第6期
2023年12月

雷达科学与技术
Radar Science and Technology

Vol.21 No.6
December 2023

DOI:10.3969/j.issn.1672-2337.2023.06.009

基于矩阵因子重构的MIMO雷达角度估计方法

陈金立，蒋志军，朱熙铖，李家强

（南京信息工程大学电子与信息学院，江苏南京 210044）

摘　要： 多输入多输出（MIMO）雷达中部分失效阵元会使得阵列采样数据丢失，从而导致较差的角度估计性能。为此，提出一种基于不完整矩阵因子重构的MIMO雷达角度估计方法。首先，根据协方差矩阵可分解的性质，提取维度较低的矩阵因子，并将协方差矩阵中缺失数据恢复问题转化为矩阵因子重构问题。然后，为了利用矩阵因子中元素的相关性，对不完整矩阵因子建立核范数约束下的低秩Hankel矩阵重构模型；为避免传统的核范数最小化求解中计算复杂度高的问题，采用低秩矩阵拟合方法将Hankel矩阵分解为两个维度较低的矩阵，等价表达了核范数约束。最后，利用交替方向乘子法（ADMM）对该矩阵重构模型进行求解。仿真结果表明，本文方法可以有效地重构出矩阵因子中的缺失元素，进而实现阵列协方差矩阵中丢失数据的补全，改善阵元失效下的MIMO雷达角度估计性能。

关键词： MIMO雷达；阵元失效；角度估计；Hankel矩阵；矩阵因子重构

中图分类号：TN911.23；TN958　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1672-2337（2023）06-0653-08

Angle Estimation Method in MIMO Radar Based on Matrix Factor Reconstruction

CHEN Jinli，JIANG Zhijun，ZHU Xicheng，LI Jiaqiang

（*School of Electronics and Information Engineering, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing* 210044, *China*）

Abstract: Partial failed elements in multiple input multiple output（MIMO）radar may result in the loss of array sampling data and thus poor angle estimation performance. To mitigate this performance degradation，a novel MIMO radar angle estimation method is proposed based on incomplete matrix factor reconstruction. The method firstly utilizes the decomposability property of the covariance matrix to extract the low-dimensional matrix factor, transforming the problem of missing data recovery in the covariance matrix into a problem of reconstructing the matrix factor. Afterwards, a low-rank Hankel matrix reconstruction model is established by exploiting the correlation between the elements in the matrix factor and imposing a nuclear norm constraint on the incomplete matrix factor. To avoid the high computational complexity of the traditional nuclear norm minimization problem, this method decomposes the Hankel matrix into two lower-dimensional matrices using the low-rank matrix fitting method. This realizes an equivalent representation of the nuclear norm constraint. Finally, the alternating direction method of multipliers（ADMM）is employed to solve the matrix reconstruction model. Simulation results demonstrate the effectiveness of the proposed method in reconstructing the missing elements within matrix factors, thereby completing lost entries in array sampling data and improving angle estimation performance for MIMO radar under element failure.

Key words: MIMO radar; array element failure; angle estimation; Hankel matrix; matrix factor reconstruction

0　引　言

相较于传统的相控阵雷达，MIMO雷达利用波形分集技术形成大孔径虚拟阵列，具有更强的抗干扰能力以及更优的参数估计性能[1-7]。角度估计是MIMO雷达系统探测目标信息的核心研究内容之一。众多学者先后提出Capon算法[8]、MUSIC算法[9]、ESPRIT算法[10]等多种方法应用于双基地MIMO雷达的目标波离角（Direction of Departure, DOD）和波达角（Direction of Arrival, DOA）估计。然而，在实际大规模雷达阵列系统中，由于工作环境恶劣、元器件老化以及愈发复杂的雷达系统等因素的影响，增加了MIMO雷达系统中阵元的受损概率[11-13]。部分阵列天线的损坏会造成阵列采样数据的丢失，产生较差的角度估计性能[14]。因此，在MIMO雷达中，有效地应对阵元故障对目标角度

