

随机微分方程在河道径流模拟中的应用

刘树峰¹, 王裕充², 许强²

(1. 吉林省水利水电勘测设计研究院, 辽宁 长春 130021; 2. 河海大学水文水资源学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 把随机微分运用到河道的行洪过程分析与计算中,通过考虑金沙江中游某河段行洪过程中的不确定性,建立随机微分方程模型,模拟河道出流过程,并用该河段某水文站的实测流量值对模型进行验证。结果表明:模拟值与实测值的统计参数有较好的拟合性,随机微分模型有较高的精度与准确性,模型在河道调洪验算中具有较高的适用性。本文为河道洪水验算提供了新的思路,为考虑河道洪水验算过程不确定性的洪水计算提供了科学依据。

关键词: 行洪过程; 随机微分方程; 河道出流量; 调洪演算

中图分类号: TV121.4

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2015)03-0076-04

Application of stochastic differential equation in simulation of river runoff

LIU Shufeng¹, WANG Yuchong², XU Qiang²

(1. Institute of Jilin Province Water Resource and Hydropower Design and Research, Changchun 130021, China;

2. College of Hydrology and Water Resources, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The idea of stochastic differential was applied to the process of river runoff in this paper. Considering the uncertain of the process of river runoff, the paper set up the model of stochastic differential equation and simulated outflow process of the river, and then certified the model by measured data of a hydrology station in this river. The result showed that statistical parameters of calculating value are better accordant with that of measured value and the accuracy and precision of the model is high. The model has higher feasible in application of regulating flood calculation. This paper can provide a new idea for flood checking computation of river and scientific basis for uncertain flood computation considering the process of flood checking computation of river.

Key words: flood discharge process; stochastic differential equation; river runoff; flood routing

1 研究背景

河网汇流计算是水文水利计算中最主要的工作。目前常用的河道汇流计算主要是根据河道水量平衡方程式,运用特征河长对河道行洪过程验算,求得河道出流过程。

根据水量平衡方程式,河槽的蓄量主要和上游洪水的输入过程和下游流量的输出过程有关。传统的计算方法把上游的输入过程和下游的出流过程看作确定过程,未考虑不确定性对其影响,实际的河道行洪过程中,流量监测的不确定,水文数据的缺失以及监测误差等均可造成流量输入和输出的不确定性。因此,在河流行洪计算过程中,考虑不确定势在必然。

随机微分方程的运用为解决这一问题提供了有效的数学工具。许多水文过程是独立增量的马尔可夫(Markov)过程,可以用概率论和微分方程为基础的随机微分方程进行模拟,纪昌明等^[1-4]把随机微分思想成功地运用在了水库调洪验算以及泄洪风险分析中。同样可以用随机微分思想对行洪过程中出现的随机现象和规律进行数学分析和描述,准确综合各种随机输入过程和随机初始条件对河槽流量的影响,为准确的计算河道行洪过程提供科学依据。

本文把随机微分思想运用于河道调洪计算过程,并在金沙江上游某河段进行验证。验证结果表明,该方法在研究区有良好的适用性,为河道调洪验算提供指导。

收稿日期:2015-01-06; 修回日期:2015-03-05

基金项目:国家水体污染控制与治理科技重大专项(2014ZX07101-011);水利部公益项目(201301068)

作者简介:刘树峰(1976-),男,吉林长春人,本科,高级工程师,主要从事水利水电工程设计工作。

2 行洪过程随机微分方程的建立

2.1 传统河道调洪验算

传统的河道调洪验算,根据水量平衡原理建立如下的微分方程式进行计算。

$$I(t) - O(t) = \frac{dW(t)}{dt} \quad (1)$$

式中: $I(t)$ 为河段上游入流洪水, m^3/s ; $O(t)$ 为河段下游出流洪水, m^3/s ; $W(t)$ 为河槽蓄量, m^3 ^[5]。运动波和稳定流情况下河道无调蓄作用,即 $\frac{dW}{dt} = 0$ 。

