

不确定性奇异时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制

冯俊娥, 程兆林

(山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

摘要: 研究了含不确定性线性奇异滞后系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 其中不确定性是范数有界的. 为此首先给出了相应的无控制标称系统内稳定且满足 H_∞ 范数界的一个充分条件. 然后讨论了含不确定性奇异滞后系统鲁棒 H_∞ 控制问题有解的一个充分条件, 并同时给出了控制器的设计, 控制器可由线性矩阵不等式解得. 最后举例说明本文方法的正确性.

关键词: 奇异滞后系统; 鲁棒 H_∞ 控制; LMI; 参数不确定性

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Robust H-infinity control of uncertain singular systems with delay in state

FENG Jun-e, CHENG Zhao-lin

(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Shandong Jinan 250100, China)

Abstract: This paper examines the problem of robust H-infinity control for linear singular state delayed systems with norm-bounded parameter uncertainty. First, one sufficient algebraic condition is given to guarantee the stability and H-infinity norm-boundedness of the corresponding unforced nominal singular systems with delay in state. Then, the sufficient condition is obtained for the existence of robust H-infinity controller using the method of LMI. The controller can be solved by two LMIs. Finally, an illustrative example is presented.

Key words: singular state-delayed systems; robust H-infinity control; LMI; parameter uncertainty

1 引言 (Introduction)

关于含不确定性的线性滞后系统的鲁棒镇定与鲁棒 H_∞ 控制问题, 近年来已引起了许多研究者的重视. 文献[1~4]讨论了不确定性滞后系统的鲁棒镇定, 文献[5~8]研究了不确定滞后系统的鲁棒 H_∞ 控制. 由于广义系统能够更好地描述实际系统, 因而广义时滞系统有着广泛的应用背景^[9]. 但由于广义时滞系统本身的复杂性, 使得人们关于广义时滞系统的研究结果相对而言就少得多了^[9,10].

本文将首先讨论含不确定性的奇异滞后系统的标称系统内稳定且满足 H_∞ 范数界的条件, 然后在此基础上利用线性矩阵不等式的方法给出了含不确定性的线性奇异滞后系统存在鲁棒 H_∞ 控制器的一个充分条件, 控制器可由 LMI 解得.

2 问题的描述 (Problem statement)

考虑具有如下形式的参数不确定性奇异时滞系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_\tau + \Delta A_\tau)x(t-\tau) + \\ \quad (B + \Delta B)u(t) + (D + \Delta D)w(t), \\ z(t) = Cx(t), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

这里, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $w(t) \in \mathbb{R}^l$, $z(t) \in \mathbb{R}^s$ 分别为系统的状态向量、控制输入、干扰输入与控制输出; $\varphi(t) \in C[-\tau, 0]$ 为初始函数; $\tau > 0$ 为滞后常数; 系统中矩阵 E, A, A_τ, B, D, C 为适维常阵. 特别地, $\text{rank } E = p < n$, $\Delta A, \Delta A_\tau, \Delta B, \Delta D$ 是系统的不确定性. 本文假设系统的不确定性具有如下结构:

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_\tau & \Delta B & \Delta D \end{bmatrix} = GF(\sigma) \begin{bmatrix} E_a & E_\tau & E_b & E_d \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中未知矩阵 $F(\sigma) \in \mathbb{R}^{j \times k}$ 满足

$$F^T(\sigma)F(\sigma) \leq I_k, \quad (3)$$

且 $\sigma \in \Omega$. 这里 Ω 是一紧集, 并且对任何满足 $F^T F \leq I_k$ 的矩阵 F , 都有 $\sigma \in \Omega$ 满足式(3). 这里 I_k 为单位阵, G, E_a, E_τ, E_b 和 E_d 是已知的适维阵.

本文目的是设计状态反馈控制器

$$u(t) = Kx(t), \quad (4)$$

使之与系统(1)~(3)构成的闭环对所有满足相容性条件的初始函数 $\varphi(t)$ 都有:

a) 对所有满足式(2)和(3)的不确定性,闭环系统是稳定的;

b) $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$, 其中 $T_{zw}(s)$ 表示从干扰输入 $w(t)$ 到被控输出 $z(t)$ 的传递函数, $\gamma > 0$ 为给定常数.

3 主要结果(Main results)

首先给出系统(1)的标称系统当 $u(t) \equiv 0$ 时,系统内稳定且满足 H_∞ 范数界的充分条件,这对于解决本文问题将起到关键性的作用.现在就讨论无控制奇异时滞系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t-\tau), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (5)$$

零解渐近稳定的充分条件.为此需要以下引理与概念:

引理 1^[11] 存在矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$\begin{cases} XE^T = EX^T \geq 0, \\ XA^T + AX^T < 0 \end{cases}$$

的充要条件是 (E, A) 是容许的,即

- a) $\det(sE - A) \neq 0, \forall s \in \mathbb{C}$;
- b) $\deg\{\det(sE - A)\} = \text{rank } E$;
- c) $(sE - A)$ 的有限特征根在开左半平面.