收稿日期：2023-05-10；修回日期：2023-06-21

基金项目：国家自然科学基金（No.62071238）；江苏省自然科学基金（No.BK20191399）

估计带来的不利影响具有重要的意义。

当阵列中存在故障阵元时，阵列接收数据会出现大量的丢失[15-17]。为解决阵元失效导致的角度估计算法性能下降的问题，文献[18]将深度神经网络(Deep Neural Network, DNN)应用于阵元缺损时的DOA估计问题，联合利用去噪自动编码器(Denoising Autoencoder, DAE)和并行网络实现受损数据的分类和重建，但该方法需要大量的训练样本来提高DNN的DOA估计性能。文献[19]对存在故障阵元的协方差矩阵进行差分处理，构造虚拟差分阵列，利用正常的冗余虚拟阵元数据来填充故障阵元的缺失数据，进而获得完整的协方差矩阵，实现目标DOA的估计。文献[20]将该方法拓展应用于阵元故障下单基地MIMO雷达DOA估计问题中[20]，为了保证MIMO雷达的协方差矩阵具有Toeplitz结构，要求发射阵元间距为接收阵元间距的N倍，其中N为接收阵元数，因此该方法的应用具有较大的局限性。文献[21]提出一种结构化的MC(Matrix Completion)算法，该方法首先将虚拟阵列协方差矩阵构造为不存在整行整列元素缺失的四重Hankel矩阵，然后利用低秩MC算法恢复出缺失数据。然而，该方法需利用Vandermonde分解等方法实现角度的精确估计，且四重Hankel矩阵操作造成了巨大的矩阵维度扩张问题，导致该算法运算时间变长。

在双基地MIMO雷达中，为更好地解决因阵元缺损而导致的丢失数据恢复问题，并改善阵元缺损时的角度估计性能，提出一种基于不完整矩阵因子重构的MIMO雷达角度估计方法。先使用奇异值分解方法从不完整的协方差矩阵中提取出维度较低的矩阵因子，并将协方差矩阵缺失数据恢复问题转换为不完整矩阵因子重构问题。然后，利用矩阵因子行和列间的结构特性，将不完整矩阵因子变换为块Hankel矩阵，并对其施加核范数约束从而建立不完整矩阵因子重构模型。此外，为避免核范数求解中运算量较大的奇异值分解操作，利用Hankel矩阵可分解性质，重新表征了核范数约束问题。最后，采用ADMM算法求解上述矩阵因子重构模型。仿真实验表明本文方法可以有效地恢复MIMO雷达不完整矩阵因子中的缺失数据，在阵元故障时仍获得较高精度的角度估计，并具有较低的计算复杂度。

1 阵元失效MIMO雷达信号模型

双基地MIMO雷达系统具有M个发射阵元和N个接收阵元，发射和接收阵元间隔分别为d_t和d_r，且收发阵列均为半波长间距的均匀线阵。发射阵列发射M个正交信号$\boldsymbol{W}=\left[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\cdots,\boldsymbol{w}_M\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{M\times K}$，且该信号满足$(1/K)\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}_{M\times M}$，其中，$K$为每个脉冲周期内的采样个数，$(\cdot)^{\mathrm{T}}$表示转置运算，$(\cdot)^{\mathrm{H}}$表示共轭转置运算。在空间远场内若存在$P$个非相干目标，第$p\left(p=1,2,\cdots,P\right)$个目标位于$\left(\theta_p,\varphi_p\right)$，其中$\theta_p$为波离方向角，$\varphi_p$为波达方向角。则在第$q\left(q=1,2,\cdots,Q\right)$个脉冲周期的接收信号$\boldsymbol{X}_q$表示为

$$\boldsymbol{X}_q=\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{s}_q\right)\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{Z}_q \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}=\left[\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\left(\varphi_1\right),\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\left(\varphi_2\right),\cdots,\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\left(\varphi_P\right)\right]\in\mathbb{C}^{N\times P}$为接收阵列导向矩阵，其中$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\left(\varphi_p\right)=\left[1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_{\mathrm{r}}\sin\left(\varphi_p\right)/\lambda},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2(N-1)\pi d_{\mathrm{r}}\sin\left(\varphi_p\right)/\lambda}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{N\times 1}$；$\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}=\left[\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}\left(\theta_1\right),\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}\left(\theta_2\right),\cdots,\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}\left(\theta_P\right)\right]\in\mathbb{C}^{M\times P}$为发射阵列导向矩阵，其中$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}\left(\theta_p\right)=\left[1,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi d_{\mathrm{t}}\sin\left(\theta_p\right)/\lambda},\cdots,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2(M-1)\pi d_{\mathrm{t}}\sin\left(\theta_p\right)/\lambda}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{M\times 1}$；$\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{s}_q\right)$表示由向量$\boldsymbol{s}_q$构成的对角矩阵，其中，$\boldsymbol{s}_q=\left[\beta_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi qf_{\mathrm{d}1}/f_{\mathrm{s}}},\beta_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi qf_{\mathrm{d}2}/f_{\mathrm{s}}},\cdots,\beta_P\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi qf_{\mathrm{d}P}/f_{\mathrm{s}}}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{P\times 1}$，$\beta_p$和$f_{\mathrm{d}p}$分别为第$p$个目标的反射系数和多普勒频率，$f_{\mathrm{s}}$为脉冲重复频率；$\boldsymbol{Z}_q\in\mathbb{C}^{M\times K}$为高斯白噪声矩阵。利用发射信号之间的正交特性，用$(1/K)\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}$右乘式(1)，则经匹配滤波后的输出为