扩散波在河道中运动时,其蓄量($W(t)$)与出流量($O(t)$)呈顺时针绳套,逆时针绳套或者单值关系^[6]。通常采用特征河长的方法寻求 $W(t)$ 与 $O(t)$ 的单值关系,再用单值关系近似顺时针或逆时针绳套关系,计算河道出流量^[7]。假设河段长为特征河长,并假设 $W(t)$ 与 $O(t)$ 呈线性关系,引入以下的方程组来描述河道的水位和蓄量关系:

$$I_l(t) - O_l(t) = \frac{dW_l(t)}{dt}$$

$$W_l(t) = \tau O_l(t) \quad (2)$$

式中:带有下标 l 的量均为在特征河长河段中的表示方法; τ 为蓄泄关系系数,为常数。上式中各量都是确定性的,无法表现行洪过程中不确定性的影响。若要从传统的确定性思考方式转而关注行洪过程的不确定性,需要建立包含随机过程的随机微分方程。

2.2 随机微分方程的引入

河道行洪过程中,河槽的蓄量 $W(t)$ 变化可用 Markov 过程来模拟。其任意时刻的观测值与过去的过去独立,只与最近的过去相关^[8]。对于时间段 $\Delta(t)$ 内的蓄量增加量 $\Delta w(t)$ (m^3) 为独立增量过程,因此 $W(t)$ 是维纳(Wiener)过程。而出流量与蓄量 $W(t)$ 呈单一线性关系,其过程也是 Wiener 过程。

在实际的行洪过程中,受很多不确定性因素影响,制约着河道的调洪过程,从以下两方面进行分析:

首先是河道入流过程 $I(t)$ 的随机性。水文资料、测量误差、预报精度等诸多因素均影响入流过程的精度。入流过程可以看作是一个绕其均值过程作随机游走的布朗运动的过程。扣除其均值后还剩下白噪声过程 $i(t)$ (m^3/s),其均值过程可以认为是确定运算时输入的洪水过程。

其次是河槽蓄量 $W(t)$ 的随机性。同入流过程类似,同样受到水文资料、测量误差、预报精度、河道地形等因素的影响,是一个随机过程,扣除其均值后

剩下白噪声过程 $\omega(t)$ (m^3)。

在方程式中扣除其均值过程后可以建立随机微分方程:

$$i(t) - o(t) = \tau \frac{do(t)}{dt} \quad (3)$$

式中: $o(t)$ 为出流过程的白噪声过程, m^3/s 。从形式上看,它和确定性的水量平衡方程无大的差别,把受不确定性因素影响的量加入随机过程后就成了随机微分方程,这样就把随机微分的思想引入到河道调洪运算中。

3 计算原理

设入流过程的噪声过程为强度为 $\sigma^2(t)$ 的正态白噪声过程。则

$$i(t) = \sigma(t)\omega(t)$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = \omega(t) \quad (4)$$

式中: $\omega(t)$ 为标准正态白噪声过程; $B(t)$ 为标准维纳过程。则方程可以写成伊藤方程形式。

$$do(t) = -\mu o(t)dt + \mu\sigma(t)dB(t) \quad (5)$$

式中: $\mu = \frac{1}{\tau}$,这是伊藤微分方程的标准形式,其解的过程为马尔可夫过程。根据伊藤微分公式,在初始条件 $t_0, o(t_0)$ 的条件下,其解为:

$$o(t) = e^{-\mu(t-t_0)} o(t_0) + \mu \int_{t_0}^t \sigma(x) e^{-\mu(t-x)} dB(x) \quad (6)$$

