

固体中圆柱形孔脉冲超声波散射的有限元模拟

李树榜^{1,2}, 李书光¹, 刘学锋¹

(1. 中国石油大学(华东), 山东东营 257061; 2. 聊城大学, 山东聊城 252069)

摘要: 建立了半无限各向同性弹性固体的具有吸收边界的二维平面应变有限元模型, 计算研究了入射平面脉冲超声纵波和横波在固体中横向圆柱形孔上的散射。计算结果以位移场快照和位移散度场(纵波)、位移旋度场(横波)场快照的形式给出, 与现有动态光弹实验照片进行了比较, 符合得较好。通过对计算数据的处理, 清晰地看到了入射纵波沿孔壁的螺旋旋转爬行, 证实了理论预计, 弥补了光弹实验结果的不足。

关键词: 固体; 超声波; 圆柱形孔; 散射; 有限单元法

中图分类号: O422.5

文献标识码: A

文章编号: 1000-3630(2007)-03-0417-05

Finite element modeling of pulsed ultrasonic waves scattered from cylindrical hole in solid

LI Shu-bang^{1,2}, LI Shu-guang¹, LIU Xue-feng¹

(1. China University of Petroleum, Dongying 257061, China; 2. Liaocheng University, Liaocheng 252069, China)

Abstract: A two-dimensional plain strain finite element model of infinite isotropic solid has been developed to investigate the ultrasonic wave scattering by a cylindrical hole. The results, presented in the form of displacement snapshot, and divergence and curl snapshot, are compared with the previous observations obtained with the dynamic photoelasticity method. Good agreement is found. By processing the data, screw creeping of the incident compression wave along the hole can clearly be seen, verifying a theoretical prediction and compensating for the deficiency of experimental results.

Key words: solid; ultrasonic wave; cylindrical hole; scattering; finite element method

1 引言

长期以来固体中圆柱形孔对声波散射特性的研究是声学工作者十分感兴趣的课题之一。早在上世纪 50 年代, White^[1]就研究了弹性固体中异质圆柱体对连续入射纵波和入射横波的散射特性。Miklowitz 等于 1978 年计算了脉冲超声波的散射问题, 得出了散射波连续绕孔壁螺旋旋转的理论预计。此后, 应崇福等使用动态光弹实验方法首次观察到脉冲平面横波入射时, 散射横波绕孔壁的螺旋旋转“爬行”, 证实了这一理论预计。但遗憾的是, 对于脉冲平面纵波入射时, 由于绕孔壁的散射纵波衰减很快, 光

弹实验中没有清晰地观察到绕孔壁的螺旋旋转。

近年来, 随着计算机技术的迅速发展, 采用有限元或有限差分将连续问题转化为离散问题, 并运用计算机直接进行数值模拟, 在模型“制作”、参数选取和变动及对模拟结果的数据处理方面, 较之实物模型试验皆具有无比的灵活性和优越性^[2]。运用有限元方法, N.N. Kishore^[3]研究了固体中圆柱形孔洞在点源纵波入射下的散射截面, 给出散射能量的角分布, 但他们的研究并未涉及入射波沿孔壁的爬行现象。我国在超声波散射数值模拟方面的研究进行得还很少^[4], 目前尚未见到相关报道。

本文建立了半无限固体中无限长横圆柱孔的二维平面应变有限元模型, 使用 Matlab 语言编写了计算程序, 分别计算了在平面脉冲超声纵波和横波入射时在圆柱孔上的散射。计算结果与现有光弹实验照片对比, 具有较好的一致性。并且通过对计算数据的处

收稿日期: 2005-08-29; 修回日期: 2005-11-12

作者简介: 李树榜(1972-), 男, 山东聊城人, 讲师, 主要从事应用声学
的研究。

通讯作者: 李树榜, E-mail: lishb2003@yahoo.com.cn

理, 清晰地看到了入射纵波沿孔壁的螺旋旋转爬行, 证实了理论预计, 同时也弥补了光弹实验结果的不足。

2 有限元算法

2.1 有限元方程与求解格式

在不存在体力时, 各向同性弹性固体中声波的 Navier 控制方程的矢量形式为^[5]