$$\boldsymbol{Y}_q=\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{s}_q\right)\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}}+\tilde{\boldsymbol{Z}}_q,\ q=1,2,\cdots,Q \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{Y}_q=\boldsymbol{X}_q\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}/K$表示经匹配滤波后的接收信号矩阵；$\tilde{\boldsymbol{Z}}_q=\boldsymbol{Z}_q\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}/K$表示匹配滤波后的噪声矩阵。将$\boldsymbol{Y}_q=\boldsymbol{X}_q\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}/K$按列表示$MN\times 1$维列矢量，即

$$\boldsymbol{y}_q=\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\odot\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\right)\boldsymbol{s}_q+\boldsymbol{z}_q \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{y}_q=vec\left(\boldsymbol{Y}_q\right)$；$\boldsymbol{z}_q=vec\left(\tilde{\boldsymbol{Z}}_q\right)$；$vec(\cdot)$表示向量化处理；$\odot$表示Khatri-Rao积。$Q$个脉冲周期下的虚拟阵列输出矩阵$\boldsymbol{Y}$为

$$\boldsymbol{Y}=\left[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_Q\right]=\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\odot\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\right)\boldsymbol{S}+\boldsymbol{Z} \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{Y}=\left[\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_Q\right]\in\mathbb{C}^{MN\times Q}$,$\boldsymbol{S}=\left[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\cdots,\boldsymbol{s}_Q\right]\in\mathbb{C}^{P\times Q}$,$\boldsymbol{Z}=\left[\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_Q\right]\in\mathbb{C}^{MN\times Q}$。则$Q$个脉冲周期下的协方差矩阵$\boldsymbol{R}$可估计为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{H}}/Q=\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\odot\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\right)\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\odot\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{R}_Z \tag{5}$$

式中,$\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^{\mathrm{H}}/Q\in\mathbb{C}^{P\times P}$为信号协方差矩阵,$\boldsymbol{R}_Z=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{\mathrm{H}}/Q\in\mathbb{C}^{MN\times MN}$为噪声协方差矩阵。对于非相干目标,$\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}=\mathrm{diag}\left(\left[\beta_1{}^2,\beta_2{}^2,\cdots,\beta_P{}^2\right]\right)$。

在实际应用中,由于恶劣的外界环境和日益复杂的雷达系统等因素影响,天线阵列中出现部分阵元失效的概率增加,导致阵列采样信号的丢失。令Ω_{T}和Ω_{R}分别为发射和接收阵列中故障阵元的位置集合,由于失效阵元的存在,因此发射和接收导向矩阵中的一些行元素全为零,可表示为

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{t}}(m,:)=\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}\right)\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}=\begin{cases}\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}(m,:),m\notin\Omega_{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^{1\times P},m\in\Omega_{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}(m,:)=\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}\right)\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}=\begin{cases}\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}(n,:),n\notin\Omega_{\mathrm{R}}\\ \boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^{1\times P},n\in\Omega_{\mathrm{R}}\end{cases} \tag{7}$$

式中,$\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}\in\mathbb{R}^{M\times 1}$和$\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}\in\mathbb{R}^{N\times 1}$均为由0和1构成的向量。若第$m\left(m\in\Omega_{\mathrm{T}}\right)$个发射阵元故障,则$\left[\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}\right]_m=0$,其中,$\left[\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}\right]_m$表示向量$\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}$中第$m$个元素;若第$n\left(n\in\Omega_{\mathrm{R}}\right)$个接收阵元故障,则$\left[\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}\right]_n=0$,$\left[\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}\right]_n$表示向量$\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}$中第$n$个元素。阵元正常时,向量$\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}$和$\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}$中所有元素都为1。阵元失效下虚拟阵列输出信号矩阵$\tilde{\boldsymbol{Y}}$及其协方差矩阵$\tilde{\boldsymbol{R}}$分别表示为

$$\tilde{\boldsymbol{Y}}=\left(\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\odot\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{t}}\right)\boldsymbol{S}+\tilde{\boldsymbol{Z}} \tag{8}$$

$$\tilde{\boldsymbol{R}}=\tilde{\boldsymbol{Y}}\tilde{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{H}}/Q=\left(\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\odot\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{t}}\right)\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}\left(\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\odot\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{H}}+\tilde{\boldsymbol{R}}_Z \tag{9}$$

式中:$\tilde{\boldsymbol{Z}}=\left[\left(\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}\otimes\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}\right)\circ\boldsymbol{z}_1,\left(\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}\otimes\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}\right)\circ\boldsymbol{z}_2,\cdots,\left(\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}\otimes\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}\right)\circ\boldsymbol{z}_Q\right]$为阵元失效下的噪声矩阵,其中,$\circ$表示Hadamard积,$\otimes$表示Kronecker积;$\tilde{\boldsymbol{R}}_Z=\left(\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}\otimes\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}\right)\left(\boldsymbol{c}_{\mathrm{t}}\otimes\boldsymbol{c}_{\mathrm{r}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_Z$为阵元失效下的噪声协方差矩阵。