式(6)中的积分项是伊藤积分。设为 $\xi(t, t_0)$, 则

$$\xi(t, t_0) = \int_{t_0}^t \sigma(x) e^{-\mu(t-x)} dB(x) \quad (7)$$

因为被积函数 $\sigma(x) e^{-\mu(t-x)}$ 为非随机过程。因此 $\xi(t, t_0)$ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2(t, t_0))$, 其方差为:

$$\sigma^2(t, t_0) = \int_{t_0}^t |\sigma(x) e^{-\mu(t-x)}|^2 dx \quad (8)$$

故可以对式(6)进行均方积分。用 $\bar{o}(t)$ 表示时段 $[t, t + \Delta t]$ 内的平均泄量。

$$\bar{o}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} o(u) du$$

将式(5)代入整理简化后可得:

$$\bar{o}(t) = \frac{1 - e^{-\mu\Delta t}}{\Delta t} o(t) + \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \sigma(u) (1 - e^{-\mu(t+\Delta t-u)}) dB(u) \quad (9)$$

把式(9)进行平稳逼近及标准化即得如下的推导公式:

$$x(t_i) = e^{-\mu} x(t_{i-1}) + \sqrt{1 - e^{-2\mu}} \xi_{t_{i-1}}$$

$$\bar{x}(t_i) = \sqrt{\frac{\mu A^2}{2(1-A)}} x(t_i) + \sqrt{\frac{1-2A+\frac{B}{2}}{1-A}} \xi_{t_i} \quad (10)$$

式中： $x(t_i)$ 和 $\bar{x}(t_i)$ 分别表示标准化后的 $o(t_i)$ 和 $\bar{o}(t_i)$ ，且 $A = \frac{1-e^\mu}{\mu}$ ， $B = \frac{1-e^{-2\mu}}{\mu}$ 。

在实际的计算过程中，按照此递推公式求得出流的平均过程 $\{\bar{x}(t_i)\}$ 。

4 算例及讨论

4.1 研究区概况

金沙江发源于青海境内唐古拉山脉，是长江上游重要的河段，流域面积广阔，支流众多^[9]，属于亚热带季风气候，多年平均年降水量 710 mm，多年平均径流量达 1 498 亿 m^3 ，是长江干流比较稳定的基本流量，拥有丰富的水能资源，是我国主要的水利发电河段，是南水北调河段的重要水源地。研究所选取河段位于金沙江中游，河段长近似于特征河长，在计算河段内无水利工程影响，河段来水主要为上游汇水及河段区间降水，取该河段的下游水文站数据作为计算值的对比。

4.2 实测资料的处理

选取长江中游金沙江流域某水文站的 1992 - 2011 年 20 a 的月径流资料对模型进行验证。从图 1 中 20 a 的年平均流量对比可以发现，河流的丰枯现象不明显，年径流相对平稳，变差系数较小。

计算月径流资料的均值和方差，对月径流资料进行标准化和正态化，用正态化后的数据作为计算值的对比数据。

4.3 模型计算与对比

递推公式(10)中的 ξ_{t_i} 为伊藤积分的值，符合正态分布，取正态随机数作为 ξ_{t_i} 和 $\xi_{t_{i-1}}$ 的值，代入模型公式； $x(t_i)$ 为正态化后的 $O(t)$ 误差值，本身符合

正态分布，也可取正态随机数带入模型公式；经过多方面的综合对比分析，率定后确定取模型参数 $\mu = 0.045$ 。

模型计算过程可以分为以下步骤：任取正态随机数 $\xi_{t_{i-1}}$ 和 $x(t_{i-1})$ ，带入模型求得 $x(t_i)$ ；取正态随机数 ξ_{t_i} 带入模型，求得 $\bar{x}(t_i)$ ；反复进行以上步骤计算出长系列的 $\{\bar{x}(t_i)\}$ 。把计算出来的 $\{\bar{x}(t_i)\}$ 系列与误差系列 $\{x(t_i)\}$ 求和之后，与经过正态化后的实测值系列进行对比，取统计特征相近的一组作为计算模拟值。部分模拟值如表 1 所示。

