

不确定性关联大系统的分散鲁棒状态反馈 H_∞ 控制

甘永梅 王兆安

(西安交通大学工业自动化系·西安, 710049)

摘要: 研究同时存在系统矩阵、控制输入矩阵的不确定和系统关联不确定变化以及外界干扰的关联大系统的分散 H_∞ 控制问题, 提出一种较为全面的局部状态反馈分散 H_∞ 控制器的设计方法. 局部控制器的求解只需递推地利用一系列局部代数 Riccati 方程. 最后通过实例表明该方法的有效性.

关键词: 关联大系统; 分散 H_∞ 控制; 局部状态反馈; 代数 Riccati 方程

文献标识码: A

Decentralized State Feedback Robust H_∞ Control Design for Uncertain Interconnected Large-Scale Systems

GAN Yongmei and WANG Zhao'an

(Department of Industrial Automation, Xi'an Jiaotong University · Xi'an, 710049, P.R. China)

Abstract: Under the condition that system matrix uncertainties, control input matrix uncertainties, interconnection uncertainties and external disturbance exist at the same time, the problem of decentralized H_∞ controls for interconnected large-scale systems is researched, and a complete design approach of constructing local state feedback decentralized H_∞ controller is proposed. The solution to local controllers is carried out merely by iteratively solving a set of local algebraic Riccati equations. Finally the effectiveness of the approach is verified by example.

Key words: interconnected large-scale systems; decentralized H_∞ control; local state feedback; algebraic Riccati equations

1 引言 (Introduction)

近年来大系统的分散控制引起了人们的极大关注. 其部分原因是分散控制方法可以简化系统设计及实现, 减少在线运算时间. 通过把高阶大系统分解为若干低阶子系统, 可以对各子系统进行独立设计, 从而得到较为简单的控制律. H_∞ 控制领域取得了令人瞩目的成就^[1]. 但关于关联大系统的分散 H_∞ 控制的研究还不多见. 文献[2]虽在时域中, 基于 H_∞ 理论对关联大系统提出了一种局部状态反馈分散控制器的设计方法. 但未考虑输入矩阵同时存在参数不确定的情况. 文献[3]考虑到关联不确定性, 设计了状态反馈分散 H_∞ 控制器. 缺点是没有考虑系统状态矩阵和输入矩阵的不确定性. 本文在文献[2]和文献[3]的基础上, 对同时存在系统矩阵、控制输入矩阵的不确定和系统关联不确定变化以及外界干扰的关联大系统提出一种较为全面的局部状态反馈分散 H_∞ 控制器的设计方法.

2 问题描述 (Problem description)

考虑状态完全可得的不确定性关联系统, 它是由 N 个子系统 $S_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 组成的关联大系统 S .

$$S_i: \begin{cases} \dot{x}_i(t) = (A_i + \Delta A_i(t))x_i(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N (A_{ij} + \Delta A_{ij}(t))x_j(t) + D_i w_i(t), \\ z_i(t) = T_i x_i(t) + S_i u_i(t), \\ i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

其中 $x_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $u_i(t) \in \mathbb{R}^m$, $w_i(t) \in \mathbb{R}^p$ 分别为第 i 个子系统的状态向量、控制输入向量和外界干扰输入向量. $z_i(t) \in \mathbb{R}^q$ 为第 i 个子系统的控制输出向量. $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和 $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 分别是名义系统的系统矩阵和控制输入矩阵.

假设 1 令

$$A_j + \Delta A_j(t) = M_i(t)F_j(t)H_j(t), i \neq j, (2)$$

$$G_i(t) \triangleq [F_{i1}(t) F_{i2}(t) \cdots F_{i,i-1}(t) \\ F_{i,i+1}(t) \cdots F_{iN}(t)] \in \Theta_i, (3)$$

其中 $M_i \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $H_j \in \mathbb{R}^{l \times n}$ 表征关联的结构, Θ_i 集合定义为

$$\Theta_i = \{\theta_i \mid \theta_i^T \theta_i \leq I, \theta_i \text{ 的元素 Lebesgue 可测}\}, \\ \text{也就是说 } G_i(t) \text{ 满足 } G_i^T(t)G_i(t) \leq I, \Delta A_i, \Delta B_i \text{ 为} \\ \text{下不确定性矩阵, 满足} \\ [\Delta A_i(t) \Delta B_i(t)] = L_i(t)F_i(t)[E_{1i}(t) E_{2i}(t)], (4)$$

$F_i(t) \in \Theta_i$, 即 $F_i^T(t)F_i(t) \leq I$, 其中 L_i, E_{1i}, E_{2i} 为已知定常矩阵.