引理 2 若系统(5)中矩阵对 (E, A) 满足引理 1 的条件,则对任一满足相容性初始条件的函数 $\varphi(t)$, 方程(5)在区间 $[0, +\infty)$ 上有连续的唯一解.

证 由于矩阵对 (E, A) 是正则的,无脉冲的,则系统(3)存在如下的 r.s.e 标准形:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1(t) = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1(t) + \tilde{A}_{\tau 11}\tilde{x}_1(t-\tau) + \tilde{A}_{\tau 12}\tilde{x}_2(t-\tau), \\ 0 = \tilde{x}_2(t) + \tilde{A}_{\tau 21}\tilde{x}_1(t-\tau) + \tilde{A}_{\tau 22}\tilde{x}_2(t-\tau), \\ \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} = \tilde{\varphi}(t), t \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

若 $\varphi(t)$ 满足相容性初始条件,则 $\tilde{\varphi}(t)$ 满足相容性初始条件,显然上式在 $[0, +\infty)$ 上有唯一连续解.

系统(5)的更一般的形式为

$$E\dot{x}(t) = f(t, x_t). \quad (6a)$$

其中 $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-\tau, 0], f(t, \varphi): [0, +\infty) \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 连续,且 $f(t, 0) = 0, \forall t \geq t_0 \geq 0$. 方程(6a)的初始条件为

$$x_{t_0} = \varphi(t), \varphi(t) \in C([t_0 - \tau, t_0], \mathbb{R}^n). \quad (6b)$$

在给出系统(6)的稳定性概念^[12]之前,还需引用如下记号:

区间 $T_k = [0, t_k)$, 其中 $0 < t_k \leq +\infty$;

m 维连续可微向量函数 $q(t, x)$ 在 $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ 上有定义;

$S_k(t_0, t_k)$ 是系统(6)的满足相容性初始条件的函数的集合,且 $\forall \varphi_1 \in S_k(t_0, t_k)$, 方程(6)在区间 $[t_0 - \tau, t_k)$ 上有连续解;

$B(0, \delta) = \{\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \|\varphi\| < \delta, \delta > 0\}$.

定义 1 若 $\forall t_0 \in T_k, \forall \varepsilon > 0$, 总存在 $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$, 使得 $\forall \varphi \in B(0, \delta) \cap S_k(t_0, t_k)$, 方程(6)过初始条件 (t_0, φ) 的解 $x(t, t_0, \varphi)$ 满足 $\|q(t, x(t))\| \leq \varepsilon, \forall t \in [t_0, t_k)$, 则称方程(6)的零解关于 $\{q(t, x), T_k\}$ 为稳定的.

特别地,若 δ 仅与 ε 有关,与 t_0 无关,则称方程(6)的零解关于 $\{q(t, x), T_k\}$ 为一致稳定的.

定义 2 若方程(6)的零解关于 $\{q(t, x), [0, +\infty)\}$ 为稳定的,且 $\forall t_0 \in [0, +\infty)$, 存在 $\Delta(t_0) > 0$, 使得对 $\forall \varphi \in B(0, \Delta(t_0)) \cap S_k(t_0, +\infty)$ 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|q(t, x(t, t_0, \varphi))\| = 0,$$

则称方程(6)的零解关于 $\{q(t, x), [0, +\infty)\}$ 为渐近稳定的.

注 1 上述稳定性定义中的 t_k , 可取为 $+\infty$, 也可取为有限数,这样使得稳定性概念的应用得以扩大,因为在实际问题中,只要在充分大的时间间隔内稳定即可.

注 2 上述概念中,初始函数不仅要相容性初始条件,而且要保证系统(6)的解在 $[t_0, t_k]$ 上存在,即属于 $S_k(t_0, t_k)$,这与非奇异系统解的稳定性的概念不同,当然对于本文中的系统(5),由引理 2 知, $S_k(t_0, t_k)$ 即为满足相容性初始条件的函数集合.

注 3 若 $q(t, x) = x, t_k = +\infty, S_k(t_0, t_k) = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, 则上述稳定性概念为传统意义下的 Lyapunov 稳定性概念.

引理 3^[12] 设对方程(6)的任一解 $x(t)$, 存在楔函数 $u(\cdot), v(\cdot)$, 非负非减函数 $w(\cdot)$ 及连续泛函 $V(t, \varphi): [0, +\infty) \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, 满足:

$$\textcircled{1} u(\|q(t, x(t))\|) \leq V(t, x_t) \leq v(\|x_t\|);$$

$\textcircled{2} D^+ V(t, x_t) \leq -w(\|q(t, x(t))\|)$, 则方程(6)的零解关于 $\{q(t, x), [0, t_k)\}$ 为一致稳定的,其中 $t_k \leq +\infty$. 若 $s > 0$ 时, $w(s) > 0$, 且当 $q(t, x(t))$ 有界时,沿方程解的导数 $\dot{q}(t, x(t))$ 有界,则方程(6)的零解关于 $\{q(t, x), [0, +\infty)\}$ 为渐近稳定的.

