第 24 卷第 1 期
2007 年 02 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 24 No. 1
Feb. 2007

文章编号：1000−8152(2007)01−0046−07

离散系统多步观测时滞的H_∞输出反馈控制

刘　梅[1], 张焕水[2], 段广仁[3]

(1. 北京工商大学 基础部, 北京 100037; 2. 山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061;

3. 哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 针对一类多观测时滞离散系统, 本文提出了基于Krein空间理论解决H_∞输出反馈问题的新方法. 利用H_∞输出反馈控制问题与不定二次型之间的关系, 时滞系统的H_∞控制问题分解为LQ问题和时滞的H_∞估计问题. 通过重组观测, 时滞的H_∞估计问题可转化为无时滞的H_∞估计问题, 从而给出由两个Riccati方程决定的H_∞控制器存在的充要条件. 本文的方法不需要增广系统.

关键词: 离散系统; 多步时滞; H_∞控制; Krein空间; 重组观测

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

H-infinity measurement-feedback control for discrete-time systems with multiple delayed measurements

LIU Mei[1], ZHANG Huan-shui[2], DUAN Guang-ren[3]

(1. Basic Courses Department, Beijing Technology and Business University, Beijing 100037, China;

2. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China;

3. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: A new approach to solve the H-infinity control problem for linear discrete-time systems with multiple delayed measurements is proposed based on Krein space theory. By using the relationship between H-infinity measurement-feedback control problem and indefinite quadratic form, the H-infinity control problem for the time delay system is separated into an LQ problem and a delayed H_2 estimation problem which can be converted into a delay-free H_2 estimation problem resorted to reorganizing the measurements. Then, a sufficient and necessary condition for the existence of the H-infinity controller which is determined by two Riccati equations is presented. The approach in this paper does not require system augmentation.

Key words: discrete-time systems; multiple delays; H-infinity control; Krein space; re-organized measurements

1　引言(Introduction)

自文[1]首先提出H_∞最优问题以来, H_∞理论已经成为控制理论中非常重要的一个研究分支. 在过去的二十多年里, H_∞控制理论得到了人们的极大关注. 最初, H_∞问题是在频域内讨论. 1984年, 文[3]将状态空间法引入H_∞控制, 频域方法和时域方法的结合使得H_∞控制问题的状态空间解法能够推广到时变系统或无穷维系统. 文[4]进一步定义了时域上的H_∞性能指标, 将频域内的问题转换到时域来讨论, 纯时域方法的采用为研究非线性系统的H_∞问题提供了条件.

时滞现象存在于许多实际的控制系统中, 如过程控制, 飞行器控制和化工控制等. 近年来, 时滞系统的H_∞控制问题引起了人们广泛的兴趣并得到了许多有意义的结果. 人们常用的方法有线性矩阵不等式法和动态规划的方法. 众所周知, 线性矩阵不等式(LMI)的方法可以用来考虑时滞系统的H_∞控制问题. 但由线性矩阵不等式方法得到的条件比较保守且只得到充分条件. 动态规划方法得到的H_∞控制器存在的条件依赖于Riccati微分方程或者代数Riccati方程的解. 需要指出的是, 动态规划方法仅得到了单时滞系统的结果, 对于多时滞系统还没有相应的进展.

本文给出了解决离散系统多步观测时滞的H_∞控制问题的新方法. 在新方法的框架下, H_∞输出反馈控制问题转化为一个标准LQ问题和一个时滞的H_2估计问题. 然后通过重组观测, 将有时滞观测转化为无时滞的观测, 从而时滞的H_2估计问题转化为无时滞的H_2估计问题.

收稿日期: 2005−01−06; 收修改稿日期: 2006−02−23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60174017); 国家杰出青年基金资助项目(69925308).

2 问题的描述(Problem formulation)

考虑如下离散系统

$$x(t+1)=F(t)x(t)+G_1(t)w(t)+G_2(t)u(t), \quad (1)$$

$$s(t)=L(t)x(t). \quad (2)$$

其中$x(t)\in\mathbb{R}^n$, $w(t)\in\mathbb{R}^l$, $u(t)\in\mathbb{R}^r$和$s(t)\in\mathbb{R}^q$分别为系统的状态、过程噪声、控制输入和要调节的信号. 输出由l个带有时滞的系统得到, 且观测方程表示为

$$y_i(t)=H_i(t)x(t_i)+v_i(t), i=0,1,\cdots,l, \quad (3)$$

其中当$i\geqslant 0$时, $t_i=t_{i-1}-d_i$ $(t_0=t)$, $d_i>0$且$d_0=0$. $y_i(t)\in\mathbb{R}^{p_i}$为时滞输出, $v_i(t)\in\mathbb{R}^{p_i}$为输出噪声. $F(t), G_1(t), G_2(t), L(t)$ 和$H(t)$ 为适当阶的已知矩阵. 本文中, $*$ 代表矩阵的转置.

在式(3)中, $y_i(t)$为在t时刻状态$x(t_i)$的观测, 令$Y(t)$, $X(t)$和$V(t)$分别表示观测, 状态以及系统(1)~(3)在t时刻的相关的观测噪声, 满足如下的等式:

$$Y(t)=H(t)X(t)+V(t).$$

其中:

$$Y(t)=\begin{cases}[y_0^*(t)\cdots y_{i-1}^*(t)]^*, & \sum_{k=1}^{i-1}d_k\leqslant t<\sum_{k=1}^{i}d_k,\\ [y_0^*(t)\cdots y_l^*(t)]^*, & \sum_{k=1}^{l}d_k\leqslant t,\end{cases}$$

$$X(t)=\begin{cases}[x^*(t_0)\cdots x^*(t_{i-1})]^*, & \sum_{k=1}^{i-1}d_k\leqslant t<\sum_{k=1}^{i}d_k,\\ [x^*(t_0)\cdots x^*(t_l)]^*, & \sum_{k=1}^{l}d_k\leqslant t,\end{cases}$$

$$V(t)=\begin{cases}\left[v_0^*(t)\ \cdots\ v_{i-1}^*(t)\right]^*, & \sum_{k=1}^{i-1}d_k\leqslant t<\sum_{k=1}^{i}d_k,\\ [v_0^*(t)\ \cdots\ v_l^*(t)]^*, & \sum_{k=1}^{l}d_k\leqslant t,\end{cases}$$

且

$$H(t)=\begin{cases}\mathrm{diag}\{H_0(t),\cdots,H_{i-1}(t)\}, & \sum_{k=1}^{i-1}d_k\leqslant t<\sum_{k=1}^{i}d_k.\\ \mathrm{diag}\{H_0(t),\cdots,H_l(t)\}, & \sum_{k=1}^{l}d_k\leqslant t.\end{cases}$$