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (1)$$

其中 λ 和 μ 为 Lamé 常数, ρ 为材料密度。

首先将计算区域划分为若干单元和结点, 然后选取适当的单元结点位移插值函数, 用结点位移和位移插值函数表示出区域任一点的位移, 利用伽辽金 (Galerkin) 法由方程 (1) 导出整体有限元运动方程为^[6]

$$M\ddot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (2)$$

式中 M 、 K 、 \mathbf{P} 分别代表质量矩阵、刚度矩阵和结点载荷向量, 并分别由各自的单元矩阵和向量集成, 即

$$M = \sum_e M^e, K = \sum_e K^e, P = \sum_e P^e \quad (3)$$

其中

$$M^e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, K^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, P^e = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{T} ds \quad (4)$$

求解式 (2) 的数值积分选用绝对稳定的 Newmark 隐式格式, 此种格式算法本身可以引入数值阻尼, 可以有效地消除对波动模拟无意义的高频寄生振荡^[6]。积分稳定的同时, 波动模拟的精度主要依赖于每一有意义的波长上包含的结点数, 不应少于 8 个。这样, 首先由计算区域的波速确定最小空间步距 Δx , 然后根据选定的 Δx 确定时间步距 Δt ^[7], 应满足 $\Delta t \leq \Delta x / c_{\max}$ (c_{\max} 为区域内最大波速)。

计算中固体介质选取铝, 其杨氏模量、泊松比和密度等材料参数分别取为

$$E = 69.55 \text{ GPa}, \mu = 0.34, \rho = 2700 \text{ kg/m}^3$$

波源选用频率为 4MHz (周期 $T = 0.25 \mu\text{s}$) 的一个周期的正弦脉冲, 其函数表达式为

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi ft) & 0 \leq t \leq 0.25 \mu\text{s} \\ 0 & t > 0.25 \mu\text{s} \end{cases}$$

相应的纵波、横波及瑞利波的波速和波长分别为

$$c_p = 6300 \text{ m/s}, c_s = 3100 \text{ m/s}, c_r = 2900 \text{ m/s}$$

$$\lambda_p = 1.575 \text{ mm}, \lambda_s = 0.775 \text{ mm}, \lambda_r = 0.725 \text{ mm}$$

由 λ_r 确定选取 $\Delta x = 0.1 \text{ mm}$, 然后由 c_p 和 Δx 确定取 $\Delta t = 0.015 \mu\text{s}$ 。

2.2 人工边界条件

由于计算机存储量的限制, 选取的有限元的求解域往往只是实际区域非常有限的一部分, 计算区域和实际区域的其它部分间存在人工截断边界。为保证波动模拟的可靠性与真实性, 必须在人工截断边界上加上适当的人工边界条件。综合考虑现有的各种边界条件对各种波型的吸收作用, 选用 Lysmer 黏性阻尼边界^[3]和 Sarma 吸收边界^[8]的组合。

对于二维问题, 人工边界上单元 Lysmer 黏性阻尼边界可以表示为

$$C_1 = \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{A} \mathbf{N} dV \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a c_p & 0 \\ 0 & b c_s \end{pmatrix} \quad (6)$$

式 (6) 中 a 和 b 为无量纲常数, 计算中均取为 1; c_p 和 c_s 分别为介质中纵波和横波波速。

Sarma 吸收边界就是在边界向计算区域内若干层单元上添加瑞利 (Rayleigh) 阻尼, 形成边界阻尼区。瑞利阻尼矩阵可以表示为

$$C_2 = \alpha M + \beta K \quad (7)$$

其中 α 和 β 为瑞利阻尼系数, 满足

$$\alpha + \beta \omega_i^2 = 2 \omega_i \xi_i \quad (8)$$

ω_i 为结构自振动固有角频率, ξ_i 为相对于一振型的临界阻尼比, 对于不同材料, 取值约在 0.05~0.3 之间。取两种固有振型联立方程, 计算可以确定 α 和 β 的值。

