文章编号：2095-4980(2023)05-0652-10

分数阶数字FIR微分器的快速WSLD设计算法

李 琪，周 宇，和浩铭，袁 晓

(四川大学 电子信息学院，四川 成都 610064)

摘 要：一阶逼近格林瓦尔–莱特尼科夫(G–L)加权系数的计算具有准确快速的递推公式，而高阶逼近鲁比希加权系数的求解则复杂度高，计算消耗时间长。本文通过傅里叶变换证明了鲁比希算子的逼近阶，并基于移位鲁比希算子提出一类四阶逼近的加权移位鲁比希差分(WSLD)算子。从数字信号处理角度分析WSLD算子滤波特性，设计基于WSLD算子的分数阶数字FIR微分滤波器并进行数值仿真验证。对比Al–Alaoui、鲁比希2种典型分数阶算子，结果表明，利用WSLD算子求解分数阶数字FIR滤波器滤波系数的算法简单、高效，且相对其他算子能有效减小吉布斯效应影响。

关键词：鲁比希加权系数；WSLD算子；滤波特性；分数阶；FIR微分器设计

中图分类号：TN911.72　　**文献标志码：**A　　**doi：**10.11805/TKYDA2022087

Fast WSLD design algorithm for digital FIR fractional differentiator

LI Qi，ZHOU Yu，HE Haoming，YUAN Xiao

(College of Electronics and Information Engineering，Sichuan University，Chengdu Sichuan 610064，China)

Abstract: The calculation of Grünwald–Letnikov's(G–L) weighted coefficient of first–order approximation has an accurate and fast recursive formula, while the calculation of Lubich's weighted coefficient of high–order approximation has a high complexity and a long calculation time. The approximation order of Lubich operator is proved by Fourier transform, and a class of Weighted Shifted Lubich Difference(WSLD) operators of fourth order approximation is proposed based on shifted Lubich operators. Then, the filtering characteristics of WSLD operator are analyzed from the perspective of digital signal processing, and a fractional digital Finite Impulse Response(FIR) differential filter based on WSLD operator is designed and verified by numerical simulation. Compared with Al–Alaoui and Lubich, the results show that the algorithm using WSLD operator to solve the filter coefficient of fractional digital FIR filter is simple and efficient, and can effectively reduce the influence of Gibbs effect compared with other operators.

Keywords: Lubich weighting coefficient; Weighted Shifted Lubich Difference operators; filtering characteristics; fractional order; FIR differentiator design

分数阶微积分具有非局部性等特点，在动力学系统、生物化学、金融、电子工程、信号与信息处理[1–3]等工程应用领域发挥着越来越重要的作用。如何快速有效地实现分数阶微积分计算并用于工程实践中，是科研人员关注的重点。随着社会的发展进步，为更好地拟合自然中存在的一些非线性现象，通常需要应用运算阶时的黎曼–刘维尔(Riemann–Liouville，R–L)分数阶微分构建微分方程。

标准格林瓦尔–莱特尼科夫(Grünwald–Letnikov，G–L)有限差分公式是分数阶微积分定义之一，同时也是用于数值逼近R–L分数导数的一种经典算法。求解格林瓦尔–莱特尼科夫加权系数的递推公式快速简单，但其计算分数阶微分的算法精确度仅为$O(\eta)$(η为计算步距)。为提高计算精确度，鲁比希[4]通过等距横坐标的拉格朗日插值，获得计算精确度为$O(\eta^p)$($p=1\sim6$)的生成函数。目前可通过幂级数展开法、卷积法、快速傅里叶变换法、递推算法[5–7]、复化Simpson数值逼近法[8]等方法求解近似鲁比希加权系数，但算法复杂度高，运算量大。本文通过傅里叶变换及泰勒级数展开验证移位鲁比希算子[9–15]的逼近阶，提出一类计算简单高效的四阶加权移位鲁比希差

收稿日期：2022-04-18；**修回日期：**2022-05-15

分算子(WSLD算子)。重点从数字信号处理角度探究WSLD算子的滤波特性，由此设计一种有效的高逼近精确度的分数阶微分滤波器，并进行数值验证。对比发现WSLD算子能够降低数字FIR分数阶滤波器系数计算的复杂度，提高运算效率和精确度，适合工程应用。

1　移位G–L公式的定义及相关概念

当 $t\in[a,b], -\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant\infty$，运算阶为 α 的标准G–L分数阶微分定义为：

$$ {}_{a}^{\mathrm{GL}}\mathrm{D}_{t}^{\alpha}f(t)=\eta^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}g_{k}^{(\alpha)}f(t-k\eta) \tag{1}$$

式中：η 为计算步距；$g_k^{(\alpha)}$ 为G–L加权系数，是生成函数 $G^{(\alpha)}(z^{-1})=(1-z^{-1})^{\alpha}$ 幂级数展开的系数：

$$G^{(\alpha)}(z^{-1})=(1-z^{-1})^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}g_{k}^{(\alpha)}z^{-k} \tag{2}$$

计算 g_k^{α} 具有简单快速的递推公式：

$$g_0^{(\alpha)}=1,\ g_k^{(\alpha)}=\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)g_{k-1}^{(\alpha)}, k\geqslant 1, k\in\boldsymbol{N} \tag{3}$$

利用 $g_k^{(\alpha)}$ 计算分数阶微分的算法精确度仅为 $O(\eta)$。

p 阶逼近的鲁比希生成函数为：

$$L_p^{(\alpha)}(z^{-1})=\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i}\left(1-z^{-1}\right)^{i}\right)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}l_{p,k}^{(\alpha)}z^{-k},\left(\alpha\in\mathbf{R},p=1\sim 6\right) \tag{4}$$

式中 $l_{p,k}^{(\alpha)}$ 为 p 阶逼近的鲁比希加权系数，$p=1$ 时，显然有 $L_1^{(\alpha)}(z^{-1})=G^{(\alpha)}(z^{-1})$、$l_{1,k}^{(\alpha)}=g_k^{(\alpha)}$。