下面利用引理3给出系统(5)零解渐近稳定的一个充分条件.

定理1 若存在矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 和正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足

$$EP^T = PE^T \geq 0, \quad (7a)$$

$$AP^T + PA^T + A_\tau P^T Q^{-1} P A_\tau^T + Q < 0, \quad (7b)$$

则系统(5)是零解渐近稳定的.

证 由引理1知, 存在非奇异矩阵 M, N , 使得系统(5) r.s.e 于下面的系统:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = A_{11}y_1(t) + A_{\tau 11}y_1(t-\tau) + A_{\tau 12}y_2(t-\tau), \\ 0 = y_2(t) + A_{\tau 21}y_1(t-\tau) + A_{\tau 22}y_2(t-\tau), \\ y(t) = N^{-1}\varphi(t) = \bar{\varphi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix}, t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (8)$$

记

$$\bar{E} = MEN = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9a)$$

$$\bar{A} = MAN = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_\tau = MA_\tau N = \begin{bmatrix} A_{\tau 11} & A_{\tau 12} \\ A_{\tau 21} & A_{\tau 22} \end{bmatrix}, \quad (9b)$$

$$x(t) = N \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}.$$

注意到式(7)成立是 r.s.e 下的不变量, 因此对于系统(8), 存在矩阵 $\bar{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 及正定矩阵 $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 满足

$$\bar{E}\bar{P}^T = \bar{P}\bar{E}^T \geq 0, \quad (10a)$$

$$\bar{A}\bar{P}^T + \bar{P}\bar{A}^T + \bar{A}_\tau \bar{P}^T \bar{Q}^{-1} \bar{P} \bar{A}_\tau^T + \bar{Q} < 0. \quad (10b)$$

显然满足上式的矩阵 $\bar{P}$ 形如 $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}$, 且 $P_{11} >$

$0, \bar{P}\bar{E}^T = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 且 $\bar{P}$ 可逆. 定义

$$q(t, y(t)) = y_1^T y_1,$$

$$V(0, \bar{\varphi}) = \varphi_1^T(0) P_{11}^{-1} \varphi_1(0) +$$

$$\int_{-\tau}^0 [\varphi_1^T(s) \varphi_2^T(s)] \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} \begin{bmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \end{bmatrix} ds,$$

$$\forall \bar{\varphi} \in S_{+\infty}(0, +\infty),$$

系统(8)过 $(0, \bar{\varphi})$ 的解记为 $y(t)$, 则

$$V(t, y_t) = y_1^T(t) P_{11}^{-1} y_1(t) +$$

$$\int_{t-\tau}^t [y_1^T(s) y_2^T(s)] \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} ds. \quad (11)$$

且

$$\lambda_{P_{11}^{-1}} \|q(t, y(t))\| \leq V(t, y_t) \leq$$

$$y_1^T(t) P_{11}^{-1} y_1(t) + \|\bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T}\| \cdot \|y_t\|^2 \cdot \tau \leq (\|P_{11}^{-1}\| + \|\bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T}\| \cdot \tau) \|y_t\|^2.$$

其中 $\lambda_{P_{11}^{-1}}$ 表示 P_{11}^{-1} 的最小特征值, 又式(11)可以写为

$$V(t, y_t) = y^T(t) \bar{P}^{-1} \bar{E} y(t) +$$

$$\int_{t-\tau}^t [y_1^T(s) y_2^T(s)] \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} ds, \quad (12)$$

则

$$\dot{V}(t, y_t)|_{(8)} =$$

$$y^T(t) \bar{P}^{-1} \bar{E} \dot{y}(t) + y^T(t) \bar{E}^T \bar{P}^{-T} y(t) +$$

$$y^T(t) \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t) -$$

$$y^T(t-\tau) \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t-\tau) =$$

$$2y^T(t) \bar{P}^{-1} \bar{A} y(t) + y^T(t) \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t) +$$

$$2y^T(t) \bar{P}^{-1} \bar{A}_\tau y(t-\tau) -$$

$$y^T(t-\tau) \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t-\tau) =$$

$$2y^T(t) \bar{P}^{-1} \bar{A} y(t) + y^T(t) \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t) +$$

$$y^T(t) \bar{P}^{-1} \bar{A}_\tau \bar{P}^T \bar{Q}^{-1} \bar{P} \bar{A}_\tau^T y(t) - (A_\tau^T \bar{P}^{-T} y(t) -$$