假设 2 对所有 $i = 1, 2, \dots, N$, $C_i = I$ 且 (A_i, B_i) 可控.

假设 3 $S_i^T[T_i; S_i] = [0; I]$.

对于式(1)所示的不确定性关联大系统, 采用局部状态反馈控制

$$u_i(t) = K_i x_i(t). (5)$$

定义 1 给定一常数 $\gamma > 0$. 如果存在一局部状态反馈控制器 $u_i(t) = K_i x_i(t)$, 使得对所有 $i = 1, 2, \dots, N$, 下列条件满足:

a) 矩阵 $\hat{A} = A + \Delta A + (B + \Delta B)K$ 为稳定矩阵, 就是说矩阵 $\hat{A}$ 的特征值均在左半平面. 其中

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_2 & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_N \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} \Delta A_1 & \Delta A_{12} & \cdots & \Delta A_{1N} \\ \Delta A_{21} & \Delta A_2 & \cdots & \Delta A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta A_{N1} & \Delta A_{N2} & \cdots & \Delta A_N \end{bmatrix},$$

$$B = \text{diag}[B_1, B_2, \dots, B_N],$$

$$\Delta B = \text{diag}[\Delta B_1, \Delta B_2, \dots, \Delta B_N],$$

$$K = \text{diag}[K_1, K_2, \dots, K_N].$$

b) 闭环系统是渐近稳定的, 且闭环传递矩阵

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + Dw(t), \\ z(t) = (T + SK)x(t), \\ G(s) = (T + SK)(sI - \hat{A})^{-1}D \end{cases} (6)$$

满足 $\|G(s)\|_\infty \leq \gamma$. 这里 $\hat{A} = A + \Delta A + (B + \Delta B)K$, $T = \text{diag}[T_1, T_2, \dots, T_N]$, $S = \text{diag}[S_1, S_2, \dots, S_N]$, $D = \text{diag}[D_1, D_2, \dots, D_N]$, 则称整个关联

大系统(1)是带 H_∞ 指标 γ 分散稳定的.

3 关联大系统分散鲁棒状态反馈 H_∞ 控制 (Decentralized state feedback robust H_∞ control for interconnected large-scale systems)

定义 2 令 $Q_i > 0$ 为给定的正定矩阵且令常数 $\gamma > 0$. 如果存在常数 $\eta_i > 0$ 和 $\epsilon_i > 0$ 使得如下方程有对称正定解 P_i , 则称关联系统满足局部代数 Riccati 方程.

$$\begin{aligned} & A_i^T P_i + P_i A_i + \gamma^{-2} P_i D_i D_i^T P_i + \epsilon_i P_i L_i L_i^T P_i - \\ & (P_i B_i + \frac{1}{\epsilon_i} E_{1i}^T E_{2i}) R_i^{-1} (P_i B_i + \frac{1}{\epsilon_i} E_{1i}^T E_{2i})^T + \\ & \frac{1}{\epsilon_i} E_{1i}^T E_{1i} + T_i^T T_i + \eta_i P_i M_i M_i^T P_i + \\ & \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{\eta_j} \right) H_i^T H_i + Q_i = 0. \end{aligned} (7)$$

引理 1^[3] 给定任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $y \in \mathbb{R}^m$, 则

$$\max \{x^T D v(\sigma) G y\}^2 : \|v(\sigma)\| \leq 1 = x^T D D^T x y^T G^T G y. (8)$$

其中 $D, v(\sigma), G$ 为适当维数的矩阵, 且 $\|\cdot\|$ 代表欧几里德范数.