表 1 部分模拟值与实测值正态变换后的对比表

年月	实测值正态变换后	计算误差值	计算均值	模拟值
2010-01	0.28	-0.23	0.40	0.49
2010-02	0.89	-0.54	-0.60	-0.58
2010-03	0.62	-0.52	-0.12	-0.14
2010-04	-2.31	0.04	2.13	2.47
2010-05	-2.00	1.03	1.15	1.15
2010-06	0.28	-0.23	0.40	0.27
2010-07	0.34	1.27	-0.84	-0.89
2010-08	0.14	0.14	-0.05	-0.09
2010-09	0.12	0.43	-0.53	-0.50
2010-10	-1.32	0.01	-1.25	-1.24
2010-11	-2.31	0.04	2.13	2.17
2010-12	1.25	1.38	0.34	0.51
2011-01	0.34	1.27	-0.84	-0.43
2011-02	0.14	0.14	-0.05	-0.08
2011-03	0.57	-0.05	0.72	0.67
2011-04	1.14	-0.33	-1.30	-1.33

从表 1 可以看出，模拟值与实测相差不大。最大绝对误差值为 0.41，精度基本满足要求。为了验证模型的准确性，把正态化后的 20 a 系列的月径流值的统计参数与模拟值的统计参数进行对比，考察拟合程度。计算值与实测值的均值、方差对比图分别见图 2 和 3。

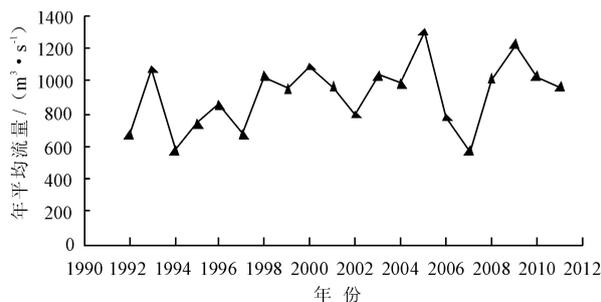


图 1 金沙江流域某水文站年平均流量散点图

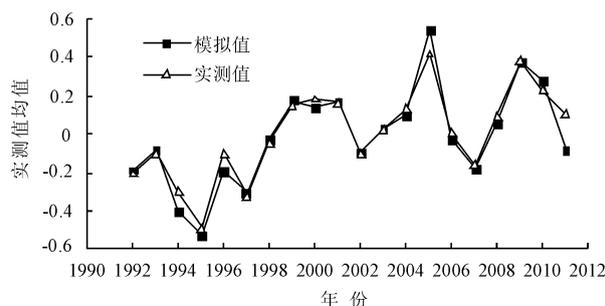


图 2 计算值与实测值均值对比图

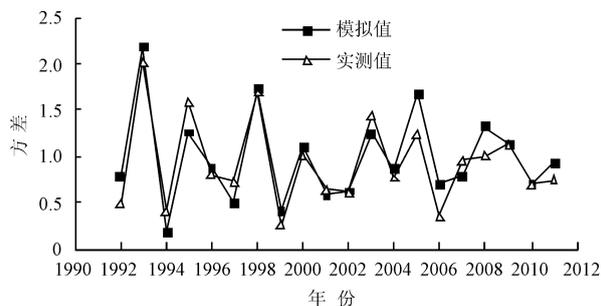


图3 计算值与实测值方差对比图

从图2和图3的对比中可以看出,模拟值和实测值的统计参数(均值和方差)之间有很高的拟合度,其中均值的相关系数高达97%以上,方差的相关系数也在90%以上。表明用此模型来模拟实测值有较高的精度,此种方法适用于月平均流量系列的模拟。

5 结 语

(1)本文把随机微分方程的思想运用到河道行洪过程中,对金沙江流域河道出流过程进行模拟,对河道洪水计算有重要的指导意义。

(2)运用随机微分思想建立模型公式,经过多次的迭代运算,对长系列的月平均径流进行模拟,模型参数少,计算简便合理。

(上接第75页)