$$\bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t-\tau))^T \cdot \bar{P}^T \bar{Q}^{-1} \bar{P} \cdot$$

$$(\bar{A}_\tau^T \bar{P}^{-T} y(t) - \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t-\tau)) \leq$$

$$y^T(t) \bar{P}^{-1} (\bar{A} \bar{P}^T + \bar{P} \bar{A}^T +$$

$$\bar{A}_\tau \bar{P}^T \bar{Q}^{-1} \bar{P} \bar{A}_\tau^T + \bar{Q}) \bar{P}^{-T} y(t) =$$

$$-y^T(t) W y(t) \leq -\lambda_W y^T(t) y(t) =$$

$$-\lambda_W (y_1^T(t) y_1(t) + y_2^T(t) y_2(t)) \leq$$

$$-\lambda_W y_1^T(t) y_1(t).$$

这里 λ_W 表示 W 的最小特征值, 而

$$W = -\bar{P}^{-1} (\bar{A} \bar{P}^T + \bar{P} \bar{A}^T + \bar{A}_\tau \bar{P}^T \bar{Q}^{-1} \bar{P} \bar{A}_\tau^T + \bar{Q}) \bar{P}^{-T}.$$

所以由引理3知, 系统(8)的零解关于 $q(t, y) = y_1^T(t) y_1(t)$ 一致稳定, 从而有 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, 使得对 $\forall \bar{\varphi} \in S_k(0, +\infty) \cap B(0, \delta)$, 系统(8)过 $(0, \bar{\varphi})$ 的解满足 $y_1^T(t) y_1(t) \leq \varepsilon^2$, 即 $q(t, y(t))$ 在 $[0, +\infty)$ 上有上界. 设其界为 $M^2, M > 0$, 则对 $\forall t \in [0, +\infty)$, 有 $\|y_1(t)\| \leq M$. 不失一般性, 可设对 $\forall t \in [-\tau, +\infty)$, 有 $\|y_1(t)\| \leq M$ 成立. 下证 $\forall t \in [0, +\infty)$, $|q(t, y(t))|$ 有上界. 为此, 先证 $\rho(A_{\tau 22}) < 1$, 这里 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径.

由 Schur 补知, 式(10b)成立当且仅当有下式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}P^T + \bar{P}A^T + \bar{Q} & \bar{A}_\tau \bar{P}^T \\ \bar{P}A_\tau^T & -\bar{Q} \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

令 $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}$, 将 $\bar{P}, \bar{Q}$ 与式(9a)代入上式, 则有

$$\begin{bmatrix} P_{22} + P_{22}^T + Q_{22} & A_{\tau 22} P_{22}^T \\ P_{22} A_{\tau 22}^T & -Q_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (14)$$

由于 $\bar{P}$ 可逆, 从而 P_{22} 可逆, 上式两边左乘 $T = \begin{bmatrix} P_{22}^{-1} \\ P_{22}^{-1} \end{bmatrix}$, 右乘 T^T , 则有

$$\begin{bmatrix} P_{22}^{-1} + P_{22}^{-T} + \bar{Q}_{22} & P_{22}^{-1} A_{\tau 22}^T \\ A_{\tau 22} P_{22}^{-T} & -\bar{Q}_{22} \end{bmatrix} < 0.$$

其中 $\bar{Q}_{22} = P_{22}^{-1} Q_{22} P_{22}^{-T} > 0$, 上式两边左乘 $S = \begin{bmatrix} -A_{\tau 22}^T & I \end{bmatrix}$, 右乘 S^T , 则有

$$A_{\tau 22}^T \bar{Q}_{22} A_{\tau 22} - \bar{Q}_{22} < 0.$$

于是有 $\rho(A_{\tau 22}) < 1$, 所以 $\exists$ 正整数 N_0 , 当 $n \geq N_0$ 时, $\|A_{\tau 22}^n\| < 1$. 由式(8)知

$$\begin{aligned} & \|\dot{q}(t, y(t))\| = \\ & 2\|y_1^T(t)[A_{11}y_1(t) + A_{\tau 11}y_1(t-\tau) + A_{\tau 12}y_2(t-\tau)]\| \leq \\ & 2[\|A_{11}\| M^2 + \|A_{\tau 11}\| M^2 + \|A_{\tau 12}\| M\|y_2(t-\tau)\|]. \end{aligned}$$

又对 $\forall t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, 由系统(8)有

$$\begin{aligned} y_2(t) &= -A_{\tau 21}y_1(t-\tau) - A_{\tau 22}y_2(t-\tau) = \\ & -A_{\tau 21}y_1(t-\tau) - A_{\tau 22}(-A_{\tau 21}y_1(t-2\tau) - \\ & A_{\tau 22}y_2(t-2\tau)) = \\ & -A_{\tau 21}y_1(t-\tau) - A_{\tau 22}[-A_{\tau 21}y_1(t-2\tau) - \\ & A_{\tau 22}(-A_{\tau 21}y_1(t-3\tau) - A_{\tau 22}y_2(t-3\tau))]. \end{aligned} \quad (15)$$