1.1　移位G–L分数阶微分

若函数 $f(t)$ 满足傅里叶变换条件，且在实数区间内连续，定义函数在 t 时刻的 α 阶分数阶移位G–L差分公式为[8]：

$$A_{\eta,m}^{(\alpha)}f(t)=\eta^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}g_k^{(\alpha)}f\left[t-(k-m)\eta\right] \tag{5}$$

式中 $A_{\eta,m}^{\alpha}$ 为移位G–L算子，m 为一个整数常数，称为移位量，当 $m=0$ 时，式(5)表示的是标准G–L公式。

将 $g_k^{(\alpha)}$ 替换为 $l_{p,k}^{(\alpha)}$，得 p 阶逼近的移位鲁比希算子：

$${}_{p}A_{\eta,m}^{(\alpha)}f(t)=\eta^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}l_{p,k}^{(\alpha)}f\left[t-(k-m)\eta\right] \tag{6}$$

对式(6)两端同时做傅里叶变换：

$$\mathcal{F}\left\{f(t)\right\}=\int_{R}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t=\hat{f}(\Omega) \tag{7}$$

可得

$$\mathcal{F}\left\{{}_{p}A_{\eta,m}^{(\alpha)}f(t)\right\}=\eta^{-\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega m\eta}\sum_{k=0}^{\infty}L_p^{(\alpha)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega\eta}\right)^{k}\hat{f}(\Omega) \tag{8}$$

已知 $\mathcal{F}\left\{\mathrm{D}^{\alpha}f(t)\right\}=\left(\mathrm{j}\Omega\right)^{\alpha}\hat{f}(\Omega)$，通过泰勒级数展开式(8)，得到移位鲁比希算子的频域渐进展开式(9)，展开结果由表1给出。

$$\mathcal{F}\left\{{}_{p}A_{\eta,m}^{(\alpha)}f(t)\right\}=\left(\mathrm{j}\Omega\right)^{\alpha}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}c_{p,k}^{(\alpha,m)}\left(\mathrm{j}\Omega\eta\right)^{k}\right)\hat{f}(\Omega) \tag{9}$$

式中：$c_{p,k}^{(\alpha,m)}$ 为移位鲁比希算子的频域渐进展开项系数。

对式(9)进行傅里叶反变换可得

$$ {}_{p}A_{\eta,m}^{(\alpha)} f(t) = \mathrm{D}^{\alpha} f(t) + \sum_{k=1}^{N-1} c_{p,k}^{(\alpha,m)} \mathrm{D}^{\alpha+k} f(t) \eta^{k} + O\left(\eta^{N}\right) \tag{10} $$

通过表1发现，当 $m=0$，计算步距 η 固定时，式(10)逼近精确度只与 p 有关，为 $O\left(\eta^{p}\right)$；当 $m \neq 0$ 时，$c_{p,1}^{(\alpha,m)} \neq 0$，逼近精确度均降为 $O(\eta)$。当 $p=1, c_{1,1}^{(\alpha,m)} = |m-\alpha/2|$ 为最小值时，逼近精确度达到最优解；$p>1$ 时，$|m|$ 越小，逼近精确度越高。通过灵活加权误差最小 ${}_{p}A_{\eta,m}^{(\alpha)}$ 算子，使 $c_{p,1}^{(\alpha,m)} \sim c_{p,N-1}^{(\alpha,m)}$ 为0，可以得到任意逼近阶的WSLD算子。针对不同组合方式得到的WSLD算子，计算原理相同，但复杂度会随着算法逼近阶的增加而增加。

表1 鲁比希算子离散数值算法的傅里叶变换的幂级数渐进展开式

Table1 The power series asymptotic expansion of the Fourier transform of the Lubich operator discrete numerical algorithm

approximation order	asymptotic expansion of shifted Lubich operator in frequency domain
p	$(\mathrm{j}\Omega)^{\alpha}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} c_{p,k}^{(\alpha,m)}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{k}\right)$
$p=1$	$(\mathrm{j}\Omega)^{\alpha}\left(1+\left(m-\frac{\alpha}{2}\right)(\mathrm{j}\Omega\eta)+\left(\frac{3\alpha^{2}+\alpha}{24}-\frac{\alpha}{2}m+\frac{1}{2}m^{2}\right)(\mathrm{j}\Omega\eta)^{2}+\left(-\frac{\alpha^{3}+\alpha^{2}}{48}+\frac{3\alpha^{2}+\alpha}{24}m-\frac{\alpha}{4}m^{2}+\frac{m^{3}}{6}\right)(\mathrm{j}\Omega\eta)^{3}+O\left((\mathrm{j}\Omega\eta)^{4}\right)\right)$
$p=2$	$(\mathrm{j}\Omega)^{\alpha}\left(1+m(\mathrm{j}\Omega\eta)+\frac{3m^{2}-2\alpha}{6}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{2}+\frac{2m^{3}+\alpha(3-4m)}{12}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{3}+O\left((\mathrm{j}\Omega\eta)^{4}\right)\right)$
$p=3$	$(\mathrm{j}\Omega)^{\alpha}\left(1+m(\mathrm{j}\Omega\eta)+\frac{m^{2}}{2}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{2}+\frac{2m^{3}-3\alpha}{12}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{3}+O\left((\mathrm{j}\Omega\eta)^{4}\right)\right)$
$p=4$	$(\mathrm{j}\Omega)^{\alpha}\left(1+m(\mathrm{j}\Omega\eta)+\frac{m^{2}}{2!}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{2}+\frac{m^{3}}{3!}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{3}+O\left((\mathrm{j}\Omega\eta)^{4}\right)\right)$
$p=5$	$(\mathrm{j}\Omega)^{\alpha}\left(1+m(\mathrm{j}\Omega\eta)+\frac{m^{2}}{2!}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{2}+\frac{m^{3}}{3!}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{3}+\frac{m^{4}}{4!}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{4}+O\left((\mathrm{j}\Omega\eta)^{5}\right)\right)$
$p=6$	$(\mathrm{j}\Omega)^{\alpha}\left(1+m(\mathrm{j}\Omega\eta)+\frac{m^{2}}{2!}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{2}+\frac{m^{3}}{3!}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{3}+\frac{m^{4}}{4!}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{4}+\frac{m^{5}}{5!}(\mathrm{j}\Omega\eta)^{5}+O\left((\mathrm{j}\Omega\eta)^{6}\right)\right)$