引理 2^[2] 对于任意适当维数的矩阵 X, Y 和 Z , 且 $Y > 0$, 则有

$$X^T Y X + X^T Z + Z^T X + Z^T Y^{-1} Z \geq 0. (9)$$

定理 1 给定一常数 $\gamma > 0$. 若存在常数 $\eta_i > 0$ 和 $\epsilon_i > 0$ 使得下列局部代数 Riccati 方程

$$\begin{aligned} & A_i^T P_i + P_i A_i - (P_i B_i + \frac{1}{\epsilon_i} E_{1i}^T E_{2i}) R_i^{-1} \cdot \\ & (P_i B_i + \frac{1}{\epsilon_i} E_{1i}^T E_{2i})^T + \gamma^{-2} P_i D_i D_i^T P_i + \\ & \epsilon_i P_i L_i L_i^T P_i + \frac{1}{\epsilon_i} E_{1i}^T E_{1i} + T_i^T T_i + \eta_i P_i M_i M_i^T P_i + \\ & \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{\eta_j} \right) H_i^T H_i + Q_i = 0 \end{aligned} (10)$$

有正定对称解 P_i , 则关联大系统(1)是带 H_∞ 指标 γ 分散稳定的, 分散状态反馈控制为

$$u_i(t) = K_i x_i(t), (11)$$

而

$$K_i = -R_i^{-1} (B_i^T P_i + \frac{1}{\epsilon_i} E_{2i}^T E_{1i}). (12)$$

其中

$$R_i = I + \frac{E_{2i}^T E_{2i}}{\epsilon_i}. (13)$$

反之亦然. 如果存在常数 $\gamma > 0$ 使得关联大系统(1)是带 H_∞ 指标 γ 分散稳定的, 则关联大系统(1)必满

足代数 Riccati 方程(10). 证明见附录.

定理 1 给出了不确定关联系统带 H_∞ 指标 γ 分散稳定的充分和必要条件. 通过此定理, 我们可以建立 H_∞ 控制理论和分散控制器设计的紧密关系, 使得干扰对整个系统的影响降低到允许的程度. 可以看到这样的局部控制器利用一系列局部代数 Riccati 方程, 因此只需要一个递推算法来解决这些方程.

4 实例(Illustration)

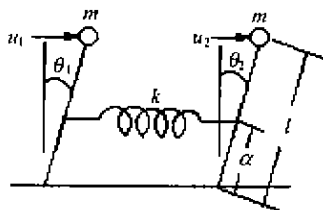


图 1 倒立摆系统

Fig. 1 Inverted pendulum system

考虑如图 1 所示的耦合双倒立摆系统. 两倒立摆系统由弹簧连接, 弹簧安装点位置为 a , 其弹性系数为 k , 两小球质量均为 m , 摆杆长度为 l , 令 $x_i = [\theta_i, \dot{\theta}_i]^T$, 则系统运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{ka^2}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{ka^2}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} x_2, \\ \dot{x}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{ka^2}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{ka^2}{ml^2} & 0 \end{bmatrix} x_1. \end{aligned}$$

取系统参数 $l = 0.34\text{m}$, $g = 9.8\text{m/s}^2$, $a = 0.08\text{m}$, $m = 0.07025\text{kg}$. 为方便研究, 假设弹簧的弹性系数 k 摄动 $k = k' + \Delta k$, $k' = 0.1\text{N/m}$, 则系统运动方程可表示为:

$$\dot{x}_i(t) = [A_i + \Delta A_i(t)]x_i(t) + [B_i + \Delta B_i(t)]u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N [A_{ij} + \Delta A_{ij}(t)]x_j(t) + D_i(t)w_i(t).$$

其中

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.94 & 0 \end{bmatrix}, B_i = [0 \quad 123.14]^T,$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7.88 & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2).$$

初始条件为

$$x_1(0) = [0.01 \quad 0]^T, x_2(0) = [-0.01 \quad 0]^T.$$

首先可验证此系统满足本文中的 3 个假设条件, 同样也不难验证系统中的不确定项满足匹配条件. 为使系统获得较好的性能指标, 经过反复调整, 最终取 $Q = 8I$, $\epsilon_1 = 0.15$, $\epsilon_2 = 0.06$, 然后求解 Riccati 方程(10)得到正定解

$$P_1 = \begin{bmatrix} 8.13 & 15.52 \\ 15.52 & 4.82 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 10.42 & 7.52 \\ 4.86 & 14.91 \end{bmatrix}.$$