于是有

$$\begin{aligned} \|y_2(t)\| &\leq \\ & \beta + \|A_{\tau 22}\|\beta + \|A_{\tau 22}^2\|\beta + \cdots + \|A_{\tau 22}^k\|\beta. \end{aligned}$$

其中

$$\beta = \max \{ \|A_{\tau 21}\| M, \max \{ \|\varphi_2(\theta)\|, \theta \in [-\tau, 0] \} \}.$$

所以

$$\begin{aligned} \|y_2(t)\| &\leq \\ & \beta + \|A_{\tau 22}\|\beta + \cdots + \|A_{\tau 22}^{N_0-1}\|\beta + \\ & \|A_{\tau 22}^{N_0}\|\beta + \cdots + \|A_{\tau 22}^k\|\beta \leq \\ & \bar{M}\beta + \|A_{\tau 22}^{N_0}\|(\beta + \|A_{\tau 22}\|\beta + \cdots + \|A_{\tau 22}^{k-N_0}\|\beta) \leq \\ & \bar{M}\beta + \|A_{\tau 22}^{N_0}\|\bar{M}\beta + \|A_{\tau 22}^{N_0}\|^2(\beta + \\ & \|A_{\tau 22}\|\beta + \cdots + \|A_{\tau 22}^{k-2N_0}\|\beta) \leq \cdots \leq \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{M}\beta}{1 - \|A_{\tau 22}^{N_0}\|}.$$

其中, $\bar{M} = \sum_{k=0}^{N_0-1} \|A_{\tau 22}^k\|$, 即 $\|y_2(t)\|$ 有界, 从而

$\|\dot{q}(t, y(t))\|$ 有界. 由引理3知, 系统(8)的零解关于 $\{(y_1^T(t)y_1(t), [0, +\infty))\}$ 一致稳定且渐近稳定.

由于系统(8)的零解关于 $\{y_1^T(t)y_1(t), [0, +\infty)\}$ 一致稳定, 故 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta \in (0, \varepsilon)$, 使得 $\forall \varphi \in B(0, \delta) \cap S_k(0, +\infty)$,

$$\|q(t, y(t))\| = y_1^T(t)y_1(t) < \varepsilon^2.$$

由上面证得 $\|y_2(t)\| \leq \tilde{M}\beta_1$. 其中

$$\tilde{M} = \frac{\bar{M}}{1 - \|A_{\tau 22}^{N_0}\|},$$

$$\beta_1 = \max \{ \|A_{\tau 21}\| \varepsilon, \varepsilon \},$$

故系统(8)的零解关于 $\{y, [0, +\infty)\}$ 一致稳定.

由式(15)知, 对 $\forall t \in [(k-1)\tau, k\tau]$ 有

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \\ & (-A_{\tau 22})^k \varphi_2(t-k\tau) - \sum_{i=1}^k (-A_{\tau 22})^{i-1} A_{\tau 21} y_1(i-\tau\tau). \end{aligned}$$

由于 $k \geq N_0$ 时, $\|(A_{\tau 22})^k\| < 1$, 则有 $\lim_{k \rightarrow \infty} (A_{\tau 22})^k = 0$, 并且由 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = 0$ 得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0$, 所以系统(8)的零解关于 $\{y, [0, +\infty)\}$ 渐近稳定. 从而, 系统(5)零解渐近稳定. 定理证毕.

推论 1 若存在矩阵 $\tilde{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 和正定矩阵 $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{P}E = E^T \tilde{P}^T \geq 0, \\ \tilde{P}A + A^T \tilde{P}^T + \tilde{Q} + \tilde{P}A_\tau \tilde{Q}^{-1} A_\tau^T \tilde{P}^T < 0, \end{cases} \quad (16)$$

则系统(5)零解渐近稳定.

证 只需在式(7)两边同时左乘 P^{-1} , 右乘 P^{-T} , 且令 $\tilde{P} = P^{-1}$, $\tilde{Q} = P^{-1}QP^{-T}$ 即可.

注 4 显然推论 1 为文献[12]中相应结果的一个推广.

注 5 当 $E = I_n$ 时, 推论 1 即为文献[13]中定理 1.

注 6 当 $A_\tau = 0$ 时, 由文献[11]知, 推论 1 的条件即为相应的无滞后广义系统容许的充要条件.

注 7 由于奇异时滞系统的复杂性, 本文不能保证系统(5)时全局渐近稳定的.

下面给出无控制的受扰系统

$$\begin{cases} E \dot{x}(t) = Ax(t) + A_\tau x(t-\tau) + Dw(t), \\ z(t) = Cx(t), \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0) \end{cases} \quad (17)$$

内稳定,且满足 H_∞ 范数界的一个充分条件.