1.2 一类四阶WSLD算子

为提高移位鲁比希算子的运算逼近精确度，结合表1，本文提出一类四阶逼近的WSLD算子：

$$ {}_{4}A_{\eta,m_v}^{\alpha} f(t) = \sum_{v=1}^{4} \lambda_{m_v}^{p} A_{\eta,m_v}^{\alpha} f(t), \qquad \mathrm{D}_{\eta}^{\alpha} f(t) = {}_{4}A_{\eta,m_v}^{\alpha} f(t) + O\left(\eta^{4}\right) \tag{11} $$

$$ m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq m_4, \max\left(\mathrm{abs}\left|m_v\right|\right) \leqslant 2 \tag{12} $$

则

$$ \mathrm{D}_{\eta}^{\alpha} f(t) = \eta^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} w_{k}^{(\alpha)} f\left\{t-\left[k-\max\left(m_v\right)\right]\eta\right\} + O\left(\eta^{4}\right) \tag{13} $$

式中 $w_{k}^{(\alpha)}$ 为 $l_{p,k}^{(\alpha)}$ 的加权组合，对于不同逼近阶的 $l_{p,k}^{(\alpha)}$，组合不同权重因子 $\lambda_{m_v}^{p}$，对应得到的 $w_{k}^{(\alpha)}$ 也不同，表2中列出 $\lambda_{m_v}^{p}$ 在不同逼近阶组合情况下的计算通式。

表2 权重因子 $\lambda_{m_v}^{p}$ 的计算通式

Table2 General formula for calculating weighting factor $\lambda_{m_v}^{p}$

approximation order	weighting factor
p	$\lambda_{m_v}^{p}$
$p=1$	$\lambda_{m_v}^{p}=-\dfrac{3\alpha^{3}-3\alpha^{2}+\left(2\alpha-6\alpha^{2}\right)\left(Y-m_v\right)+12Z-36\frac{U}{m_v}}{24\left(m_v{}^{2}\left(Y-2m_v\right)-Z+\frac{2U}{m_v}\right)}$ $\left(U=\prod_{v=1}^{4} m_v,\ Y=\sum_{v=1}^{4} m_v,\ Z=\sum_{v=1}^{4}\frac{U}{m_v}\right)$
$p=2$	$\lambda_{m_v}^{p}=\dfrac{9\alpha+4\alpha\left(Y-m_v\right)+6\frac{U}{m_v}}{6\left(m_v{}^{2}\left(Y-2m_v\right)-Z+\frac{2U}{m_v}\right)}$
$p=3$	$\lambda_{m_v}^{p}=-\dfrac{3\alpha-\frac{2U}{m_v}}{2\left(m_v{}^{2}\left(Y-2m_v\right)-Z+\frac{2U}{m_v}\right)}$
$p=4,5,6$	$\lambda_{m_v}^{p}=\dfrac{\frac{U}{m_v}}{\left(m_v{}^{2}\left(Y-2m_v\right)-Z+\frac{2U}{m_v}\right)}$

由表2可知，当逼近阶$p \geqslant 4$，移位量m_v固定时，权重系数$\lambda_{m_v}^p$值是确定的，与运算阶α无关。但$l_{p,k}^{(\alpha)}$的计算复杂度随着逼近阶的增加而增大，$w_k^{(\alpha)}$求解效率随之降低，与本文快速计算求解的初衷不同，因此本文主要考虑$p=1$时组合误差最小的4–WSLD(−1,0,1,2)算子(“4–”表示算子的理论逼近阶，对于$p=1$，且误差最小的移位量组合$(m_1,m_2,m_3,m_4)=(-1,0,1,2)$)，得4–WSLD加权系数$w_k^{(\alpha)}$计算公式为：

$$\begin{cases} w_0^{(\alpha)}=\lambda_2^1 l_{1,0}^{(\alpha)}, & k=0 \\ w_1^{(\alpha)}=\lambda_2^1 l_{1,1}^{(\alpha)}+\lambda_1^1 l_{1,0}^{(\alpha)}, & k=1 \\ w_2^{(\alpha)}=\lambda_2^1 l_{1,2}^{(\alpha)}+\lambda_1^1 l_{1,1}^{(\alpha)}+\lambda_0^1 l_{1,0}^{(\alpha)}, & k=2 \\ w_k^{(\alpha)}=\lambda_2^1 l_{1,k}^{(\alpha)}+\lambda_1^1 l_{1,k-1}^{(\alpha)}+\lambda_0^1 l_{1,k-2}^{(\alpha)}+\lambda_{-1}^1 l_{1,k-3}^{(\alpha)}, & k\geqslant 3 \end{cases} \tag{14}$$

式(14)中，通过式(3)准确快速地计算$l_{1,k}^{(\alpha)}$，通过表2计算加权因子$\lambda_2^1,\lambda_1^1,\lambda_0^1,\lambda_{-1}^1$，从而能够快速得到高逼近精确度WSLD算子的加权系数$w_k^{(\alpha)}$。从频域角度对比验证了WSLD算子及加权系数$w_k^{(\alpha)}$分数阶微分有效性，并设计分数阶数字FIR滤波器。

2　分数阶微分数字滤波特性

取$t=a+n\eta$，则输入信号$x[n]=f(a+nh)$，输出信号为$y[n]$，从信号系统角度考虑分数阶运算的线性时不变特性，系统原理如图1所示。

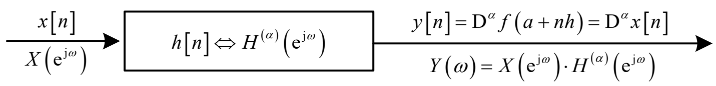


Fig.1 Schematic diagram of fractional differential system

图1　分数阶微分系统原理图

已知理想的分数α阶数字微分系统的滤波函数为[2]：

$$H^\alpha(e^{j\omega})=(j\omega)^\alpha=|\omega|^\alpha e^{j\frac{\alpha\pi}{2}sgn(\omega)}(|\omega|\leqslant\pi) \tag{15}$$