令$\check{u}(t)$为输出反馈控制器, 给出如下不等式:

$$\sup_{x(0),w,v_i\in h_2}\frac{\mathscr{A}}{\mathscr{B}}<\gamma^2. \quad (4)$$

其中:

$$\mathscr{A}=x^*(N+1)P_{N+1}^c x(N+1)+\sum_{t=0}^{N}\check{u}^*(t)Q_t^c\check{u}(t)+\sum_{t=0}^{N}s^*(t)R_t^c s(t),$$

$$\mathscr{B}=x^*(0)\varPi_0^{-1}x(0)+\sum_{t=0}^{N}w^*(t)Q_t^w w(t)+\sum_{t=0}^{N}V^*(t)(R_t^v)^{-1}V(t),$$

γ为任意给定的正数, 矩阵$\varPi_0$, P_{N+1}^c, Q_t^w, Q_t^c, R_t^c和R_t^v是给定的正定(半正定)的权矩阵. 矩阵R_t^v具有如下形式:

$$R^v=\begin{cases}\mathrm{diag}\{R_0^v,\cdots,R_{i-1}^v\}, & \sum_{k=1}^{i-1}d_k\leqslant t<\sum_{k=1}^{i}d_k,\\ \mathrm{diag}\{R_0^v,\cdots,R_l^v\}, & \sum_{k=1}^{l}d_k\leqslant t.\end{cases}$$

多观测时滞H_∞输出反馈控制问题(简记为MMTD) 给定系统(1)~(3), 试求取一个H_∞ 输出反馈控制器$\check{u}(t)=\mathcal{F}_t(Y(0);\cdots;Y(t))$ (其中$\mathcal{F}$为线性函数), 使得式(4)成立.

3 预备知识(Preliminaries)

基于H_∞输出反馈控制问题与不定二次型之间的关系, H_∞性能指标(4)可化为如下形式:

$$J_N=x^*(0)\varPi_0^{-1}x(0)+\sum_{t=0}^{N}w^*(t)Q_t^w w(t)+\sum_{t=0}^{N}(Y(t)-H(t)X(t))^*(R^v)^{-1}(Y(t)-H(t)X(t))-\gamma^{-2}(x^*(N+1)P_{N+1}^c x(N+1)+\sum_{t=0}^{N}\check{u}^*(t)Q_t^c\check{u}(t)+\sum_{t=0}^{N}s^*(t)R_t^c s(t)).$$

则由文[8]可知问题MMTD等价于对任意的初值和扰动$\{x(0),w(0),\cdots,w(N)\}$, 二次型$J_N$有最小值$J_N^m$且能够找到控制器$\check{u}(t)$使得最小值$J_N^m>0$. 注意到

$$J_N=x^*(0)\varPi_0^{-1}x(0)+\sum_{t=0}^{N}(y(t)-H(t)x(t))^*(R_t^v)^{-1}(y(t)-H(t)x(t))-\gamma^{-2}\bar{J}_N. \quad (5)$$

其中

$$\bar{J}_N=x^*(N+1)P_{N+1}^c x(N+1)+\sum_{t=0}^{N}s^*(t)R_t^c s(t)+\sum_{t=0}^{N}\begin{bmatrix}w(t)\\ \check{u}(t)\end{bmatrix}^*\begin{bmatrix}-\gamma^2Q_t^w & 0\\ 0 & Q_t^c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w(t)\\ \check{u}(t)\end{bmatrix}. \quad (6)$$

注意到上式中的不定二次型为文[8]中LQ问题的性能指标, 可化为

$$\bar{J}_N=x^*(0)P_0^c x(0)+\sum_{t=0}^{N}\begin{bmatrix}w(t)-\tilde{w}(t)\\ \check{u}(t)-\tilde{u}(t)\end{bmatrix}^*R_{e,t}^c\begin{bmatrix}w(t)-\tilde{w}(t)\\ \check{u}(t)-\tilde{u}(t)\end{bmatrix}. \quad (7)$$

其中:

$$\begin{bmatrix}\tilde{w}(t)\\ \tilde{u}(t)\end{bmatrix}=-K_c(t)x(t)=-\begin{bmatrix}K_w(t)\\ K_u(t)\end{bmatrix}x(t), \tag{8}$$

$$K_c(t)=(R^c_{e,t})^{-1}\begin{bmatrix}G_1^*(t)\\ G_2^*(t)\end{bmatrix}P^c_{t+1}F(t), \tag{9}$$

$$R^c_{e,t}=\begin{bmatrix}-\gamma^2Q^w_t+G_1^*(t)P^c_{t+1}G_1(t) & G_1^*(t)P^c_{t+1}G_2(t)\\ G_2^*(t)P^c_{t+1}G_1(t) & Q^c_t+G_2^*(t)P^c_{t+1}G_2(t)\end{bmatrix}. \tag{10}$$

且$P^c_t, t=0,\cdots,N$满足倒向Riccati方程

$$P^c_t=F^*(t)P^c_{t+1}F(t)+L^*(t)R^c_tL(t)-K^*_c(t)R^c_{e,t}K_c(t), P^c_{N+1}. \tag{11}$$

把式(7)代入到式(5)中得到

$$J_N=x^*(0)(\Pi_0^{-1}-\gamma^{-2}P^c_0)x(0)+\sum_{t=0}^{N}\begin{bmatrix}w(t)-\tilde{w}(t)\\ \check{u}(t)-\tilde{u}(t)\\ Y(t)-H(t)X(t)\end{bmatrix}^*\cdot\begin{bmatrix}-\gamma^{-2}\begin{bmatrix}R^c_{e,t}(1,1)\ R^c_{e,t}(1,2)\\ R^c_{e,t}(2,1)\ R^c_{e,t}(2,2)\end{bmatrix} & 0\\ 0 & (R^v_t)^{-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}w(t)-\tilde{w}(t)\\ \check{u}(t)-\tilde{u}(t)\\ Y(t)-H(t)X(t)\end{bmatrix}. \tag{12}$$

其中$R^c_{e,t}(i,j)\ (i,j=1,2)$表示矩阵$R^c_{e,t}$的第$(i,j)$块.

注意到式(12)中的二次型J_N为不定二次型且包含有时滞输出的信息, 下面由Krein空间重组新息分析的方法来解决多步时滞的H_∞控制问题.