则由式(12), 可得控制律为

$$u_1(t) = [5.5491 \quad 4.6309]x_1,$$

$$u_2(t) = [6.0376 \quad 9.7893]x_2.$$

由此得到的闭环系统最终稳定. 此时 $\gamma = 0.9714$.

图 2(a) 给出了子系统的状态 x_1, x_2 的变化曲线. 图 2(b) 给出了分散控制输入 u_1, u_2 的变化曲线.

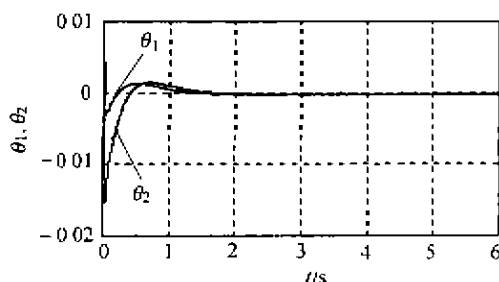


图 2(a) 系统响应

Fig. 2(a) System response

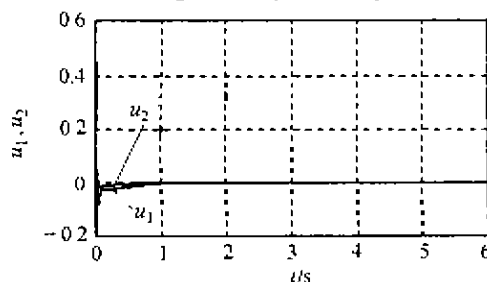


图 2(b) 控制输入

Fig. 2(b) Control input

5 结束语(Conclusion)

本文对同时存在系统矩阵、控制输入矩阵的不确定和系统关联不确定变化以及外界干扰的关联大系统提出一种较为全面的局部状态反馈分散 H_∞ 控制器的设计方法. 利用此法求出的分散控制律, 不仅保证闭环系统渐近稳定, 而且能使从扰动输入到被控输出的闭环传递矩阵的 H_∞ 范数小于给定的扰动变小常数, 并对系统参数的不确定性具有鲁棒性.

参考文献(References)

- [1] Xie L and Souza C E D. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1992, 37(8): 1188 - 1191
- [2] Hu Shousong, Fan Cunhai, Hu Weili, et al. Decentralized robust control for interconnected large-scale systems based on H_∞ theory [J]. Acta Automatica Sinica, 1994, 20(3): 356 - 359 (in Chinese)
- [3] Cheng C F, Wang W J and Lin Y P. Decentralized H_∞ controller design for large-scale systems [J]. Int. J. Systems Science, 1994, 25(1): 83 - 95

- [4] Cheng C C. Disturbances attenuation for interconnected systems by decentralized control [J]. Int. J. Control, 1997, 66(2): 213-224

附录

定理 3.1 的证明(Appendix)

先证充分性. 闭环系统状态矩阵

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \bar{A} + \Delta A + (B + \Delta B) = \\ &\bar{A} + LFE_1 + A_{\text{off}} - [B + LFE_2]R^{-1} \cdot \\ &[B^T P + \text{diag}[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I] E_2^T E_1], \\ \hat{B} &= D, \hat{C} = T + SK.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}L &= \text{diag}[L_1, L_2, \dots, L_N], \\ E_1 &= \text{diag}[E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1N}], E_2 = \text{diag}[E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2N}], \\ P &= \text{diag}[P_1, P_2, \dots, P_N], F = \text{diag}[F_1, F_2, \dots, F_N], \\ A_{\text{off}} &= \\ &\begin{bmatrix} 0 & A_{12} + \Delta A_{12} & \dots & A_{1N} + \Delta A_{1N} \\ A_{21} + \Delta A_{21} & 0 & \dots & A_{2N} + \Delta A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N-1,1} + \Delta A_{N-1,1} & \dots & 0 & A_{N-1,N} + \Delta A_{N-1,N} \\ A_{N1} + \Delta A_{N1} & \dots & A_{N,N-1} + \Delta A_{N,N-1} & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{NN} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}A_{\text{off}}^T P + PA_{\text{off}} &= \\ \text{diag}[\eta_1 I, \dots, \eta_N I] PMM^T P + \\ \text{diag}\left[\left(\frac{1}{\eta_2} + \dots + \frac{1}{\eta_N}\right) I, \dots, \left(\frac{1}{\eta_1} + \dots + \frac{1}{\eta_{N-1}}\right) I\right] H^T H,\end{aligned}\quad (\text{A1})$$