则系统单位脉冲响应为：

$$h^{(\alpha)}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{16}$$

显然，难以直接通过简单积分求得系统单位脉冲响应$h^{(\alpha)}[n]$，从而考虑利用分数阶微分算子来逼近理想微分频域特性，近似求解$h^{(\alpha)}[n]$。将WSLD算子与Al–Alaoui算子[16]、鲁比希算子进行比较，验证WSLD算子用于频域分析的有效性，从而设计数字滤波器。

2.1 典型的分数阶微分算子

2.1.1　Al–Alaoui算子

Al–Alaoui算子由Al–Alaoui根据梯形算子和矩形算子在高频处频域特征的互补特性提出，将这2种算子按照1:3比例结合，该算子较矩形算子和梯形算子在高频处具有更好的频域特性，其表达式为：

$$G_A^{(\alpha)}(z^{-1})=\left(8\times\frac{1-z^{-1}}{7+z^{-1}}\right)^\alpha \tag{17}$$

代入$z=e^{j\omega}$，Al–Alaoui算子分数阶滤波函数为：

$$G_A^{(\alpha)}(\omega)=\left(\frac{8j\sin\frac{\omega}{2}e^{-j\frac{\omega}{2}}}{4-j\sin\frac{\omega}{2}e^{-j\frac{\omega}{2}}}\right)^\alpha=(j\omega)^\alpha\left(1-\frac{3\alpha}{8}j\omega-\frac{9\alpha^2}{128}\omega^2+O(\omega^3)\right) \tag{18}$$

2.1.2　鲁比希算子

p阶逼近的分数阶鲁比希算子滤波器传递函数$G_L^{(\alpha)}(z^{-1})$为：

$$G_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}\left(z^{-1}\right)=\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i}\left(1-z^{-1}\right)^{i}\right)^{\alpha} \tag{19}$$

滤波函数 $G_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(\omega)$：

$$G_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(\omega)=\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{i}\left(2\mathrm{j}\sin\frac{\omega}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}}\right)^{i}\right)^{\alpha} \tag{20}$$

2.1.3 WSLD算子

WSLD系统传递函数 $G_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}\left(z^{-1}\right)$为：

$$G_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}\left(z^{-1}\right)=\sum_{i=1}^{4}\lambda_{m_i}z^{m_i}(1-z^{-1})^{\alpha} \tag{21}$$

滤波函数 $G_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(\omega)$为：

$$G_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(\omega)=\sum_{i=1}^{4}\lambda_{m_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega m_i}\left(2\mathrm{j}\sin\frac{\omega}{2}\right)^{\alpha}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha\frac{\omega}{2}} \tag{22}$$

2.2 滤波特性比较

式(18)、式(20)、式(22)中，当低频 $\omega\approx 0(\varpi\to-\infty)$时，$G_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}\omega$、$G_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(\omega)$、$G_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(\omega)$都能够近似理想分数阶频域响应$\left(\mathrm{j}\omega\right)^{\alpha}$，因此3种不同类型的算子在低频处都能很好地逼近理想分数阶微分的滤波特性。为评价各算子总体特性，利用式(23)计算其与理想分数阶滤波函数$H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)$的平均误差能量$\bar{E}$，$G_{\mathrm{op}}^{(\alpha)}(\omega)$表示不同算子的滤波函数。

$$\bar{E}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left|G_{\mathrm{op}}^{(\alpha)}(\omega)-H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)\right|^{2}\mathrm{d}\omega \tag{23}$$

计算结果如表3所示，运算阶$\alpha=0.1$、0.3、0.5、0.7、0.9、1.1、1.3、1.5、1.7、1.9。

表3 不同算子的平均误差能量

Table3 Mean error energy of different operators

α	mean error energy of amplitude response			mean error energy of phase response		
	4–WSLD	6–Lubich	Al–Alaoui	4–WSLD	6–Lubich	Al–Alaoui
0.1	6.84×10^{-4}	6.23×10^{-3}	5.65×10^{-5}	8.16×10^{-4}	1.51×10^{-3}	2.11×10^{-3}
0.3	9.92×10^{-3}	1.23×10^{-1}	7.50×10^{-4}	6.56×10^{-3}	1.36×10^{-2}	1.90×10^{-2}
0.5	4.18×10^{-2}	7.85×10^{-1}	3.09×10^{-3}	1.52×10^{-2}	3.78×10^{-2}	5.28×10^{-2}
0.7	1.17×10^{-1}	3.70×10^{0}	9.04×10^{-3}	2.16×10^{-2}	7.41×10^{-2}	1.04×10^{-1}
0.9	2.56×10^{-1}	1.53×10^{1}	2.24×10^{-2}	1.57×10^{-2}	1.22×10^{-1}	1.71×10^{-1}
1.1	3.94×10^{-1}	5.93×10^{1}	5.01×10^{-2}	1.58×10^{-2}	1.83×10^{-1}	2.56×10^{-1}
1.3	4.52×10^{-1}	2.22×10^{2}	1.05×10^{-1}	2.20×10^{-2}	2.55×10^{-1}	3.57×10^{-1}
1.5	4.73×10^{-1}	8.18×10^{2}	2.10×10^{-1}	1.56×10^{-2}	3.40×10^{-1}	4.75×10^{-1}
1.7	4.75×10^{-1}	2.98×10^{3}	4.07×10^{-1}	6.83×10^{-3}	4.37×10^{-1}	6.11×10^{-1}
1.9	4.78×10^{-1}	1.08×10^{4}	7.66×10^{-1}	8.64×10^{-4}	5.46×10^{-1}	7.63×10^{-1}