加入阻尼矩阵的整体有限元运动方程 (2) 变为

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (9)$$

其中

$$C = C_1 + C_2 \quad (10)$$

2.3 计算模型

有限元计算模型及剖分示意图如图 1 所示, 计算区域为从半无限铝材中截取的长为 26mm、宽为 20mm 的一部分。在区域的中心有一直径为 4mm 的横向圆柱孔。整个区域使用三结点线性三角形单元剖分, 剖分共生成 117 199 个单元、59 122 个结点。为模拟半无限铝材的情形, 在区域上除左侧表面为自由表面外, 其余三个人工截断边界上表面一层单元施加 Lysmer 黏性阻尼, 从第二层单元向计算区域内 3mm 内单元施加 Sarma 吸收边界条件。波源宽度为 14mm, 置于自由表面中心, 其振速分布为高斯分布^[9], 高斯分布函数为

$$u(\xi) = u e^{-B\xi^2} \quad (11)$$

式 (11) 中 B 为声源高斯系数, 在实际计算中 B

取为 4。

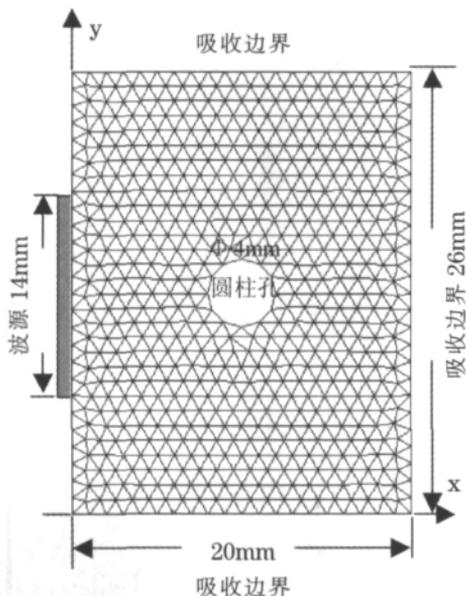


图 1 有限元模型及剖分示意图

Fig.1 Finite element model and mesh geometry

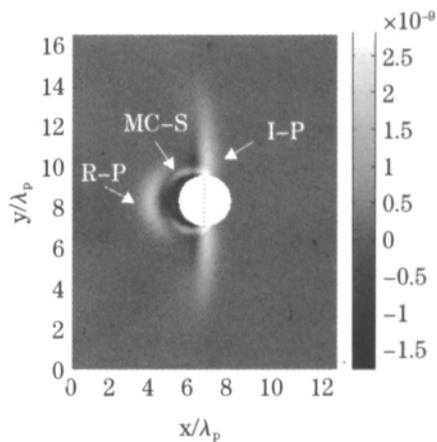
3 计算结果与讨论

利用上面所建立的有限元模型和算法, 对频率为 4MHz 的脉冲平面纵波和横波加载分别进行了计算。为使计算结果更具一般性, 下面给出的计算结果中对时间、空间长度分别相对于单次正弦波的周期 T 和声波波长进行了归一化。

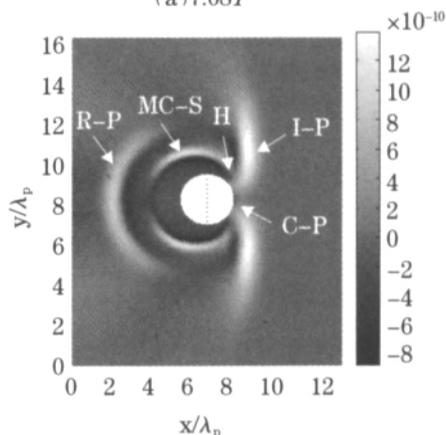
3.1 纵波入射的情况

波源加载方式为在相应表面结点施加的 x 方向应力边界条件, 激发平面纵波。计算条件为 $k_p a = 8$, 计算结果及与相应光弹实验照片对比如图 2 所示。

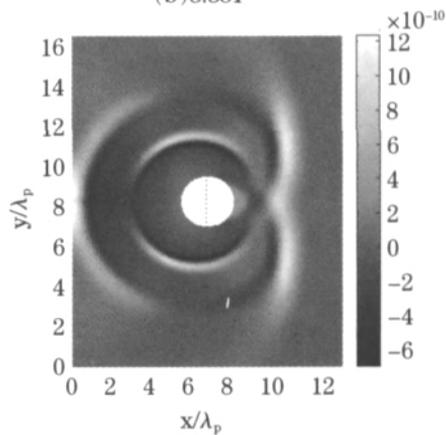
入射平面纵波(I-P)由左向右传播, 开始接触孔壁时入射角为 0° ; 纵波在孔壁反射, 产生背向反射纵波(R-P); 在继续右行中与孔壁交角不断改变直到扫完左半圆, 在此过程中, 除 R-P 外, 纵波将在孔壁表面产生模式转换横波(MC-S); 接触到左半圆上下两 endpoint 时入射角成为 90° ; 即与孔壁相切, 这时波前与孔壁垂直, 形成掠入射, 如图 2(a) 所示。如果孔壁是平面的, 则这个波前将继续垂直于平面壁前进。对于现在孔壁是圆形的情况, 在图 2(b) 可以看到, 在阴影区入射纵波的波前仍是垂直于圆形孔壁前进, 只不过它的前进方向随孔壁的法线方向不断调整表现为环孔的绕行。还可以看到, 在阴影区沿孔壁爬行纵波(C-P)波前, 一方面与不受阻挡的入射纵波波前相连接, 另一方面又与从孔左半圆反射形成的半圆形横波波前相连接, 阴影区这部分横波为跟随平面纵