4 主要结果(Main results)

4.1 重组观测(Reorganize measurements)

令

$$\begin{bmatrix}\Delta_t^{-1} & \bar{S}_t\\ \bar{S}^*_t & (\Delta'_t)^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R^c_{e,t}(1,1)\ R^c_{e,t}(1,2)\\ R^c_{e,t}(2,1)\ R^c_{e,t}(2,2)\end{bmatrix}^{-1}.$$

其中

$$\begin{cases}\Delta'_t=Q^c_t+G^*_2(t)P^c_{t+1}G_2(t)-G^*_2(t)P^c_{t+1}G_1(t)(R'_{G^c,t})^{-1}G^*_1(t)P^c_{t+1}G_2(t),\\ R'_{G^c,t}=-\gamma^2Q^w_t+G^*_1(t)P^c_{t+1}G_1(t).\end{cases} \tag{13}$$

则式(12)可进一步表示为

$$J_N=x^*(0)(\Pi_0^{-1}-\gamma^{-2}P^c_0)x(0)+\sum_{t=0}^{N}\begin{bmatrix}w(t)-\tilde{w}(t)\\ \begin{bmatrix}\check{u}(t)\\ Y(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\bar{K}_u(t)X(t)\\ H(t)X(t)\end{bmatrix}\end{bmatrix}^*\begin{bmatrix}Q^{\tilde{w}}_t & S_t\\ S^*_t & Q^v_t\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}w(t)-\tilde{w}(t)\\ \begin{bmatrix}\check{u}(t)\\ Y(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\bar{K}_{u,t}X(t)\\ H(t)X(t)\end{bmatrix}\end{bmatrix}. \tag{14}$$

其中:

$$\begin{cases}\bar{K}_u(t)=[K_u(t)\ 0\ \cdots\ 0],\\ S_t=-\gamma^2\,[\bar{S}_t\ 0\ \cdots\ 0],\\ Q^v_t=\begin{bmatrix}-\gamma^2(\Delta'_t)^{-1} & 0\\ 0 & R^v\end{bmatrix},\\ Q^{\tilde{w}}_t=-\gamma^2\Delta_t^{-1}.\end{cases} \tag{15}$$

对$0\leqslant t\leqslant N$, 上式中矩阵$\bar{K}_u(t)$和S_t的列数等于向量$X(t)$的行数.

由二次型(14)的结构, 给出相关的Krein空间的状态模型

$$x(t+1)=(F(t)-G_1(t)K_w(t))\mathrm{x}(t)+G_1(t)(\mathrm{w}(t)-\tilde{\mathrm{w}}(t))+G_2(t)\check{\mathrm{u}}(t), \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix}\check{\mathrm{u}}(t)\\ \mathrm{Y}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\bar{K}_u(t)\\ H(t)\end{bmatrix}\mathrm{X}(t)+\bar{\mathrm{V}}(t). \tag{17}$$

其中$\mathrm{x}(0)$, $\mathrm{w}(t)-\tilde{\mathrm{w}}(t)$, $\check{\mathrm{u}}(t)$, $\mathrm{Y}(t)$, $\mathrm{X}(t)$ 和$\bar{\mathrm{V}}(t)=[\mathrm{v}^*_u t\ \mathrm{V}^*(t)]^*$ 是Krein空间中的变量(用正体表示), 且满足

$$\left\langle\begin{bmatrix}\mathrm{x}(0)\\ \mathrm{w}(t)-\tilde{\mathrm{w}}(t)\\ \bar{\mathrm{V}}(t)\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathrm{x}(0)\\ \mathrm{w}(r)-\tilde{\mathrm{w}}(r)\\ \bar{\mathrm{V}}(r)\end{bmatrix}\right\rangle=\begin{bmatrix}(\Pi_0^{-1}-\gamma^{-2}P^c_0)^{-1} & 0\\ 0 & \begin{bmatrix}Q^{\tilde{w}}_t & S_t\\ S^*_t & Q^v_t\end{bmatrix}\delta_{tr}\end{bmatrix}$$

变量$\mathrm{w}(t)-\tilde{\mathrm{w}}(t)$和$\bar{\mathrm{V}}(t)=[\mathrm{v}^*_u(t)\ \mathrm{V}^*(t)]^*$的协方差阵为

$$\begin{cases}Q_{\mathrm{w}-\tilde{\mathrm{w}}}(t)=Q^{\tilde{w}}_t,\\ Q_V(t)=\mathrm{diag}\{Q_{\mathrm{v}_u}(t),Q_{\mathrm{V}}(t)\}=Q^v_t.\end{cases} \tag{18}$$

由文[8]中H_2估计问题的结果可知二次型J_N的最小值为

$$J^m_N=\sum_{t=0}^{N}(\begin{bmatrix}\check{u}(t)\\ Y(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\bar{K}_u(t)\\ H(t)\end{bmatrix}\check{X}(t\,|t-1))^*Q^{-1}_{w_c}(t)(\begin{bmatrix}\check{u}(t)\\ Y(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\bar{K}_u(t)\\ H(t)\end{bmatrix}\check{X}(t\,|t-1)). \tag{19}$$

其中

$$\check{X}(t|t-1)=$$

$$\begin{cases}[\check{x}^*(t_0|t-1)\cdots\check{x}^*(t_{i-1}|t-1)]^*, & \sum\limits_{k=1}^{i-1}d_k\leqslant t<\sum\limits_{k=1}^{i}d_k,\\ [\check{x}^*(t_0|t-1)\cdots\check{x}^*(t_l|t-1)]^*, & \sum\limits_{k=1}^{l}d_k\leqslant t,\end{cases}\tag{20}$$

且$\hat{x}(t_i|t-1)(i=0,1,\cdots,l)$的值是由$x(t_i)$投影到线性空间$\mathcal{L}\{\begin{bmatrix}\check{u}(i)\\ \check{Y}(i)\end{bmatrix}_{i=0}^{t-1}\}$上得到的. 式(19)中的$Q_{w_c}(t)$是新息$w_c(t)$的协方差阵, 新息$w_c(t)$为

$$w_c(t)=\begin{bmatrix}\check{u}(t)\\ Y(t)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}(t|t-1)\\ (t|t-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\bar{K}_u(t)\\ H(t)\end{bmatrix}(X(t)-\check{X}(t|t-1))+\bar{V}(t).\tag{21}$$

不难看出, 新息协方差阵$Q_{w_c}(t)$ 和最优估计值$\hat{X}(t|t-1)$ 和对于设计控制器非常重要. 与此同时, 注意到观测$\begin{bmatrix}\check{u}(i)\\ Y(i)\end{bmatrix}$中含有时滞, 标准的Kalman滤波公式不能用来直接计算$Q_{w_c}(t)$ 和$\hat{X}(t|t-1)$. 将重组带有时滞的观测并且定义重组新息, 也即是采用重组新息的方法来计算和新息协方差阵$Q_{w_c}(t)$和估计值$\hat{X}(t|t-1)$.