而

$$\begin{aligned}\hat{A}^T P + P\hat{A} &= \\ \bar{A}^T P + P\bar{A} - 2PBR^{-1}B^T P - \\ \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] PBR^{-1}E_2^T E_1 - \\ \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] E_1^T E_2 R^{-1}B^T P + Y + A_{\text{off}}^T P + PA_{\text{off}}.\end{aligned}\quad (\text{A2})$$

其中

$$\begin{aligned}Y &= PLFE_1 + E_1^T F^T L^T P - PLFE_2 R^{-1}B^T P - \\ \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] PLFE_2 R^{-1}E_2^T E_1.\end{aligned}$$

若令

$$X = E_1 - E_2 R^{-1}B^T P - \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] E_2 R^{-1}E_2^T E_1,$$

则 $Y = PLFX + X^T F^T L^T P$, 根据引理 3.2 可得

$$\begin{aligned}Y &\leq \text{diag}[\epsilon_1 I, \epsilon_2 I, \dots, \epsilon_N I] PLL^T P + \\ \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \frac{1}{\epsilon_2} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] X^T X.\end{aligned}$$

考虑到

$$\text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \frac{1}{\epsilon_2} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] R^{-1}E_2^T E_2 R^{-1} = R^{-1} - R^{-2},$$

而

$$\begin{aligned}Y + K^T K &\leq \text{diag}[\epsilon_1 I, \epsilon_2 I, \dots, \epsilon_N I] PLL^T P + \\ \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] E_1^T E_1 + PBR^{-1}B^T P - \\ \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] E_1^T E_2 R^{-1}E_2^T E_1.\end{aligned}\quad (\text{A3})$$

由假设 3, 知 $S^T T = 0, S^T S = I$, 所以

$$\begin{aligned}(T + SK)^T (T + SK) &= \\ T^T T + (SK)^T T + T^T SK + (SK)^T SK = \\ T^T T + K^T K.\end{aligned}\quad (\text{A4})$$

将(A1), (A4), (A2), (A3)代入整理得,

$$\begin{aligned}\hat{A}^T P + P\hat{A} + \gamma^{-2}P\hat{B}\hat{B}^T P + \hat{C}^T \hat{C} &\leq \\ \bar{A}^T P + P\bar{A} + \gamma^{-2}PDD^T P + T^T T + K^T K - \\ \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] PBR^{-1}E_2^T E_1 - \\ 2PBR^{-1}B^T P - \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] \cdot \\ E_1^T E_2 R^{-1}B^T P + Y + A_{\text{off}}^T P + PA_{\text{off}} &\leq \\ \bar{A}^T P + P\bar{A} + \gamma^{-2}PDD^T P + T^T T + \\ \text{diag}[\epsilon_1 I, \epsilon_2 I, \dots, \epsilon_N I] PLL^T P - \\ (PB + \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] E_1^T E_2) R^{-1} \cdot \\ (PB + \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] E_1^T E_2)^T + \\ \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] E_1^T E_1 + \text{diag}[\eta_1 I, \dots, \eta_N I] PMM^T P + \\ \text{diag}\left[\left(\frac{1}{\eta_2} + \dots + \frac{1}{\eta_N}\right) I, \dots, \left(\frac{1}{\eta_1} + \dots + \frac{1}{\eta_{N-1}}\right) I\right] H^T H.\end{aligned}$$