由表3可知，$G_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}\left(z^{-1}\right)$的幅频误差能量更小，$G_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}\left(z^{-1}\right)$相频误差能量更小。相较$G_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}\left(z^{-1}\right)$，这2种算子在整个运算阶$\alpha\in(0,2)$的误差能量更稳定，平均误差能量更小，但平均误差能量小并不意味着其频域逼近理想分数阶微分频域性能好。由此引入文献[17]中的4种逼近精确度$r_i(i=0,1,2,3)$：$i=0,r_0=1\%$超级逼近精确度；$i=1,r_1=5\%$一级逼近精确度；$i=2,r_2=10\%$二级逼近精确度；$i=3,r_3=20\%$三级逼近精确度以及4种逼近精确度情况下所定义的各项评价指标，进一步评价各算子分数阶运算的频域性能。为便于频域分析，令$\lg\omega/\pi=\varpi,\varpi\in(-\infty,0]$，则

$$\omega=10^{\varpi}\pi \tag{24}$$

对应理想分数阶幅频特性$\Lambda^{(\alpha)}(\varpi)=\lg A_{\alpha}(\varpi)=\lg\left|10^{\varpi}\pi\right|^{\alpha}=\alpha\varpi+\alpha\lg\pi$，相频特性$\Phi^{\alpha}(\varpi)=\phi_{\alpha}(\varpi)\times\pi/2=\alpha$。用$\Lambda_{\mathrm{op}}^{(\alpha)}(\varpi),\Phi_{\mathrm{op}}^{(\alpha)}(\varpi)$表示不同算子对应的取对数后的幅频特性和归一化后的相频特性，则幅频相对误差函数$r_{A,i}^{(\alpha)}(\varpi)$、相频相对误差函数$r_{\phi,i}^{(\alpha)}(\varpi)$为：

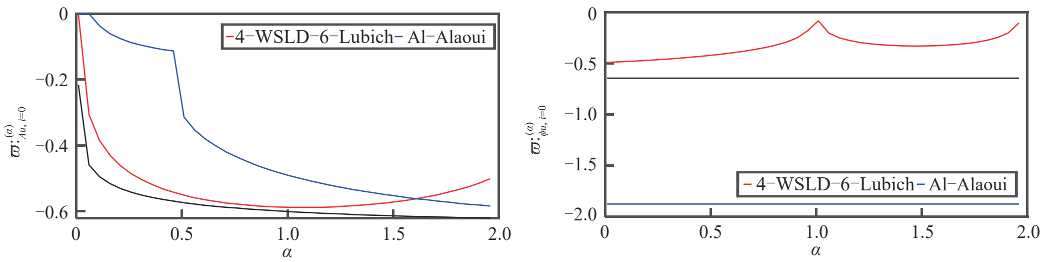
$$r_{A,i}^{(\alpha)}(\varpi)=\frac{\Lambda_{\mathrm{op}}^{(\alpha)}(\varpi)-\Lambda^{(\alpha)}(\varpi)}{\Lambda^{(\alpha)}(\varpi)}\times100\%,r_{\phi,i}^{(\alpha)}(\varpi)=\frac{\Phi_{\mathrm{op}}^{(\alpha)}(\varpi)-\Phi^{(\alpha)}(\varpi)}{\Phi^{(\alpha)}(\varpi)}\times100\%, \tag{25}$$

幅频逼近带宽指数 $B_{A,i}^{(\alpha)}(\varpi)$、相频逼近带宽指数 $B_{\phi,i}^{(\alpha)}(\varpi)$ 为：

$$B_{A,i}^{(\alpha)}(\varpi)=\varpi_{Au,i}^{(\alpha)}-\varpi_{Al,i}^{(\alpha)}, B_{\phi,i}^{(\alpha)}(\varpi)=\varpi_{\phi u,i}^{(\alpha)}-\varpi_{\phi l,i}^{(\alpha)}, \tag{26}$$

式中：$\varpi_{Au,i}^{(\alpha)}$、$\varpi_{\phi u,i}^{(\alpha)}$ 为频域上限逼近指数；$\varpi_{Al,i}^{(\alpha)}$、$\varpi_{\phi l,i}^{(\alpha)}$ 为频域下限逼近指数。

理想情况下，$\varpi_{Al,i}^{(\alpha)}$、$\varpi_{\phi l,i}^{(\alpha)}$ 为 $-\infty$，此时逼近带宽均为 ∞，无意义，因此需比较 $\varpi_{Au,i}^{(\alpha)}$、$\varpi_{\phi u,i}^{(\alpha)}$ 来评价逼近效果。图2给出各算子滤波函数在超逼近精确度 $(r_0=1\%)$ 情况下 $\varpi_{Au,i}^{(\alpha)}$、$\varpi_{\phi u,i}^{(\alpha)}$ 随运算阶的趋势变化图。从图2可以得到，$G_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 的 $\varpi_{Au,i}^{(\alpha)}$ 最优，$G_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 的 $\varpi_{\phi u,i}^{(\alpha)}$ 最优。



(a) amplitude frequency upper limit index　　(b) phase frequency upper limit index

Fig.2 Variation trend of frequency upper limit index with operation order α

图2　频率上限指标随运算阶α的变化趋势图

3　FIR数字分数阶微分滤波器设计

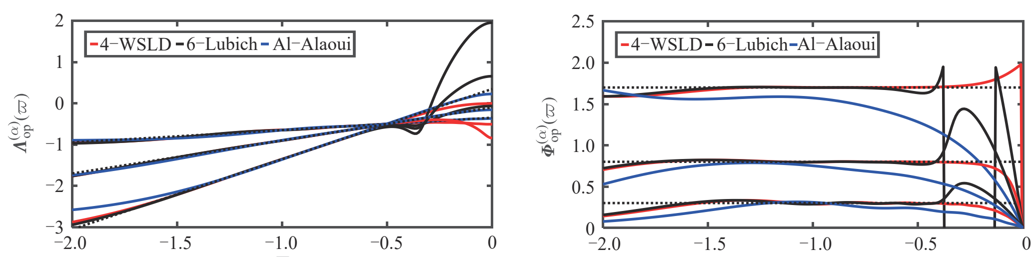
为实现FIR数字滤波器的设计，将 $G_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 因式分解，再利用因式与 $l_{1,k}^{\alpha}$ 生成函数的关系可展开为：

$$G_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})=\left(\frac{8}{7}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}l_{1,k}^{(\alpha)}z^{-k}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^{k}l_{1,k}^{(-\alpha)}z^{-k} \tag{27}$$

将上述滤波器传递函数截断为有限项，$h_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}[n]$ 对应Al–Alaoui分数阶数字FIR滤波器 $\bar{G}_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 系数为：

$$h_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}[n]=\left(\frac{8}{7}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{N}l_{1,k}^{(\alpha)}\left(-\frac{1}{7}\right)^{n-k}l_{1,n-k}^{(-\alpha)}, n=1,2,\cdots,N \tag{28}$$