定理 2 若存在矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足

$$\begin{cases} PE = E^T P^T \geq 0, \\ PA + A^T P^T + Q + PA_r Q^{-1} A_r^T P^T + \\ \gamma^{-2} PDD^T P^T + C^T C < 0, \end{cases}$$

则系统 (17) 内稳定, 且满足 H_∞ 范数界, 即 $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$.

证 由推论 1 知系统 (17) 内稳定. 下证 $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$, 这里

$$T_{zw}(s) = C(sE - (A + A_r e^{-s\tau}))^{-1} D.$$

由 H_∞ 范数的定义, 只需证明

$$\gamma^2 I - T_{zw}^T(-j\omega) T_{zw}(j\omega) \geq 0$$

即可.

令

$$S = -(A^T P^T + PA + PA_r Q^{-1} A_r^T P^T + Q + C^T C + \gamma^{-2} PDD^T P^T) > 0,$$

则

$$-A^T P^T - PA - PA_r Q^{-1} A_r^T P^T - Q - C^T C - \gamma^{-2} PDD^T P^T - S = 0.$$

上式左边同时加上并减去 $j\omega PE, PA_r e^{-j\omega\tau}, A_r^T P e^{j\omega\tau}$, 注意 $PE = E^T P^T$, 则有

$$\begin{aligned} & (-j\omega E^T - A^T - A_r^T e^{j\omega\tau}) P^T + P(j\omega E - A - A_r e^{-j\omega\tau}) - \gamma^{-2} PDD^T P^T - C^T C - S - \\ & (A_r^T P^T e^{-j\omega\tau} - Q)^T Q^{-1} (A_r^T P^T e^{j\omega\tau} - Q) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

令

$$\begin{cases} W(j\omega) = (A_r^T P e^{-j\omega\tau} - Q)^T Q^{-1} (A_r^T P^T e^{j\omega\tau} - Q), \\ X(j\omega) = (j\omega E - A - A_r e^{-j\omega\tau})^{-1}. \end{cases} \quad (19)$$

令式 (18) 两边同时左乘 $(X(-j\omega)D)^T$, 右乘 $(X(j\omega)D)$, 并注意 $T_{zw}(j\omega) = CX(j\omega)D$, 则有

$$\begin{aligned} & T_{zw}^T(-j\omega) T_{zw}(j\omega) = \\ & D^T P^T X(j\omega) D + (D^T P X(-j\omega) D)^T - \\ & \gamma^{-2} (D^T P^T X(-j\omega) D)^T (D^T P^T X(j\omega) D) - \\ & (X(-j\omega) D)^T (W(j\omega) + S) (X(j\omega) D). \end{aligned}$$

分别用 $\gamma^2 I$ 减去上式两边, 并注意 $W(j\omega) + S > 0$, 则有

$$\begin{aligned} & \gamma^2 I - T_{zw}^T(-j\omega) T_{zw}(j\omega) \geq \\ & \gamma^2 I - D^T P^T X(j\omega) D - (D^T P X(-j\omega) D)^T + \\ & \gamma^{-2} (D^T P^T X(-j\omega) D)^T (D^T P^T X(j\omega) D) = \\ & (\gamma I - \gamma^{-1} D^T P^T X(-j\omega) D)^T (\gamma I - \end{aligned}$$

$$\gamma^{-1} D^T P^T X(j\omega) D) \geq 0.$$

注 8 当 $E = I_n$ 时, 定理 2 即为文献 [13] 中定理 2.

注 9 与注 2 类似, 当 $A_r = 0$ 时, 定理 2 的条件恰为相应的无滞后广义系统容许的且满足 H_∞ 范数界的充要条件.

由定理 2 得控制器 (4) 鲁棒镇定系统 (1) ~ (3), 且使闭环满足 H_∞ 范数界的一个充分条件.

定理 3 若存在矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 以及正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 对所有满足 (3) 的不确定项成立下面的不等式

$$PE = E^T P^T \geq 0, \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} & P[A + BK + GF(\sigma)(E_a + E_b K)] + [A + BK + \\ & GF(\sigma)(E_a + E_b K)]^T P^T + Q + P(A_r + \\ & GF(\sigma)E_r)Q^{-1}(A_r + GF(\sigma)E_r)^T P^T + C^T C + \\ & \gamma^{-2} P(D + GF(\sigma)E_d)(D + GF(\sigma)E_d)^T P^T < 0, \end{aligned} \quad (20b)$$

则由式 (1) ~ (4) 构成的闭环系统鲁棒稳定, 且 $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$.

定理 3 给出了系统 (1) ~ (3) 存在鲁棒控制器的一个充分条件, 但该条件含不确定性, 无法应用, 下面将利用线性矩阵不等式的形式给出定理 3 的一个等价形式.