首先, 将$\check{u}(t)$和$y_0(t)$合写为

$$\bar{y}_0(t)=\bar{H}_0(t)x(t)+\bar{v}_0(t).$$

其中:

$$\bar{y}_0(t)=\begin{bmatrix}\check{u}(t)\\ y_0(t)\end{bmatrix},\bar{v}_0(t)=\begin{bmatrix}v_u(t)\\ v_0(t)\end{bmatrix},\quad \bar{H}_0(t)=\begin{bmatrix}-K_u(t)\\ H_0(t)\end{bmatrix}.$$

易于验证下面的等价关系成立

$$\mathcal{L}\{\begin{bmatrix}\check{u}(i)\\ Y(i)\end{bmatrix}_{i=0}^{t}\}=\mathcal{L}\{\mathcal{Y}_{l+1}(0),\cdots,\mathcal{Y}_{l+1}(t_l);\cdots;\mathcal{Y}_i(t_i+1),\cdots,\mathcal{Y}_i(t_{i-1});\cdots;\mathcal{Y}_1(t_1+1),\cdots,\mathcal{Y}_1(t)\}.\tag{22}$$

其中:

$$\mathcal{Y}_i(\tau)=\begin{bmatrix}\bar{y}_0(\tau)\\ \vdots\\ y_{i-1}(\tau+\bar{d}_{i-1})\end{bmatrix},\tau>0,\bar{d}_i=\sum_{k=1}^{l}d_k.\tag{23}$$

更进一步, 给出$\mathcal{Y}_i(\tau)$满足的关系式

$$\mathcal{Y}_i(\tau)=\mathcal{H}_i(\tau)x(\tau)+\mathcal{V}_i(\tau),i=1,\cdots,l+1.\tag{24}$$

其中:

$$\mathcal{H}_i(\tau)=\begin{bmatrix}\bar{H}_0(\tau)\\ \vdots\\ H_{i-1}(\tau+\bar{d}_{i-1})\end{bmatrix},\mathcal{V}_i(\tau)=\begin{bmatrix}\bar{v}_0(\tau)\\ \vdots\\ v_{i-1}(\tau+\bar{d}_{i-1})\end{bmatrix}.\tag{25}$$

且$\mathcal{V}_i(\tau)$相应的协方差阵$Q_{\mathcal{V}_i}(\tau)$如下

$$Q_{\mathcal{V}_i}(\tau)=\mathrm{diag}\{Q_{\bar{\mathrm{v}}}(\tau),Q_{\mathrm{v}_1}(\tau+\bar{d}_1),\cdots,Q_{\mathrm{v}_{i-1}}(\tau+\bar{d}_{i-1})\},i=1,\cdots,l+1.\tag{26}$$

此时式(24)中的观测值不再带有时滞. 称观测值$\{\mathcal{Y}_{l+1}(0),\cdots,\mathcal{Y}_{l+1}(t_l);\cdots;\mathcal{Y}_i(t_i+1),\cdots,\mathcal{Y}_i(t_{i-1});\cdots;\mathcal{Y}_1(t_1+1),\cdots,\mathcal{Y}_1(t)\}$ 为$\{\begin{bmatrix}\check{u}(i)\\ Y(i)\end{bmatrix}_{i=0}^{t}\}$为重组观测.

其次, 引入与重组观测相关的重组新息为

$$\bar{W}_i(t_i+k)=\mathcal{Y}_i(t_i+k)-\check{\mathcal{Y}}_{l+1}(t_i+k,i),\quad i=1,\cdots,l,1<k\leqslant d_i,\tag{27}$$

$$\bar{W}_{l+1}(k)=\mathcal{Y}_{l+1}(k)-\check{\mathcal{Y}}_{l+1}(k,l+1),\quad i=l+1,0\leqslant k\leqslant d_l.\tag{28}$$

估计值$\check{\xi}(s,i)$ $(s>t_i)$ 表示向量$\xi(s)$ 投影到线性空间$\mathcal{L}\{\mathcal{Y}_{l+1}(k)|_{0\leqslant k\leqslant t_l};\cdots;\mathcal{Y}_k(k)|_{t_j<k\leqslant t_{j-1}};\cdots;\mathcal{Y}_i(k)|_{t_i<k<s-1}\}$ 得到的最优估计值. 特别的, 当$s=t_i$时, $\check{\xi}(s,i)$ 表示向量$\xi(s)$ 投影到线性空间$\mathcal{L}\{\mathcal{Y}_{l+1}(k)|_{0\leqslant k\leqslant t_l};\cdots;\mathcal{Y}_j(k)|_{t_j<k\leqslant t_{j-1}};\cdots;\mathcal{Y}_{i+1}(k)|_{t_{i+1}<k<t_i}\}$ 得到的最优估计值.可以证明由重组新息序列张成的线性空间$\mathcal{L}\{\bar{W}_{l+1}(k)|_{0\leqslant k\leqslant t_l},\cdots,\bar{W}_i(t_i+k)|_{0<k\leqslant d_i};\cdots,\bar{W}_1(t_1+k)|_{0<k\leqslant d_1}\}$ 等价于式(22)中的线性空间. $\bar{W}_i(t_i+k)$是系统(16)和(24)的Kalman滤波的新息, 满足如下的关系式:

$$\bar{\mathrm{W}}_{l+1}(t_i+k)=\mathcal{H}_{l+1}(t_i+k)e_{l+1}(t_i+k)+\mathcal{V}_{l+1}(t_i+k),1<k\leqslant d_i,\tag{29}$$

$$\bar{\mathrm{W}}_{l+1}(k)=\mathcal{H}_{l+1}(k)e_{l+1}(k)+\mathcal{V}_{l+1}(k),\quad 0\leqslant k\leqslant d_i.\tag{30}$$

其中:

$$e_i(t_i+k)=x(t_i+k)-\check{x}(t_i+k,i),1<k\leqslant d_i,\tag{31}$$

$$e_{l+1}(\tau)=x(\tau)-\check{x}(\tau,l+1),\ 0\leqslant k\leqslant d_i,\tag{32}$$

4.2 新息协方差阵和最优估计值(Innovation covariance matrix and optimal estimator)

在本节中, 为由4.1节中给出的重组新息计算新息的协方差阵$Q_{w_c}(t)$ 及最优的估计$\hat{x}(t_i|t-1)$, 定

义状态$x(t_i+k+1)$ 和$x(t+1)$ 的一步预报误差的协方差阵$\mathcal{P}_i(t_i+k+1)$ 和$\mathcal{P}_{l+1}(t+1)$ 为:

$$\mathcal{P}_i(t_i+k) \triangleq \langle e_i(t_i+k), e_i(t_i+k)\rangle, \quad 1<k\leqslant d_i, i=1,\cdots,l, \tag{33}$$

$$\mathcal{P}_{l+1}(k) \triangleq \langle e_{l+1}(k), e_{l+1}(k)\rangle, 0\leqslant k\leqslant t_l. \tag{34}$$