$h_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}[n]$ 对应为截断后的 $l_{p,k}^{(\alpha)}$，$h_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}[n]\approx l_{p}^{(\alpha)}[n], n=1,2,\cdots,N$；$h_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}[n]$ 为截断后的 $w_{k}^{(\alpha)}$，$h_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}[n]\approx w^{(\alpha)}[n], n=1,2,\cdots,N$。取；$\alpha=0.3$、$0.8$、$1.7$；$N=10$；$\varpi\in(-2,0)$，分别绘制由 $G_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$G_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$G_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 设计的3种分数阶数字FIR滤波器 $\bar{G}_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$\bar{G}_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 频域特征曲线，如图3所示，黑色点线表示理想的分数频域特征曲线。



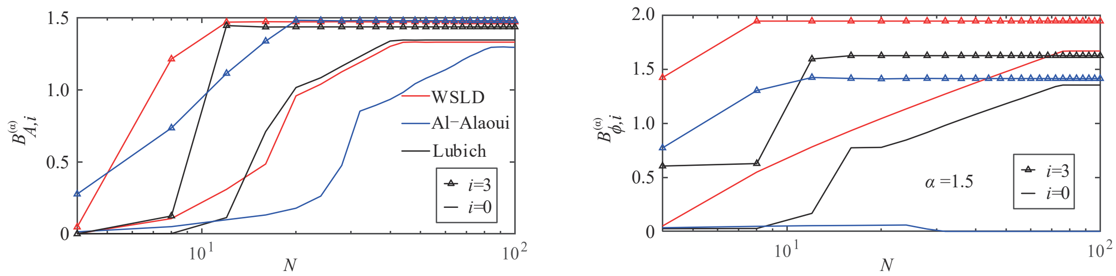
(a) amplitude–frequency characteristics of classical operator filters　　(b) phase–frequency characteristics of classical operator filters

Fig.3　The frequency–domain characteristic diagram of Al–Alaoui,WSLD and Lubich operator fractional FIR differentiators

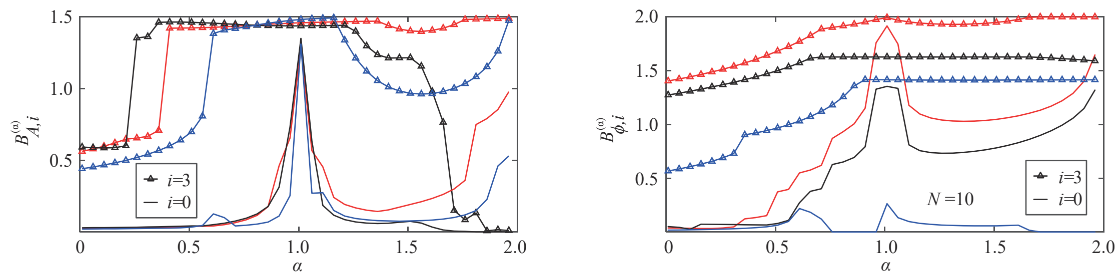
图3　设计的梯形、WSLD和鲁比希算子分数阶FIR微分器的频域特征波特图

图3中，$\bar{G}_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 的幅频逼近性能更好，$\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 的相频逼近性能更好。3种频域特征曲线的逼近误差主要集中在 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ 处。其中 $\omega=\pi$ 处误差主要由于算子在高频处的固有特性，截断会引起频域特征曲线在通带内以及阻带内产生频率波动——吉布斯效应，从而造成 $\omega=0$ 附近的逼近误差。运算阶 $|\alpha-1|$ 越小，分数阶数字FIR滤波器系数的衰减越快，频域能量主要集中在截断点数范围内 $(n\leq N)$，因而对应运算阶受截断效应影响更小。甚低阶 $\alpha\to0$ 或 $\alpha\to2$ 可通过增加滤波器阶数 来增加逼近带宽指数，减小逼近误差。为更加准确比较3种算子的优劣，以及观察频域逼近性能随 N 及 α 的变化情况，图4给出超逼近精确度及三级逼近精确度情况下，分别以 α,N 为自变量时的频域逼近带宽指数趋势图，其中红色、蓝色、黑色实线分别表示WSLD、Al–Alaoui、Lubich分数阶数

字 FIR 微分器。由图 4 可观察到，$\alpha=1.7$，N 足够大时，$\bar{G}_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$\bar{G}_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 对应的频域逼近性能都不再提升，达到理论频域逼近性能极限。对于 $i=3, r_3=20\%$，$\bar{G}_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$\bar{G}_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 的极限幅频带宽指数 $B_{A,3}^{(\alpha)}\approx 1.48$；$\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 的极限相频逼近带宽指数 $B_{\phi,3}^{(\alpha)}\approx 2$，而 $\bar{G}_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$B_{\phi,3}^{(\alpha)}\approx 1.5$、$\bar{G}_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$B_{\phi,3}^{(\alpha)}\approx 1.36$。由于系数 $w_k^{(\alpha)}$ 衰减最快，故 $\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 最先达到理论逼近极限。$N=10$ 时，3 种算子的逼近性能都在 $\alpha\to 1$ 时达到最优。$\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 在运算阶 $\alpha\in(1,2)$ 时，频域逼近性能明显优于另外 2 种算子，更适用于 $\alpha\in(1,2)$ 运算。



(a) amplitude frequency approximation bandwidth index with N (b) phase frequency approximation bandwidth index with N



(c) amplitude frequency approximation bandwidth index with α (b) phase frequency approximation bandwidth index with α

Fig.4 Approximation bandwidth exponents of Al−Alaoui, WSLD and Lubich fractional FIR differentiators change with operation order α and N

图4 WSLD、Al−Alaoui 和鲁比希滤波器逼近带宽指数随运算阶 α 和 N 变化趋势图

4 信号的分数阶微分运算

4.1 数字仿真验证

对分数阶微分器输入周期方波信号可以进行分数阶微分运算，图 5(a)~(d)分别为方波信号分数阶微分的解析解与通过分数阶数字 FIR 滤波器的运算结果[18−19]。