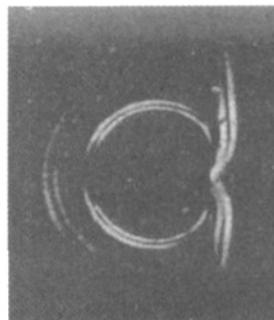
(a) 7.08T



(b) 8.88T



(c) 10.68T



(d) 光弹照片

图 2 平面纵波入射时 x -方向位移波场快照及相应光弹实验照片
Fig.2 X-displacement snapshots and photo of photoelasticity under a plain compression incident wave

波的头波(H)。从图 2(c)可以看到,在阴影区,爬行约 1/4 圆周后在 x 方向位移波场快照上就基本不可见了。图 2(d)给出光弹实验照片^[1],与计算结果图 2(c)相比,各波型分布及强弱分布符合较好。

为进一步观察纵波爬行 1/4 圆周后情况,图 3 经计算给出图 2(c)同时刻位移散度场(纵波)、旋度场(横波)波场快照,可以清晰看到,爬行纵波(C-P)经过圆孔右顶点后仍继续向沿孔壁爬行,且仍跟随有为横波的头波(H)。这与 Miklowitz 等(1978)的理论预计相符。

3.2 横波入射的情况

波源加载方式为在相应表面结点施加的 y 方向应力边界条件,激发平面横波。计算条件为 $k_0 a = 16$, 计算结果及与相应光弹实验照片对比如图 4 所示。

入射平面横波(I-S)仍由左向右传播,在图 4(a)中可见圆孔左半圆反射纵波(R-S)和模式转换纵波(MC-P),反射横波(R-S)波前与入射横波(I-S)波前相连接。图 2(b)中可见,由于模式转换纵波(MC-P)波速较快,其波前已到达左自由边界。图 4(c)中爬行横波已爬行过圆孔右端顶点,模式转换纵波(MC-P)已基本行进出了计算区域,仅在左自由表面出现反射纵波

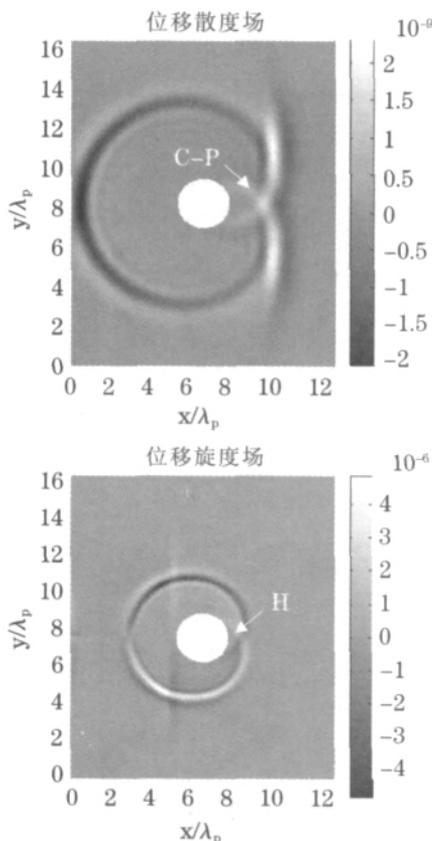
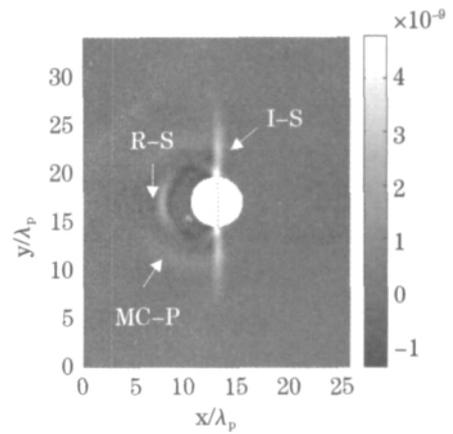
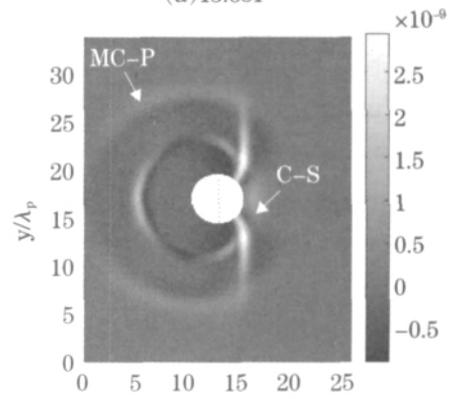