由式(29)(30)知重组新息的协方差阵为

$$Q_i(t_i+k)=\langle \bar{W}_i(t_i+k), \bar{W}_i(t_i+k)\rangle = \mathcal{H}_i(t_i+k)\mathcal{P}_i(t_i+k)\mathcal{H}_i^*(t_i+k)+Q_{V_i}(t_i+k), \quad 1\leqslant k\leqslant d_i, i=1,\cdots,l, \tag{35}$$

$$Q_{l+1}(k)=\langle \bar{W}_{l+1}(k), \bar{W}_{l+1}(k)\rangle = \mathcal{H}_{l+1}(k)\mathcal{P}_{l+1}(k)\mathcal{H}_{l+1}^*(k)+Q_{V_{l+1}}(k), \quad 0\leqslant k\leqslant t_l, \tag{36}$$

应该指出, 与系统(16)和(24)相关的协方差阵$\mathcal{P}_i(t_i+k+1)$和$\mathcal{P}_{l+1}(t+1)$可由下面的引理求得.

引理 1 令$\phi(k)=F(k)-G_1(k)K_w(k)$, 则

1) 协方差阵$\mathcal{P}_{l+1}(k+1)$ 满足如下的Riccati方程:

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{l+1}(k+1)=\\&\phi(k)\mathcal{P}_{l+1}(k)\phi^*(k)+G_1(k)Q_k^{\tilde{w}}G_1^*(k)+\\&G_2(k)Q_u(k)G_2^*(k)-\phi(k)\mathcal{P}_{l+1}(k)\mathcal{H}_{l+1}^*(k)\\&Q_{l+1}^{-1}(k)\mathcal{H}_{l+1}(k)\mathcal{P}_{l+1}(k)\phi^*(k),\\&\mathcal{P}_{l+1}(0)=P_0.\end{aligned} \tag{37}$$

其中$Q_{l+1}(t)$满足式(36), $Q_k^{\tilde{w}}$和$Q_u(k)$满足式(18).

2) 协方差矩阵$\mathcal{P}_i(t_i+k+1)$ $(i=l,l-1,\cdots,1;k=1,2,\cdots,d_i)$可由下式递推计算:

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_i(t_i+k+1)=\\&\phi(t_i+k)\mathcal{P}_i(t_i+k)\phi^*(t_i+k)+G_2(t_i+k)\\&Q_u(t_i+k)G_2^*(t_i+k)+G_1(t_i+k)Q_k^{\tilde{w}}G_1^*(t_i+k)-\\&\phi(t_i+k)\mathcal{P}_i(t_i+k)\mathcal{H}_i^*(t_i+k)Q_i^{-1}\\&(t_i+k)\mathcal{H}_i(t_i+k)\mathcal{P}_i(t_i+k)\phi^*(t_i+k),\end{aligned} \tag{38}$$

$$\mathcal{P}_i(t_i+1)=\mathcal{P}_{i+1}(t_i+1), k=1,\cdots,d_i, i=l,\cdots,1$$

其中矩阵$Q_i(t_i+k)=\mathcal{H}_i(t_i+k)\mathcal{P}_i(t_i+k)\mathcal{H}_i^*(t_i+k)+Q_{V_i}(t_i+k)$. 得到的矩$\mathcal{P}_i(t_i+d_i+1)=\mathcal{P}_{i-1}(t_{i-1}+1)$作为下一步$i=i-1$的初值.

证 首先, 可知协方差阵$\mathcal{P}_{l+1}(t+1)$是与系统(16)和(24)的Kalman滤波相关的Riccati方程的解, 即式(37)成立. 其次, 已知估计值$\hat{x}(t_i+k+1,i)$是把状态$x(t_i+k+1)$投影到由新息序列张成的线性空间$\mathcal{L}\{\bar{W}_{l+1}(k)|_{0\leqslant k\leqslant t_l},\cdots,\bar{W}_i(t_i+k)|_{0<k\leqslant d_i};\cdots,\bar{W}_1(t_1+k)|_{0<k\leqslant d_1}\}$得到的, 则由投影公式得

$$\begin{aligned}&\hat{x}(t_i+k+1,i)=\\&\mathrm{Proj}\{x(t_i+k+1)|\bar{\mathrm{W}}_{l+1}(0),\cdots,\bar{W}_{l+1}(t_l);\cdots;\\&\bar{\mathrm{W}}_i(t_i+1),\cdots,\bar{\mathrm{W}}_i(t_i+k-1)\}+\\&\mathrm{Proj}\{x(t_i+k+1)|\bar{W}_i(t_i+k)\}=\\&\phi(t_i+k)\hat{x}(t_i+k,i)+\phi(t_i+k)\langle x(t_i+k), e_i(t_i+k)\rangle\\&\mathcal{H}_i^*(t_i+k)Q_i^{-1}(t_i+k)\bar{W}_i(t_i+k)=\\&\phi(t_i+k)\hat{x}(t_i+k,i)+\phi(t_i+k)\\&\mathcal{P}_i(t_i+k)\mathcal{H}_i^*(t_i+k)Q_i^{-1}(t_i+k)\bar{W}_i(t_i+k).\end{aligned} \tag{39}$$

由式(31)(39)易得

$$\begin{aligned}&e_i(t_i+k+1)=\\&x(t_i+k+1)-\hat{x}(t_i+k+1,i)=\\&\phi(t_i+k)e_i(t_i+k)+G_1(t_i+k)(w(t_i+k)-\\&\tilde{w}(t_i+k))+G_2(t_i+k)\check{u}(t_i+k)-\phi(t_i+k)\\&\mathcal{P}_i(t_i+k)\mathcal{H}_i^*(t_i+k)Q_i^{-1}(t_i+k)\bar{W}_i(t_i+k).\end{aligned} \tag{40}$$

因为误差$e_i(t_i+k+1)$和新息$\bar{W}_i(t_i+k)$无关且误差$e_i(t_i+k)$和输入$u(t_i+k)$无关, 进而由式(40)得到协方差阵$\mathcal{P}_i(t_i+k+1)$的表达式(38).