由图 5(a)~(d)可知，$\bar{G}_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$\bar{G}_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(z^{-1})$、$\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 对应计算结果与理想解析解的变化趋势相同，都能很好检测到方波信号边界。使用高逼近阶 $\bar{G}_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 滤波器得到的计算结果在边界处存在较大振荡；$\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 滤波器在边界处不会产生振荡，但其运算结果的信号跳变处有微小的漂移；$\bar{G}_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 算子的漂移程度较 $\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 小，但在信号跳变处振荡小于 $\bar{G}_{\mathrm{L}}^{(\alpha)}(z^{-1})$。这些振荡误差都可以通过增加滤波器阶数有效降低，具体应用中可根据实际需求选择对应的算子，在滤波器阶数不足、稳定性要求高时，最优选择为 $\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$。

利用 $\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 滤波器处理随机信号进一步证明其稳定性及有效性。由于无法求解随机信号分数阶微分的解析解，通过仿真比较随机信号理想分数阶运算后的频谱与 $\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 滤波器运算处理后的频谱来验证滤波的有效性。图 6 为随机信号通过 $\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 滤波器，运算阶 $\alpha=0.8$ 时，分数阶微分运算的结果示意图。可见，通过分数阶微分可以达到增强信号的效果。图 7 为频谱对比图，显然，$\bar{G}_{\mathrm{W}}^{(\alpha)}(z^{-1})$ 滤波器的滤波结果与理想情况一致。

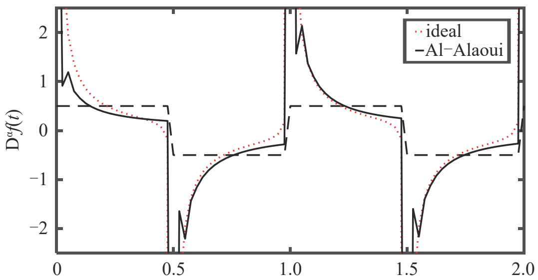
4.2 运算性能分析

设计分数阶 FIR 数字滤波器运算某一信号的分数阶微分主要包含两步：第一步，设计分数阶微分器冲激响应 $h^{(\alpha)}[n]$，即加权系数 $l_{p,k}^{(\alpha)}$、$w_k^{(\alpha)}$；第二步，将信号与 $h^{(\alpha)}[n]$ 进行卷积计算，其中 $h^{(\alpha)}[n]$ 计算为算法运算性能差异的主要原因。显然，计算系数复杂度与运算阶 α 无关，而与 N 和逼近阶 p 有直接关系。利用高精确度快速递推算法求解 $l_{p,k}^{(\alpha)}$ 的平均乘法复杂度 $C_{\mathrm{L}\times}$ 和加法复杂度 C_{L+} 如下：

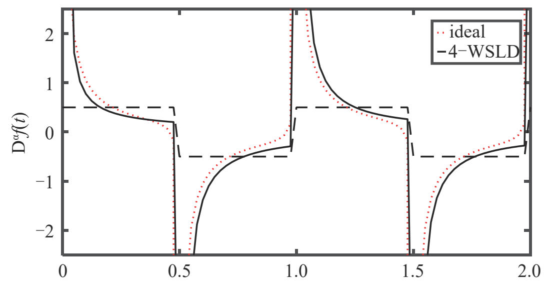
$$C_{\mathrm{L}\times}=\begin{cases}p(4p+3)+1, k>p\\ k(4p+3)+1, k\leqslant p\end{cases} \tag{29}$$

$$C_{\mathrm{L}+}=\begin{cases}p, k=0\\ 2k, k<p\\ 2p, k\geqslant p\end{cases} \tag{30}$$

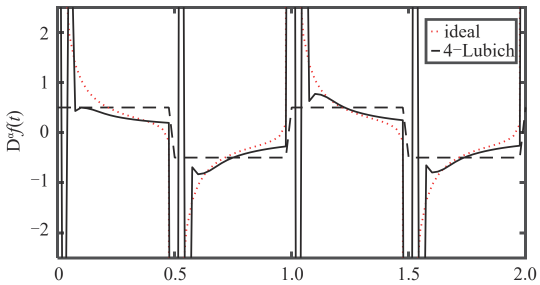
对式(14)中$l_{1,k}^{(\alpha)}$错位加权可计算$w_k^{(\alpha)}$，其平均乘法复杂度$C_{\mathrm{W}\times}=4$，加法复杂度$C_{W+}=3$。对于$h_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}[n]$，式(28)中计算平均复杂度$C_{\mathrm{A}\times}=3k$，$C_{\mathrm{A}+}=k$。使用处理器Intel(R) Core(TM) i3-9100，主频3.60 GHz，内存8G的计算机，计算$h_{\mathrm{A}}^{(\alpha)}[n]$、$l_{p,k}^{(\alpha)}$、$w_k^{(\alpha)}$平均所消耗的时间如表4所示，结果保留4位小数。



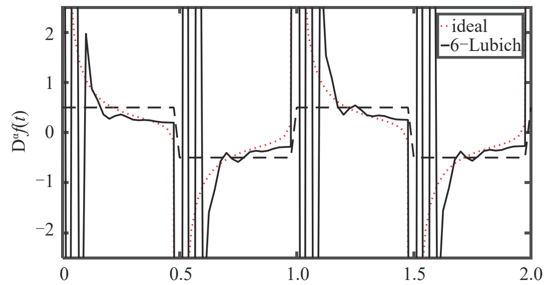
(a) use the Al-Alaoui differentiator to differentiate with α=0.8