引理 4 [14] 给定矩阵 $H, E, F(\sigma): F^T(\sigma)F(\sigma) \leq I$ 和对称负定矩阵 $Q < 0$, 则, 对任意的 $F(\sigma): F^T(\sigma)F(\sigma) \leq I$, 不等式 $Q + HF(\sigma)E + E^T F^T(\sigma)H^T < 0$ 成立的充要条件是存在某个 $\epsilon > 0$, 使得不等式 $Q + \epsilon HH^T + \epsilon^{-1} E^T E < 0$ 成立.

定理 4 对于系统 (1) ~ (3), 存在矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 非奇异矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 及正定矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足不等式 (20) 当且仅当存在一个正数 $\epsilon > 0$, 非奇异矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 以及正定矩阵 $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 满足下面的不等式

$$EX = X^T E^T \geq 0, \quad (21a)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & A_r V & D & \Sigma_1^T & X^T C^T & X^T \\ V A_r^T & -V & 0 & V E_r^T & 0 & 0 \\ D^T & 0 & -\gamma^2 I & E_d^T & 0 & 0 \\ \Sigma_1 & E_r V & E_d & -\epsilon I & 0 & 0 \\ CX & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ X & 0 & 0 & 0 & 0 & -V \end{bmatrix} < 0. \quad (21b)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= AX + X^T A^T + BW + W^T B^T + \epsilon GG^T, \\ \Sigma_1 &= E_a X + E_b W. \end{aligned}$$

且若不等式 (21) 有解, 则状态反馈控制律 $u(t) =$

$WX^{-1}x(t)$ 为系统(1)~(3)鲁棒 H_∞ 控制问题的解.

证 由 Schur 补知, 不等式(20)有解 K, P, Q , 当且仅当下面的不等式有解 K, P, Q :

$$PE = E^T P^T \geq 0, \quad (22a)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma & \Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \Sigma_2^T & -Q & 0 \\ \Sigma_3^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (22b)$$

其中

$$\Sigma = P[A + BK + GF(\sigma)(E_a + E_b K)] + [A + BK + GF(\sigma)(E_a + E_b K)]^T P^T + C^T C + Q,$$

$$\Sigma_2 = P(A_\tau + GF(\sigma)E_\tau),$$

$$\Sigma_3 = P(D + GF(\sigma)E_d).$$

记

$$Y = \begin{bmatrix} \Sigma_4 & PA_\tau & PD \\ A_\tau^T P^T & -Q & \\ D^T P^T & & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

其中

$$\Sigma_4 = P(A + BK) + (A + BK)^T P^T + C^T C + Q,$$

则(22b)又可写为

$$Y + \begin{bmatrix} PG \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F(\sigma) \begin{bmatrix} E_a + E_b K & E_\tau & E_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_a + E_b K & E_\tau & E_d \end{bmatrix}^T F^T(\sigma) \begin{bmatrix} PG \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T < 0. \quad (23)$$

由引理4知不等式(23)有解 K, P, Q , 当且仅当存在 $\varepsilon > 0$ 使得下面的不等式有解 K, P, Q :

$$Y + \varepsilon \begin{bmatrix} PG \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PG \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T + \varepsilon^{-1} \begin{bmatrix} E_a + E_b K & E_\tau & E_d \end{bmatrix}^T \cdot$$

$$\begin{bmatrix} E_a + E_b K & E_\tau & E_d \end{bmatrix} < 0,$$

即

$$\begin{bmatrix} \Omega & \Sigma_5 & \Sigma_6 \\ \Sigma_5^T & -Q + \varepsilon^{-1} E_\tau^T E_\tau & \varepsilon^{-1} E_\tau^T E_d \\ \Sigma_6^T & \varepsilon^{-1} E_d^T E_\tau & -\gamma^2 I + \varepsilon^{-1} E_d^T E_d \end{bmatrix} < 0. \quad (24)$$

其中

$$\Omega = P(A + BK) + (A + BK)^T P^T + C^T C + Q + \varepsilon PGG^T P^T + \varepsilon^{-1}(E_a + E_b K)^T (E_a + E_b K),$$

$$\Sigma_5 = PA_\tau + \varepsilon^{-1}(E_a + E_b K)^T E_\tau,$$

$$\Sigma_6 = PD + \varepsilon^{-1}(E_a + E_b K)^T E_d.$$

由 Schur 补知: 不等式(24)有解当且仅当下式有解:

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & PA_\tau & PD & \Sigma_7^T & C^T & I \\ A_\tau^T P^T & -Q & 0 & E_\tau^T & 0 & 0 \\ D^T P^T & 0 & -\gamma^2 I & E_d^T & 0 & 0 \\ \Sigma_7 & E_\tau & E_d & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

这里

$$\hat{A} = P(A + BK) + (A + BK)^T P^T + \varepsilon PGG^T P^T,$$

$$\Sigma_7 = E_a + E_b K,$$

在不等式两边同时左乘 T , 右乘 T^T , 其中 $T = \text{diag}\{P^{-1}, Q^{-1}, I, I, I, I\}$, 且令 $X = P^{-T}$, $W = KP^{-T}$, $V = Q^{-1}$, 则不等式(25)有解等价于不等式(21b)有解, 相应地不等式(21a)等价于(20a). 定理证毕.