计算新息的协方差阵$Q_{w_c}(t)$及最优的估计$\hat{x}(t_i|t-1)$还需要给出状态$x(t_j)$和估计误差$e_{t_i}(t_i+\tau)$的互协方差阵$\mathcal{R}_{t_i,t_i+\tau}^{t_j}=\langle x(t_j), e_i(t_i+\tau)\rangle$ $(i,j,\tau\geqslant 0)$, 即

$$\mathcal{R}_{t_i,t_i+\tau}^{t_j}=\begin{cases}\mathcal{P}_j(t_j)\mathcal{A}^*(t_j)\cdots\mathcal{A}^*(t_i+\tau-1), t_i+\tau\geqslant t_j,\\ \phi_{t_j-1}\cdots\phi_{t_i+\tau}\mathcal{P}_i(t_i+\tau), \quad t_i+\tau<t_j,\end{cases} \tag{41}$$

其中$\mathcal{A}(t_i+k), k>0$为

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}(t_i+k+1)=\\&\phi_{t+k}\{I_n-\mathcal{P}_i(t_i+k)\mathcal{H}_i^*(t_i+k)Q_i^{-1}(t_i+k)\mathcal{H}_i(t_i+k)\}.\end{aligned}$$

特别地, 当$i=l+1$时, 有

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}(t_{l+1}+k+1)=\\&\phi_{t_{l+1}+k}\{I_n-\mathcal{P}_{l+1}(t_{l+1}+k)\\&\mathcal{H}_{l+1}^*(t_{l+1}+k)Q_{l+1}^{-1}(t_{l+1}+k)\mathcal{H}_{l+1}(t_{l+1}+k)\}.\end{aligned}$$

引理 2 考虑系统(1)～(3). 最优滤波$\hat{x}(t|t)$为

$$\hat{x}(t|t)=\left[I_n-\mathcal{P}_1(t)\mathcal{H}_1^*(t)Q_1^{-1}(t)\mathcal{H}_1(t)\right]\hat{x}(t,1)+\mathcal{P}_1(t)\mathcal{H}_1^*(t)Q_1^{-1}(t)\mathcal{Y}_1(t). \tag{42}$$

其中$Q_1(t)=\mathcal{H}_1(t)\mathcal{P}_1(t)\mathcal{H}_1^*(t)+Q_{V_1}(t)$, 求取估计值$x(t,1)$和协方差阵$\mathcal{P}_1(t)$的步骤如下:

1) 递推计算$\hat{x}(t_l+1,l+1)$, 对$t=\bar{d}_l,\bar{d}_l+1,\cdots$, 有

$$\hat{x}(t_l+1,l+1)=$$
$$\phi(t_l)\hat{x}(t_l,l+1)+\phi(t_l)\mathcal{P}_{l+1}(t_l)\mathcal{H}^*_{l+1}(t_l)Q^{-1}_{l+1}(t_1)\times$$
$$[\mathcal{Y}_{l+1}(t_l)-\mathcal{H}_{l+1}(t_l)\hat{x}(t_l,l+1)],$$
$$\hat{x}(0,l+1)=0. \tag{43}$$

其中
$Q_{l+1}(t_l)=\mathcal{H}_{l+1}(t_l)\mathcal{P}_{l+1}(t_l)\mathcal{H}^*_{l+1}(t_l)+Q_{V_{l+1}}(t_l)$,
矩阵$\mathcal{P}_{l+1}(t_l)$满足式(37)且初值$\mathcal{P}_{l+1}(0)=P_0$.

2) 计算$\hat{x}(t,1)$.

$$\hat{x}(t_i+k+1,i)=$$
$$\phi(t_i+k)\hat{x}(t_i+k,i)+\phi(t_i+k)\mathcal{P}_i(t_i+k)$$
$$\mathcal{H}^*_i(t_i+k)Q^{-1}_i(t_i+k)[\mathcal{Y}_i(t_i+k)-\mathcal{H}_i(t_i+k)$$
$$\hat{x}(t_i+k,i)],\hat{x}(t_l+1,l+1),k=1,2,\cdots,d_i;$$
$$i=l,l-1,\cdots,1. \tag{44}$$

其中$\hat{x}(t_i+1,i)=\hat{x}(t_i+1,i+1)$且$Q_i(t_i+k)=\mathcal{H}_i(t_i+k)\mathcal{P}_i(t_i+k)\mathcal{H}^*_i(t_i+k)+Q_{V_i}(t_i+k)$, 矩阵$\mathcal{P}_i(t_i+k)$满足式(38).

3) 利用式(44)计算估计值$\hat{x}(t|t)$, 其中$\hat{x}(t,1)=\hat{x}(t_1+d_1,1)$和$\mathcal{P}_1(t)=\mathcal{P}_1(t_1+d_1)$可由步骤2)求得.

证　类似证明可见文[9].

证毕.

定理 1　新息协方差阵

$$Q_{w_c}(t)=\langle w_c(t),w_c(t)\rangle=\begin{bmatrix}Q_{w_c}(1,1) & Q_{w_c}(1,2)\\ Q_{w_c}(2,1) & Q_{w_c}(2,2)\end{bmatrix},$$

则

1) 当$\sum\limits_{k=1}^{i-1}d_k\leqslant t<\sum\limits_{k=1}^{i}d_k$时, 有

a) $Q_{w_c}(1,1)=-\gamma^2(\varDelta'_t)^{-1}+K_u(t)\mathcal{P}_1(t)(K_u(t))^*$, 其中$\varDelta'_t$满足式(13);

b) $Q_{w_c}(1,2)=Q^*_{w_c}(2,1)=[a_j]_{1\times i}$, 其中:

· 当$j=1$时, $a_1=-K_u(t)\mathcal{P}_1(t)H^*_0(t)$;

· 当$1<j\leqslant i$时, $a_j=-K_u(t)(\mathcal{R}^{t_{j-1}}_{t,t_l-1})^*H^*_{j-1}(t)$;

c) $Q_{w_c}(2,2)=[\varLambda_{mn}]_{i\times i}$, 其中

· 当$m=n=1$时, $\varLambda_{11}=H_0(t)\mathcal{P}_1(t)H^*_0(t)+R^v_0$;

· 当$m=n>1$时,
$\varLambda_{mm}=H_{m-1}(t_{m-1})\mathcal{P}^{t_{m-1}}_{t_{m-1}}H^*_{m-1}(t_{m-1})+R^v_{m-1}$;

· 当$m>n=1$时,
$\varLambda_{mn}=\varLambda^*_{nm}=H_{m-1}(t_{m-1})\mathcal{R}^{t_{m-1}}_{t_{n-1},t}H^*_0(t)$;

· 当$m>n>1$时,
$\varLambda_{mn}=\varLambda^*_{nm}=H_{m-1}(t_{m-1})\mathcal{P}^{t_{m-1}}_{t_{n-1}}H^*_{n-1}(t_{n-1})$.