(b) use the 4-WSLD differentiator to differentiate with α=0.8



(c) use the 4-Lubich differentiator to differentiate with α=0.8



(d) use the 6-Lubich differentiator to differentiate with α=0.8

Fig.5 Fractional differential results of square wave signal

图5　信号分数阶微分结果

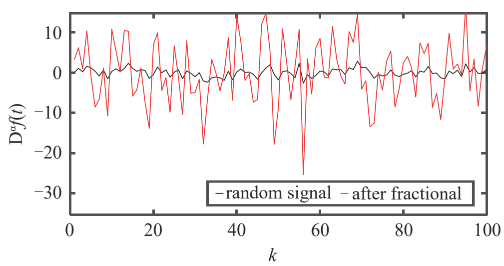
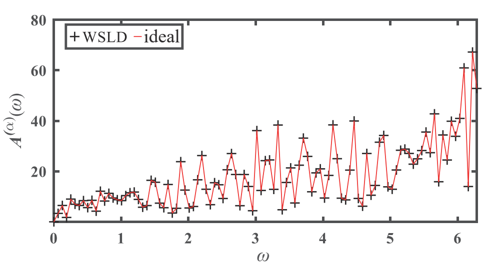
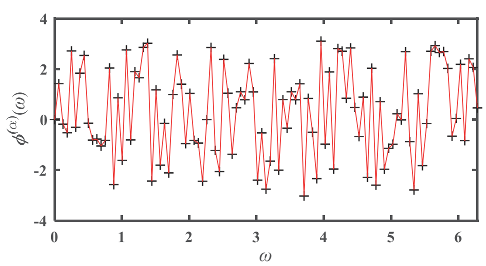


Fig.6 Calculation results of random signal passing through WSLD filter

图6　随机信号通过WSLD滤波器的运算结果



(a) amplitude spectrum



(b) phase spectrum

Fig.7 Gaussian random signal spectrogram after fractional differential operation

图7　经过分数阶微分运算的高斯随机信号频谱图

综上，利用WSLD算子所设计的分数阶数字FIR滤波器相较鲁比希算子及Al-Alaoui算子的运算稳定性更高，

且计算速度相比 $G_L^{(\alpha)}(z^{-1})$ 提高了2~3个数量级，可以很好地用于信号的分数阶处理。

表4 运算消耗的平均时长

Table4 The average elapsed time of the operation

	t/s			
	$l_{4,k}^{(\alpha)}$(Recur)	$l_{6,k}^{(\alpha)}$(Recur)	$w_k^{(\alpha)}$	$h_A^{(\alpha)}[n]$
$N=10$	8.57×10^{-1}	8.20×10^{-1}	2.20×10^{-3}	2.70×10^{-3}
$N=100$	1.15×10^{0}	1.19×10^{0}	1.90×10^{-3}	3.30×10^{-3}
$N=1\,000$	4.04×10^{0}	4.38×10^{0}	2.20×10^{-3}	7.62×10^{-2}
$N=10\,000$	3.89×10^{1}	4.05×10^{1}	4.10×10^{-3}	6.07×10^{0}

5 结论

标准G-L分数阶微分定义式是计算分数阶微分的常用数值算法，通过傅里叶变换及泰勒级数展开验证鲁比希算子的逼近阶，并提出一类新的4阶WSLD算子。再从信号处理角度分析WSLD算子频域特性，并与Al-Alaoui算子、鲁比希算子等典型分数阶算子比较，发现WSLD算子的频域逼近能力更好，可调节性强，计算复杂度低，效率高。但还存在高频处频域逼近误差大的缺点，如何应用WSLD算子到信号分析的其他领域还有如下值得深入研究的问题：

1) 基于WSLD算子分数阶数字FIR/IIR积分器的设计与讨论。

2) 如何提高WSLD算子在甚低阶($\alpha\to0$)的频域特性，以及如何减小高频处的逼近误差。

3) WSLD针对其他分数阶微积分定义如Caputo、Feller、Riesz等定义的分析及工程应用。

参考文献：

[1] PODLUBNY I. 分数微积分:理论基础与应用导论[M]. 袁晓,译. 北京:电子工业出版社, 2021. (PODLUBNY I. Fractional differential equations:an introduction to fractional derivatives,fractional differential equations,to methods of their solution and some of their applications[M]. Translated by YUAN Xiao. Beijing:Publishing House of Electronics Industry, 2021.)

[2] 袁晓,张红雨,虞厥邦. 分数导数与数字微分器设计[J]. 电子学报, 2004,32(10):1658-1665. (YUAN Xiao,ZHANG Hongyu,YU Juebang. Fractional-order derivative and design of fractional digital differentiators[J]. Acta Electronica Sinica, 2004,32(10):1658-1665.)

[3] 黄晓晴,于盛林. 分数微积分用于分形压缩图像嵌入灰度水印[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2010,8(6):702-707. (HUANG Xiaoqing,YU Shenglin. Using fractional calculus to embed gray image as watermark into fractal compressed image[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2010,8(6):702-707.)

[4] LUBICH C. Discretized fractional calculus[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1986,17(3):704-719.

[5] 周宇,袁晓,张月荣. 基于IFFT的Lubich数字分数微分器系数的快速算法[J]. 太赫兹科学与电子信息学报, 2022,20(6):608-617. (ZHOU Yu,YUAN Xiao,ZHANG Yuerong. Fast algorithm based on IFFT for computing fractional Lubich coefficient of digital fractional differentiator[J]. Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology, 2022,20(6):608-617.)

[6] 白鹭,薛定宇. 分数阶微积分的高精度递推算法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2018,39(4):604-608. (BAI Lu,XUE Dingyu. High precision recursive algorithm for computing fractional-order derivative and integral[J]. Journal of Northeastern University (Natural Science Edition), 2018,39(4):604-608.)

[7] 薛定宇. 分数阶微积分学与分数阶控制[M]. 北京:科学出版社, 2018. (XUE Dingyu. Fractional calculus and fractional-order control[M]. Beijing:Science Press, 2018.)

[8] 王怡丹,袁晓. 高阶逼近Grünwald-Letnikov分数阶加权系数的快速算法[J]. 信息技术, 2020,44(5):86-90. (WANG Yidan, YUAN Xiao. Fast algorithms for fractional Grünwald-Letnikov weighting coefficients with high-order approximation[J]. Information Technology, 2020,44(5):86-90.)

[9] MEERSCHAERT M M,TADJERAN C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004,172(1):65-77.

[10] TIAN Wenyi,ZHOU Han,DENG Weihua. A class of second order difference approximations for solving space fractional diffusion equations[J]. Mathematics of Computation, 2015,84(294):1703-1727.

[11] NASIR H M,GUNAWARDANA B L K,ABEYRATHNA H M N P. A second order finite difference approximation for the fractional diffusion equation[J]. International Journal of Applied Physics & Mathematics, 2013,3(4):237-243.

(下转第670页)