图 3 平面纵波入射时 10.68T 位移散度场(纵波)、旋度场(横波)波场快照

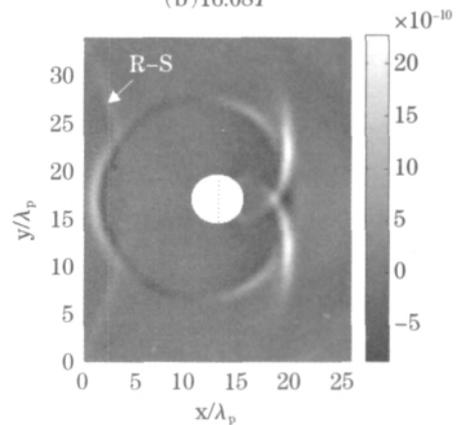
Fig.3 Divergence (compression wave) and rotation (Shear wave) snapshots of the displacement field at 10.68T under a plain compression incident wave



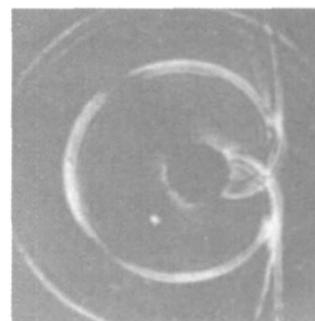
(a)13.68T



(b)16.08T



(c)20.28T



(d)光弹照片

图 4 平面横波入射时 y- 方向位移波场快照及相应光弹实验照片
Fig.4 Y-displacement snapshots and photo of photoelasticity under a plain shear incident wave

(R-P), 其余区域边界因施加了吸收边界条件, 没有可观察的反射现象。图 4(c) 与图 4(d)^[1] 光弹照片相比较, 横波在圆孔表面爬行情况具有较好的一致性。

平面横波入射与平面纵波入射的情况相比有明显的差异, 由图 4(b) 和 4(c) 可以看出, 一是爬行横波(C-S) 衰减很慢, 清晰可见爬行过右端顶点在阴影区继续爬行; 二是孔壁模式转换纵波(MC-P) 与孔的爬行横波(C-S) 波前不连接, 且其波前延伸超过半个圆周, 这与平面纵波入射时反射纵波(R-P) 波前明显不同, 其原因从 y 方向位移波场快照和光弹照片都不易观察。为进一步探究这一现象, 图 5 计算给出图 4(a) 同时刻的位移散度场(纵波)、旋度场(横波) 波场快照, 可以明显看出, 早在入射横波到达圆孔上下两个顶点时(入射角为 90°), 在横波波前之前已出现沿孔壁爬行纵波(C-P), 说明它产生于入射横波入射角为 90° 之前, 在入射角为横波临界角 λ 时, 平面横波就会产生沿孔壁掠入射的平面纵波, 被称为“非常规”爬行纵波^[1]。对铝而言, 这一角度约为 29.5° 。这一爬行纵波将一路领先于爬行横波沿孔壁爬行进阴影区, 爬行中紧贴孔壁的部分将很快衰减的不明显。