由评价结果可以看出,经过治理的护城河南段水环境质量要好于其他河段,可见护城河整治工程取得了阶段性的成功,护城河其他河段亟待治理和保护。

5 结 语

(1)通过对护城河不同位置进行取样分析表明,以地表水IV类为标准,西安市护城河水质监测指标中除pH以外,化学需氧量、溶解氧、氨氮、总氮、总磷均超标,不能达到景观水要求。

(2)分析了西安市护城河水质指标的空间趋势变化特征,并对各河段污染来源进行了探讨,结果表明护城河南西段水体主要受内源污染,而东北段主要受外源污染的影响。

(3)通过对西安护城河水环境质量的综合评价,结果表明,护城河总体水环境质量水平较差,其中经整治过的南段水环境质量相对较好,西段、东段次之,北段最差,亟待治理和保护。

参考文献:

[1] 张学真. 城市化对水文生态系统的影响及对策研究

(3)把模拟值与实测值进行对比,结果表明模拟值与实测值的统计参数拟合良好,模型具有较高的精度和准确性,可以作为河道行洪验算的一种计算方法,为河道调洪计算提供了新的思路。

参考文献:

- [1] 纪昌明,张验科. 基于随机模拟的水库泄洪风险分析[J]. 人民黄河,2009,31(5):36-37+42.
- [2] 王丽学,林凤伟,汪可欣,等. 基于蒙特卡罗模拟的泄洪风险率计算[J]. 人民长江,2008,39(19):20-22.
- [3] 谢萍萍,宋松柏. 非参数解集模型在月径流随机模拟中的应用[J]. 人民黄河,2010,32(8):36-38+42.
- [4] 雷瑞丽,张贵金,陈雄波. 基于随机微分方程的大坝漫顶风险研究[J]. 人民黄河,2010,32(4):114-115+117.
- [5] 芮孝芳. 水文学原理[M]. 北京:中国水利水电出版社,2004.
- [6] 李克先. 扩散波洪峰流量演算模型研究[J]. 中国农村水利水电,2010(3):29-31.
- [7] 芮孝芳,张超. Muskingum法的发展及启示[J]. 水利水电科技进展,2014,34(3):1-6.
- [8] 王虹. 随机微分方程数值解法在水库调洪演算中的应用[D]. 长春:吉林大学,2009.
- [9] 廖宇,倪长健. 金沙江流域近47年降水特征分析[J]. 人民长江,2011,42(5):55-58+85.
- [10] 郭韦,王昱,王昊,等. 城市水污染现状和国内外水生态修复方法研究现状[J]. 水科学与工程学报,2010(2):57-59.
- [11] 王子,李方敏,董战峰,等. 护城河水污染控制探讨-以荆州市护城河为例[J]. 环境科学与管理,2007,32(10):45-48.
- [12] 刘玉玲,高升,白凯. 西安护城河水质分析与生态修复方案[J]. 水资源与水工程学报,2011,22(1):63-65.
- [13] 李文宾. 西安护城河水环境污染与保护研究[D]. 西安:长安大学,2014.
- [14] 牛小磊. 西安护城河整治与水体修复研究[D]. 西安:西安建筑科技大学,2007.
- [15] 陶秋丽,韩张雄,刘美美,等. 西安护城河水体现状监测与污染成因分析[J]. 应用化工,2013,42(1):57-61.
- [16] 王振勇. 对温州市河道水环境综合整治规划思路的几点思考[J]. 水利发展研究,2003,3(6):19-21.
- [17] 赵彦伟,杨志峰. 城市河流生态系统健康评价初探[J]. 水科学进展,2005,16(3):349-351.
- [18] 朱伟,夏霆,姜谋余,等. 城市河流水环境综合评价方法探讨[J]. 水科学进展,2007,18(5):736-744.