4 例子(Example)

考虑下面的不确定奇异时滞系统

$$\begin{cases} \dot{E}x(t) = (A + rA_0)x(t) + (A_\tau + sA_{\tau 0})x(t - \tau) + \\ \quad (B + qB_0)u(t) + (D + PD_0)w(t), \\ z(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (26)$$

其中

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, A_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.2 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{\tau 0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = [-1 \ 2],$$

$$|r| \leq 0.1, |s| \leq 0.1, |q| \leq 0.1, |p| \leq 0.1.$$

定义

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_a = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, E_\tau = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$F = 10 \times \text{diag}\{r, s, q, p\},$$

则系统(26)可写为

$$\begin{cases} \dot{E}x(t) = \\ (A + GFE_a)x(t) + (A_\tau + GFE_\tau)x(t - \tau) + \\ (B + GFE_b)u(t) + (D + GFE_d)w(t), \\ z(t) = Cx(t). \end{cases}$$

根据定理4,由 Matlab 中 LMI 工具箱解得系统(26)的鲁棒 H_∞ 控制器

$$u(t) = [-3.1200 \quad -0.3069] x(t).$$

5 结论(Conclusion)

本文首先得到无控制的标称奇异时滞系统内稳定且满足 H_∞ 范数界的一个充分条件,并由此讨论了含不确定项的线性奇异时滞系统鲁棒 H_∞ 控制问题,得到了问题可解的一个充分条件,该条件是与滞后常数 τ 无关的,且用 LMI 的方法给出了控制器的设计.

参考文献(References):

- [1] SU H Y, CHU J. Stabilization of a class of uncertain time-delay systems containing saturating actuators [J]. *Int J of Systems Science*, 1999, 30(11): 1193 - 1203.
- [2] JANKOVIC M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1048 - 1060.
- [3] LI Xi, de SOUZA C E. Criteria for robust stabilization of uncertain linear systems with state delay [J]. *Automatica*, 1997, 33(9): 1657 - 1662.
- [4] LEE B, LEE J G. Robust stability and stabilization of linear delayed systems with structured uncertainty [J]. *Automatica*, 1999, 35(10): 1149 - 1154.
- [5] XIE Lihua, FU Minyue, de SOUZA C E. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1253 - 1256.
- [6] de SOUZA C E, LI Xi. Delay-dependent robust H_∞ control of uncertain linear state-delayed systems [J]. *Automatica*, 1999, 35(11): 1313 - 1321.
- [7] CHOI H H, CHUNG M J. Robust observer-based H_∞ controller design for linear uncertain time-delay systems [J]. *Automatica*, 1997, 33(9): 1749 - 1752.
- [8] SU H Y, CHU J. Robust H_∞ control for linear time-varying uncertain time-delay systems via dynamic output feedback [J]. *Int J of Systems Science*, 1999, 30(10): 1093 - 1107.
- [9] 刘永清, 谢湘生. 大型动力系统的理论与应用(卷8)——滞后广义系统的稳定、镇定与控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.
(LIU Yongqing, XIE Xiangsheng. *Theory and Application of Large-scale Dynamic Systems (Vol. 8)-Stability, Stabilization and Control for Delay Singular Systems* [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998.)
- [10] CAMPBELL S L. Singular linear systems of differential equations with delays [J]. *Application Analysis- II*, 1980, (2): 129 - 136.
- [11] DAI L. Singular Control Systems [M]. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [12] 李远清, 刘永清. 广义泛函微分方程解的稳定性[J]. 应用数学学报, 1999, 22(1): 130 - 138.
(LI Yuanqing, LIU Yongqing. Stability of solutions of singular functional differential equations [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1999, 22(1): 130 - 138.)
- [13] LEE J H, KIM S W, KWON W H. Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(2): 159 - 162.
- [14] GAHINET P, APKARIAN P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control [J]. *Int J of Robust Nonlinear Control*, 1994, 4(4): 421 - 448.

作者简介:

冯俊娥 (1971 —), 女, 现于山东大学数学与系统科学学院攻读博士学位, 从事时滞系统研究. E-mail: thefengs@163.com;

程兆林 (1939 —), 男, 山东大学数学与系统科学学院教授, 博士生导师, 从事奇异系统鲁棒控制, 非线性系统鲁棒控制, 多变量控制理论与应用, 时滞系统的研究. E-mail: chengzha@jn_public.sd.cn-info.net.