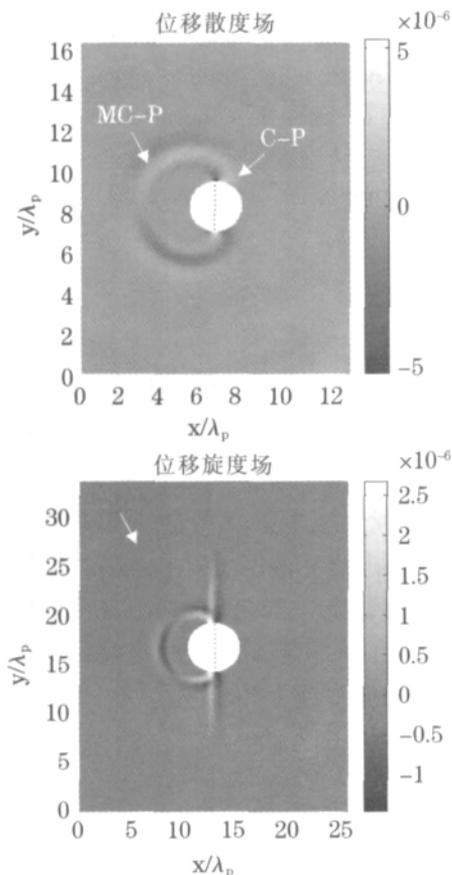


图 5 平面横波入射时 13.68T 位移散度场(纵波)、旋度场(横波) 波场快照

Fig.5 Divergence (compression wave) and Rotation (Shear wave) snapshots of the displacement field at 13.68T under a plain shear incident wave

对比图 5 中两图的数量级可知, 爬行纵波(C-P) 相对于横波接近小一个数量级, 以致在图 4 的 y 方向位移波场快照和光弹照片中均不易观察到。

4 结 论

本文运用有限元方法, 研究了脉冲超声平面纵波和横波在固体中圆柱形孔上的散射。主要得到以下结论:

(1) 通过引入吸收边界条件, 基本消除了波在人工截断边界上的虚假反射, 使得到的模拟结果真实可靠。

(2) 平面纵波和平面横波入射时的波场快照分别与现有动态光弹实验照片做了对比, 具有较好的一致性, 说明所建立的有限元模型、算法和程序可以较精确地模拟脉冲超声波在圆柱形孔上的散射。

(3) 数值模拟在对结果的处理上比光弹实验有着较大的优越性, 能够通过对计算数据的处理来突出光弹实验照片不易观察的某些细节, 清晰地看到了入射平面纵波沿孔壁爬行 $1/4$ 圆周后的爬行情况及平面横波入射时在孔壁产生的爬行纵波的爬行情况。证实了理论预计, 弥补了实验的不足。

参 考 文 献

- [1] 应崇福. 超声在固体中的散射[M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.
YING Chongfu. Ultrasonic Wave Scattering in Solid Media [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1994.
- [2] 廖振鹏. 近场波动的数值模拟[J]. 力学进展, 1997, 27(2): 193-216.
LIAO Zhenpeng. Numerical simulation of near-field wave Motion[J]. Advances in Mechanics, 1997, 27(2): 193-216.
- [3] Kishore N N, Sridhar I, Iyengar N G R. Finite element modeling of ultrasonic waves by isolated flaws[J]. NDT-&E International, 2000, 33(5): 297-305.
- [4] 张伟志, 刚铁, 王军. 超声波检测计算机模拟和仿真的研究及应用现状[J]. 应用声学, 2003, 22(3): 39-44.
ZHANG Weizhi, GANG Tie, WANG Jun. A Survey of the simulation in ultrasonic testing[J]. Applied Acoustics, 2003, 22(3): 39-44.
- [5] Joseph L. Rose. Ultrasonic Wave in Solid Media[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [6] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
WANG Xucheng. Finite Element Method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.
- [7] Datta D, Kishore N N. Features of ultrasonic wave propagation to identify defects in composite materials modeled by finite element method[J]. NDT&E International. 1996, 29(4): 213-223.
- [8] Sarma G S, Mallick K, Gadhinglajkar V R. Nonre-flecting boundary condition in finite-element formulation for elastic wave equation[J]. Society of Exploration Geophysicists. 1998, 63(3): 1006-1015.
- [9] 杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬. 声学基础[M]. 南京: 南京大学出版社, 2001.
DU Gonghuan, ZHU Zhemin, GONG Xiufen. Fundamental Acoustics[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 2001.