代入式(10), 可得

$$\begin{aligned}\hat{A}^T P + P\hat{A} &\leq \\ -\gamma^{-2}PDD^T P - T^T T - \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] E_1^T E_1 - \\ \text{diag}[\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N] PLL^T P - \text{diag}[\eta_1 I, \dots, \eta_N I] PMM^T P - \\ \text{diag}\left[\left(\frac{1}{\eta_2} + \dots + \frac{1}{\eta_N}\right) I, \dots, \left(\frac{1}{\eta_1} + \dots + \frac{1}{\eta_{N-1}}\right) I\right] H^T H - \\ (PB + \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] E_1^T E_2) R^{-1} (PB + \\ \text{diag}\left[\frac{1}{\epsilon_1} I, \dots, \frac{1}{\epsilon_N} I\right] E_1^T E_2)^T - Q \leq 0.\end{aligned}\quad (\text{A5})$$

因此, $\hat{A}^T P + P\hat{A}$ 矩阵是负定的. 所以 $\hat{A}$ 是稳定矩阵. 更进一步, 从式(A5)得

$$\hat{A}^T P + P\hat{A} + \gamma^{-2}PDD^T P + (T + SK)^T (T + SK) \leq 0,$$

即 $\|G(s)\|_{\infty} \leq \gamma$.

必要性的证明. 假定关联大系统(1)是带 H_{∞} 指标 γ 稳定的, 即存在一正定矩阵 P 使得

$$\hat{A}^T P + P\hat{A} + \gamma^{-2}PDD^T P + (T + SK)^T (T + SK) \leq 0.$$

由假设 3, 可将上式简化为

$$\hat{A}^T P + P\hat{A} + \gamma^{-2}PDD^T P + T^T T + K^T K \leq 0.$$

令

$$\begin{aligned} Z = & \text{diag}[A_1 + B_1 K_1, \dots, A_N + B_N K_N]^T P + \\ & P \text{diag}[A_1 + B_1 K_1, \dots, A_N + B_N K_N]^T + \\ & \gamma^{-2} P D D^T P + T^T T + K^T K \leq \\ & - A_{\text{eff}}^T P - P A_{\text{eff}} - [L F(E_1 + E_2 K)]^T P - \\ & P [L F(E_1 + E_2 K)]. \end{aligned}$$

注意到必要性的证明与文献[4]中定理 1 的必要性的证明相类似,对照之下,可看出此式不同之处是多了不等式右边的后两项,则有

$$\begin{aligned} x^T Z x \leq & -x^T A_{\text{eff}}^T P x - x^T P A_{\text{eff}} x - x^T [L F(E_1 + \\ & E_2 K)]^T P x - x^T P [L F(E_1 + E_2 K)] x \leq \\ & -2x^T P A_{\text{eff}} x - 2x^T P [L F(E_1 + E_2 K)] x. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} 4 \max \{ & [x^T P L F(t)(E_1 + E_2 K)x]^2; F^T(t) F(t) \leq I \} = \\ & 4x^T P L L^T P x x^T (E_1 + E_2 K)^T (E_1 + E_2 K) x. \end{aligned}$$

利用引理 3.1,可得

$$[x^T (Z + 2 P M I_1 H) x]^2 >$$

$$4x^T \begin{bmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1N}^T \end{bmatrix} M_1 M_1^T [P_{11} \quad \dots \quad P_{1N}^T] x \times$$

$$\begin{aligned} & v_1^T \text{diag}[H_2, \dots, H_N] \text{diag}[H_2, \dots, H_N] v_1 + \\ & 4x^T P L L^T P x x^T (E_1 + E_2 K)^T (E_1 + E_2 K) x = \end{aligned}$$

$$4x^T \begin{bmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1N}^T \end{bmatrix} M_1 M_1^T [P_{11} \quad \dots \quad P_{1N}^T] x x^T \cdot$$

$$\begin{aligned} & \text{diag}[0 \quad H_2, \dots, H_N]^T \text{diag}[0 \quad H_2, \dots, H_N] x + \\ & 4x^T P L L^T P x x^T (E_1 + E_2 K)^T (E_1 + E_2 K) x. \end{aligned}$$