其中$\mathcal{R}^{t_m}_{t_n,t_n+\tau}$满足式(41). 当$p>q$时,

$$\mathcal{P}^{t_p}_{t_q}=\langle\varsigma(t_p),\varsigma(t_q)\rangle=$$
$$\mathcal{R}^{t_p}_{t_q,t_l-1}+K^{t_p}_{t_1,t}Q^{-1}_1(t)(K^{t_q}_{t_1,t})^*+$$
$$\sum_{j=q}^{1}\sum_{\tau=1}^{d_j}\mathcal{K}^{t_q}_{t_j,t_j+\tau}Q^{-1}_j(t_j+\tau)(\mathcal{K}^{t_q}_{t_j,t_j+\tau})^*, \tag{45}$$

$$\varsigma(t_p)=x(t_p)-\hat{x}(t_p|t-1,t_l-1), \tag{46}$$
$$\mathcal{K}^{t_i}_{t_j,t_j+k}=\mathcal{R}^{t_i}_{t_j,t_j+k}\mathcal{H}^*_j(t_j+k)Q^{-1}_j(t_j+k). \tag{47}$$

特别的, 当$p=q$时

$$\mathcal{P}^{t_p}_{t_q}=\langle\varsigma(t_p),\varsigma(t_p)\rangle=$$
$$\mathcal{P}_{p+1}(t_p)+K^{t_p}_{t_{p+1},t_l}Q^{-1}_{p+1}(t_p)(K^{t_p}_{t_{p+1},t_l})^*+$$
$$K^{t_p}_{t_1,t}Q^{-1}_1(t)(K^{t_p}_{t_1,t})^*+$$
$$\sum_{j=p}^{1}\sum_{\tau=1}^{d_j}\mathcal{K}^{t_p}_{t_j,t_j+k}Q^{-1}_j(t_j+k)(\mathcal{K}^{t_p}_{t_j,t_j+k})^*. \tag{48}$$

2) 当$t\geqslant\sum\limits_{k=1}^{l}d_k$时, 有

a) $Q_{w_c}(1,1)$同1);

b) $Q_{w_c}(1,2)=Q^*_{w_c}(2,1)$同1)中且$i=l+1$;

c) $Q_{w_c}(2,2)$同1)且$i=l+1$.

证　可参考文[10].

定理 2　考虑系统(16)和(24), 最优估计值$\hat{x}(t_i|t-1)(i=0,1,\cdots,l)$为

$$\hat{x}(t_i|t-1)=$$
$$\hat{x}(t_i,i+1)-\mathcal{R}^i_{1,t}\mathcal{H}^*_1(t)Q^{-1}_1(t)(\mathcal{Y}_1(t)-$$
$$\mathcal{H}_1(t)\hat{x}(t,1))+\mathcal{R}^{t_i}_{t_{i+1},t_i}\mathcal{H}^*_{i+1}(t_i)Q^{-1}_{i+1}(t_i)$$
$$(\mathcal{Y}_{i+1}(t_i)-\mathcal{H}_{i+1}(t_i)\hat{x}(t_i,i+1))+$$
$$\sum_{j=1}^{i}\sum_{\tau=1}^{d_k}\mathcal{R}^{t_i}_{t_j,t_j+\tau}\mathcal{H}^*_j(t_j+\tau)Q^{-1}_j(t_j+\tau)$$
$$(\mathcal{Y}_j(t_j+\tau)-\mathcal{H}_j(t_j+\tau)\hat{x}(t_j+\tau,j)),\hat{x}(t_i,1). \tag{49}$$

证　由引理1可知, 最优估计值$\hat{x}(t_i|t-1)$是状态$x(t_i)$在线性空间$\mathcal{L}\{\bar{W}_{l+1}(0),\cdots,\bar{W}_{l+1}(t_l);\cdots;\bar{W}_i(t_i+1),\cdots,\bar{W}_i(t_{i-1});\cdots;\bar{W}_1(t_1+1),\cdots,\bar{W}_1(t-1)\}$上的投影. 因为$\bar{\mathrm{W}}_i(\cdot)$是白噪声, 估计值$\hat{x}(t_i|t-1)$可由射影公式如下计算:

$$\hat{x}(t_i|t-1)=$$
$$\mathrm{Proj}\{x(t_i)|\bar{W}_{l+1}(0),\cdots,\bar{W}_{l+1}(t_l);\cdots;$$
$$\bar{W}_{i+1}(t_{i+1}+1),\cdots,\bar{W}_{i+1}(t_i-1)\}+$$
$$\mathrm{Proj}\{x(t_i)|\bar{W}_{i+1}(t_i);\bar{W}_i(t_i+1),\cdots,\bar{W}_i(t_{i-1});$$
$$\bar{W}_1(t_1+1),\cdots,\bar{W}_1(t-1)\}=$$
$$\hat{x}(t_i,i+1)+\sum_{j=1}^{i}\sum_{\tau=1}^{d_j}\mathcal{R}^{t_i}_{t_j,t_j+\tau}\mathcal{H}^*_j(t_j+\tau)Q^{-1}_j(t_j+\tau)$$
$$(\mathcal{Y}_j(t_j+\tau)-\mathcal{H}_j(t_j+\tau)\hat{x}(t_j+\tau,j))$$
$$-\left\langle x(t_i),\bar{\mathrm{W}}_1(t)\right\rangle+\left\langle x(t_i),\bar{\mathrm{W}}_{i+1}(t_i)\right\rangle=$$
$$\hat{x}(t_i,i+1)-\mathcal{R}^{t_i}_{t_1,t}\mathcal{H}^*_1(t)Q^{-1}_1(t)(\mathcal{Y}_1(t)-\mathcal{H}_1(t)$$
$$\hat{x}(t,1))+\mathcal{R}^{t_i}_{t_{i+1},t_i}\mathcal{H}^*_{i+1}(t_i)Q^{-1}_{i+1}(t_i)$$
$$(\mathcal{Y}_{i+1}(t_i)-\mathcal{H}_{i+1}(t_i)\hat{x}(t_i,i+1))+$$

$$\sum_{j=1}^{i}\sum_{\tau=1}^{d_j}\mathcal{R}_{t_j,t_j+\tau}^{t_i}\mathcal{H}_j^*(t_j+\tau)Q_j^{-1}(t_j+\tau)$$
$$(\mathcal{Y}_j(t_j+\tau)-\mathcal{H}_j(t_j+\tau)\hat{x}(t_j+\tau,j)).$$

其中$\hat{x}(t_i,i+1)=\hat{x}(t_{i+1}+d_{i+1},i+1)$. 令$k=d_{i+1}-1$, 估计值$\hat{x}(t_{i+1}+d_{i+1},i+1)$由式(43)计算.

证毕.

