线末端为 26.7 m,所以特征长度可靠的范围为 22.6 ~ 26.7 m。模拟所得的地层与剖面如图(4)。

(2)由于将各种地址类型概化为最常见的地质类型,没有考虑其他地址类型间的转移概率变化。

(3)根据具体需要,不同工程建设部门对土层分类标准不同,转移概率在不同种分类标准下的转移概率不同。

参考文献:

[1] 田玉昆,周辉,袁三一. 基于马尔科夫随机场的岩性识别方法[J]. 地球物理学报,2013,56(4):1360-1368.
 [2] 王伟鹏,李晓鹏,刘建立. 基于 Markov 链统计模型的区域土壤性质研究进展[J]. 土壤,2012,44(1):10-16.
 [3] 郭飞,葛成,韩宇. 嵌入式马尔科夫链的地质属性建模与应用[J]. 地理与地理信息科学,2012,28(1):47-50.

附近水深不超过 1 m,所以洪水主要从涵洞向下游推进,铁路阻水效果明显。结合淹没范围,流场分布以及 DEM 综合分析,本文所建多元耦合精细化模型计算结果基本合理。

5 结论

洪水风险分析是防洪减灾的一项重要非工程措施,通过建立城市洪涝风险模型获得可能的风险指标,对于科学指导防灾救灾、提高人们的风险意识和降低洪涝损失具有重要的意义。

(1) 本文建立三亚市雨、洪、潮多元耦合模型,得到了在 20 年一遇的暴雨、洪水、风暴潮等多致灾因素影响下,洪涝淹没面积 24.62 km²,其中淹没房屋面积 1.72 km²,淹没耕地 8.03 km²,影响人口 2.36 万人,影响村落和社区 30 多个;同时研究了暴雨为主的洪涝风险,统计了三亚市主城区的 37 个主要积水点和 13 处积水路段等风险指标。计算成果对三亚市洪涝风险科学指导、有效管理、风险规避具有指导作用。

(2) 风暴潮引起近海岸区海水倒灌和漫溢淹没,同时河道水位的升高将影响河道直排片区排水能力,这是沿海城市洪涝灾害的显著特点,也是沿海城市洪涝风险分析必须要考虑的因素之一。作为沿海城市代表,三亚市的研究成果对于其他受暴雨、洪水、风暴潮影响的沿海城市洪涝风险分析具有参考意义。

参考文献:

[1] 张继权,李 宁. 主要气象灾害风险评估与管理的数量化

方法及其应用[M]. 北京:北京师范大学出版社,2007.

[2] 路明浩,程先富. 洪水灾害风险评价研究综述[J]. 四川环境,2010,29(6):127-132.

[3] 赵庆良,许世远,王 军,等. 沿海城市风暴潮灾害风险评估研究进展[J]. 地理科学进展,2007,26(5):32-40.

[4] 童汉毅,赵明登,槐文信,等. 洪潮遭遇情况的水动力学计算[J]. 武汉大学水利电力大学学报,2000,33(5):11-15.

[5] Larmaei M M, Mahdi T F. A new method for the treatment of wetting - drying fronts[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36: 2286 - 2302.

[6] Bates P D, Horritt M S, Fewtrell T J. A simple inertial formulation of the shallow water equations for efficient two - dimensional flood inundation modelling[J]. Journal of Hydrology, 2010, 387: 33 - 45.

[7] Fernandez - Nieto E D, Marin J, Monnier J, et al. Coupling superposed 1D and 2D shallow - water models: Source terms in finite volume schemes[J]. Computers & Fluids, 2010, 39: 1070 - 1082.

[8] 郑立松. 风暴潮 - 天文潮 - 波浪耦合模型及其在杭州湾的应用[D]. 北京:清华大学,2010.

[9] 李大鸣,管永宽,李玲玲,等. 蓄滞洪区洪水演进数学模型研究及应用[J], 水利水运工程学报,2011(9):27-34.

[10] 傅新忠. SWMM 在城市雨洪模拟中的应用研究——以金华市城北某区块为例[D]. 金华:浙江师范大学,2012.

[11] 权 锦,张大伟,蒋云钟. 应用二维数值方法模拟蓄滞洪区洪水运动[J]. 水利水电技术,2012,43(4):107-111.

[12] 苑希民,田福昌,冯国娜,等. 溃堤洪水的二维水动力模型及其应用[J]. 南水北调与水利科技,2015,13(2):225-230.

[13] 衣秀勇,关春曼,果有娜,等. DHI MIKE FLOOD 洪水模拟技术应用与研究[M]. 北京:中国水利水电出版社,2014:8-15.

(上接第 117 页)

[4] 张 弛,仵彦卿,覃荣高. 渗透系数升尺度对非均质含水层溶质迁移影响研究[J]. 水文地质工程地质,2014,41(5):19-25+31.

[5] 张 丰,王 箭,赵燕飞,等. 基于马氏链的信任预测算法[J]. 计算机科学,2014,41(4):155-158+183.

[6] 潘少伟,罗海宁,郭 智. 序贯指示模拟法夹层模型建立[J]. 西南石油大学学报(自然科学版),2014,36(5):59-66.

[7] 刘艳丽,余贻鑫. 大系统马尔可夫模型状态转移概率矩阵的快速形成方法[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版),2013,46(9):791-798.

[8] 李 军,杨晓娟,张晓龙,等. 基于三维马尔可夫链模型的岩性随机模拟[J]. 石油学报,2012,33(5):846-853.

[9] 聂笃忠,陈 桦,米承继,等. 马尔科夫链状态概率转移矩阵修正算法[J]. 统计与决策,2013(3):14-17.

[10] 靳 萍,邵景力,李长青,等. 基于 T - PROGS 的地下水三维数值模拟及应用[J]. 水文地质工程地质,2009,36(4):21-26.

[11] 何陇萍,牛 梅. GMS 在水文地质结构可视化方面的应用[J]. 资源节约与环保,2015(1):166.

[12] 张 浩,王福林,索瑞霞,等. 基于马尔可夫模型的我国东、中、西部的产业结构预测[J]. 数学的实践与认识,2010,40(14):39-44.

[13] 文士发,徐 梅,王福林,等. 一种估算马尔柯夫状态转移概率矩阵的新方法[J]. 数学的实践与认识,2014,44(8):164-169.