利用 Petersen(1987b) Lemma A.4, 存在常数 η_i 和 $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, N$ 使得

$$Z + \eta_1 \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} \\ \vdots \\ \bar{P}_{1N}^T \end{bmatrix} M_1 M_1^T [\bar{P}_{11} \quad \dots \quad \bar{P}_{1N}] +$$

$$\eta_2 \begin{bmatrix} \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{22} \\ \vdots \\ \bar{P}_{2N}^T \end{bmatrix} M_2 M_2^T [\bar{P}_{12}^T \quad \bar{P}_{22} \quad \dots \quad \bar{P}_{2N}] + \dots + \eta_N \begin{bmatrix} \bar{P}_{1N} \\ \vdots \\ \bar{P}_{N-1,N}^T \\ \bar{P}_{NN} \end{bmatrix}.$$

$$M_N M_N^T [\bar{P}_{1N}^T \quad \dots \quad \bar{P}_{N-1,N}^T \quad \bar{P}_{NN}] +$$

$$\text{diag} \left[\left(\frac{1}{\eta_2} + \dots + \frac{1}{\eta_N} \right) H_1^T H_1, \dots, \left(\frac{1}{\eta_1} + \dots + \frac{1}{\eta_{N-1}} \right) H_N^T H_N \right] +$$

$$\text{diag}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N] P L L^T P + \text{diag} \left[\frac{1}{\varepsilon_1}, \dots, \frac{1}{\varepsilon_N} \right] (E_1 +$$

$$E_2 K)^T (E_1 + E_2 K) < 0.$$

根据

$$\begin{aligned} Z = & \text{diag}[A_1 + B_1 K_1, \dots, A_N + B_N K_N]^T P + \\ & P \text{diag}[A_1 + B_1 K_1, \dots, A_N + B_N K_N]^T + \\ & \gamma^{-2} P D D^T P + T^T T + K^T K, \end{aligned}$$

存在 $P_u = P_u^T$ 使得

$$(A_i + B_i K_i)^T P_u + P_u (A_i + B_i K_i) + \gamma^{-2} P_u^T D_i D_i^T P_u +$$

$$\varepsilon_i P_u L_i L_i^T P_u + T_i^T T_i + K_i^T K_i + \frac{1}{\varepsilon_i} (E_{1i}^T E_{1i} +$$

$$E_{2i}^T E_{2i} K_i + K_i^T E_{2i}^T E_{1i} + K_i^T E_{2i}^T E_{2i} K_i) +$$

$$\left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{\eta_j} \right) H_i^T H_i + \eta_i P_u M_i M_i^T P_u <$$

$$- \sum_{j=1, j \neq i}^N \eta_j P_u M_j M_j^T P_u \leq 0.$$

则将 $K_i = -R_i^{-1}(B_i^T P_u + \frac{1}{\varepsilon_i} E_{2i}^T E_{1i})$ 代入, 其中 $R_i = I +$

$\frac{E_{2i}^T E_{2i}}{\varepsilon_i}$, 可得到

$$A_i^T P_u + P_u A_i - (P_u B_i + \frac{1}{\varepsilon_i} E_{1i}^T E_{2i}) R_i^{-1} (B_i^T P_u +$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i} E_{2i}^T E_{1i}) + \gamma^{-2} P_u D_i D_i^T P_u + \varepsilon_i P_u L_i L_i^T P_u +$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i} E_{1i}^T E_{1i} + T_i^T T_i + \eta_i P_u M_i M_i^T P_u + \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{\eta_j} \right) H_i^T H_i < 0,$$

故存在 P_i 满足式(10). 证毕.

本文作者简介

甘永梅 1971 年生, 1999 年获西北工业大学飞行、制导与仿真专业博士学位, 现为西安交通大学工业自动化系讲师, 目前主要研究方向为鲁棒控制, H_∞ 控制理论及应用等. Email: ymngan@xjtu.edu.cn

王兆安 1945 年生, 1989 年在日本大阪大学获得博士学位, 现为西安交通大学电气工程学院院长, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为电力系统自动化, 电力电子技术等.