4.3 H$_\infty$控制问题的解(Solution to H$_\infty$ control problem)

考虑状态空间模型(1)~(3). 对任意给定的$\gamma>0$, H$_\infty$输出反馈控制器$\check{u}(t)=\mathcal{F}_t(Y(0),\cdots;Y(t))$使得性能指标(4)成立的充要条件是

1) 矩阵$\varPi_0^{-1}-\gamma^{-2}P_0^c>0$;

2) 当$t=0,1,\cdots,N$, 矩阵

$$\varDelta_t=-\gamma^2Q_t^w+G_1^*(t)P_{t+1}^cG_1(t)-$$
$$G_1^*(t)P_{t+1}^cG_2(t)R_{G^c,t}^{-1}G_2^*(t)P_{t+1}^cG_1(t)<0;$$

3) 当$t=0,1,\cdots,N$, 矩阵$Q_t^v-S_t(Q_t^{\tilde{w}})^{-1}S_t^*$和$Q_{w_c}(t)$有相同的惯性, 其中$P_{t+1}^c$满足式(11)中的Riccati方程且$R_{G^c,t}=Q_t^c+G_2^*(t)P_{t+1}^cG_2(t)$. 则H$_\infty$输出反馈控制器为

$$\check{u}(t)=-\bar{K}_u(t)\hat{X}(t|t-1)-K_k(t)\bar{Q}_{w_c}^{-1}(t)$$
$$(\mathcal{Y}(t)-\bar{H}(t)\hat{X}(t|t-1)). \tag{50}$$

其中

$$\begin{cases}\bar{Q}_{w_c}(t)=Q_{w_c}(2,2),\\ K_{k,t}=Q_{w_c}(1,2)Q_{w_c}^{-1}(2,2).\end{cases} \tag{51}$$

最优估计$\hat{x}(t|t-1)$为

$$\hat{X}(t\,|t-1\,)=\begin{cases}[\hat{x}^*(t_0\,|t-1\,)\ \cdots\ \hat{x}^*(t_{i-1}\,|t-1\,)\ 0\ \cdots\ 0]^*,\\ \quad\sum_{k=1}^{i-1}d_k\leqslant t<\sum_{k=1}^{i}d_k,\\ [\hat{x}^*(t_0\,|t-1\,)\ \cdots\ \hat{x}^*(t_l\,|t-1\,)]^*,\\ \quad\sum_{k=1}^{i-1}d_k\leqslant t.\end{cases}$$

其中$\hat{x}(t_i\,|t-1\,)$的值由定理2给出.

证 由第3节可知问题MMTD等价于二次型J_N对变量$\{x(0),w(0),\cdots,w(N)\}$有最小值$J_N^m$且可选取控制器$\check{u}(t)$使得$J_N^m>0$. 由式(14)可得, 对变量$\{x(0),w(0),\cdots,w(N)\}$, 使得二次型$J_N$有最小值的必要条件为1),2)和3). 二次型$J_N$的最小值由式(19)给出. 对新息协方差阵$Q_{w_c}(t)$进行UDL分解, 最小值$J_N^m$可表示为

$$J_N^m=\sum_{t=0}^{N}(u(t)-\bar{u}(t))^*\varDelta_{R,t}^{-1}(u(t)-\bar{u}(t))+$$
$$\sum_{t=0}^{N}(Y(t)-\bar{H}_t\hat{x}(t|t-1))^*\bar{Q}_{w_c}^{-1}(t)\cdot$$
$$(Y(t)-\bar{H}_t\hat{x}(t|t-1)),$$

其中:

$$\varDelta_{R,t}=\{Q_{w_c}(1,1)-Q_{w_c}(1,2)\}Q_{w_c}^{-1}(2,2)Q_{w_c}(2,1),$$
$$\varDelta_t^{'}=Q_t^c+G_{2,t}^*P_{t+1}^cG_{2,t}-G_{2,t}^*P_{t+1}^cG_{1,t}(R_{G^c,t}^{'})^{-1}$$
$$G_{1,t}^*P_{t+1}^cG_{2,t},$$
$$R_{G^c,t}^{'}=-\gamma^2Q_t^w+G_{1,t}^*P_{t+1}^cG_{1,t},$$

且$\bar{Q}_{w_c}(t)$满足式(51). $\varDelta_{R,t}$是矩阵$\bar{Q}_{w_c}(t)$在新息协方差阵$Q_{w_c}(t)$中的Shur补. 于是有

$$\check{u}(t)=-\bar{K}_{u,t}\hat{x}(t|t-1)-$$
$$K_{k,t}\bar{Q}_{w_c}^{-1}(t)(\mathcal{Y}(t)-\bar{H}_t\hat{x}(t|t-1)),$$

其中$K_{k,t}$满足式(51). 由条件3), 得到$\bar{Q}_{w_c}(t)>0$和$\varDelta_{R,t}<0$.

当选择控制器$\check{u}(t)=\bar{u}(t)$时, 二次型的最小值$J_N^m>0$成立. 此时, 上面的必要条件也成为充分条件. 利用定理2去计算$\hat{X}(t|t-1)$中$\hat{x}(t_i|t-1)(i=0,\cdots,l)$的值. 得到的满足H$_\infty$性能指标的控制器$\check{u}(t)$又称为中心控制器.

证毕.

5 结论(Conclusion)

时滞系统的H$_\infty$控制问题是控制理论领域中非常复杂的一个问题. 对单时滞系统, 时滞系统的H$_\infty$控制问题取得了一些进展, 但是对多时滞系统, 本文得到的结果是非常有意义的. 而且借助于新方法, 本文给出了离散系统多步时滞的H$_\infty$控制问题有解的充要条件. 本文的方法可以推广到连续系统并可得到相应的控制器存在的充要条件.

参考文献(References):

[1] ZAMES G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1981, 26(2): 301 – 320.

[2] ZAMES G, FRANCIS B A. A feedback minimax sensitivity and optimal robustness[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1983, 28(5): 585 – 601.

[3] DOYLE J C. *Lecture Notes in Advances in Multivariable Control*[M]. Minneapolis, MN, USA: ONR/Honeywell Workshop, 1984.

[4] TADMOR G. Worst case design in the time domain: the maximum principle and the standard H$_\infty$-problem[J]. *Mathematical Control Signals Systems*, 1989, 3(3): 301 – 324.

[5] FRIDMAN E, SHAKED U. A descriptor system approach to H$_\infty$ control of linear time-delay systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(2): 253 – 270.

[6] NAGPAL K M, RAVI R. control and estimation problems with delayed measurements: state-space solutions[J]. *SIAM J of Control Optimum*, 1997, 35(4): 1217 – 1243.

(下转第58页)