2　基于不完整矩阵因子重构的MIMO雷达角度估计

传统矩阵填充方法是依据矩阵的低秩特性来约束待重建矩阵,当缺失项随机分布在待重建矩阵内,可以精确地重建出完整矩阵[22]。然而,在双基地MIMO雷达中,由于失效阵元的存在,协方差矩阵中存在一些整行和整列中无观测数据的情况,这些缺失数据的位置不符合随机分布,这类数据缺失模式被称为结构性缺失[22]。此时,传统矩阵填充方法中的秩最小化不足以在恢复结构性缺失数据时产生足够的约束,例如对矩阵中整列缺失的元素直接填充零元素仍然将使得矩阵的秩最小,因此导致现有的矩阵填充算法无法恢复结构性缺失数据[22]。

2.1　不完整矩阵因子的重构模型

为解决协方差矩阵中结构性缺失数据重建问题,首先分析协方差矩阵的分解特性,根据式(5),阵元正常情况下完整的协方差矩阵$\boldsymbol{R}$可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}=&\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\odot\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\right)\boldsymbol{R}_{\mathrm{s}}\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\odot\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{R}_Z=\\&\left[\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\odot\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\right)\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{Q}}\right]\left[\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\odot\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\right)\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{Q}}\right]^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{R}_Z=\\&\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}+\boldsymbol{R}_Z\end{aligned} \tag{10}$$

式中,$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\odot\boldsymbol{A}_{\mathrm{t}}\right)\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{Q}}$为矩阵因子。当阵元出现故障时,协方差矩阵分解出的矩阵因子$\tilde{\boldsymbol{B}}=\left(\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{r}}\odot\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{t}}\right)\frac{\boldsymbol{S}}{\sqrt{Q}}$中会出现整行的缺失数据,此时无法直接通过MC算法恢复这些结构性的缺失数据。本文引入块Hankel矩阵操作对矩阵因子$\tilde{\boldsymbol{B}}$进行变换,建立如下矩阵因子重构模型:

$$\begin{aligned}\min_{\boldsymbol{B},\boldsymbol{R}}\quad&\mathrm{rank}\left(\mathcal{H}(\boldsymbol{B})\right)\\ \mathrm{s.t.}\quad&P_\Omega(\boldsymbol{R})=P_\Omega\left(\tilde{\boldsymbol{R}}\right),\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}\end{aligned} \tag{11}$$

式中:$\mathrm{rank}(\cdot)$表示矩阵的秩函数;$\boldsymbol{R}$为待恢复的完整协方差矩阵;$\tilde{\boldsymbol{R}}$为阵元故障下的协方差矩阵;$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{MN\times P}$为待重建矩阵因子;$\Omega$为$\boldsymbol{R}$中已知非零元素的索引集;$P_\Omega(\cdot)$表示矩阵在索引集$\Omega$上的投影;$\mathcal{H}(\cdot)$为块Hankel矩阵操作。

矩阵$\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{MN\times P}$可由$P$个列向量$\boldsymbol{b}_p\in\mathbb{C}^{MN\times 1}$ $\left(p=1,2,\cdots,P\right)$构成,即$\boldsymbol{B}=\left[\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_P\right]\in\mathbb{C}^{MN\times P}$,其中,$\boldsymbol{b}_p$表示矩阵$\boldsymbol{B}$的第$p$列元素组成的向量。列

向量 $\boldsymbol{b}_p$ 可由 N 个子列向量 $\boldsymbol{b}_p^n \in \mathbb{C}^{M\times 1}(n=1,2,\cdots,N)$ 构成，即 $\boldsymbol{b}_p=\left[\boldsymbol{b}_p^{1\mathrm{T}},\boldsymbol{b}_p^{2\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{b}_p^{N\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{MN\times 1}$，其中，子列向量 $\boldsymbol{b}_p^n=\left[b_p^{1,n},b_p^{2,n},\cdots,b_p^{M,n}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{M\times 1}$，而 $b_p^{m,n}(m=1,2,\cdots,M)$ 表示 $\boldsymbol{b}_p^n$ 中第 m 个元素。

将向量映射到Hankel矩阵的变换操作 $\mathscr{F}(\cdot)$ 定义为

$$\mathfrak{F}(\cdot):\boldsymbol{b}_p^n\in\mathbb{C}^{M\times 1}\rightarrow\mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^n\right)\in\mathbb{C}^{\gamma\times M-\gamma+1} \tag{12}$$

式中，$\gamma=\left\lfloor\dfrac{M+1}{2}\right\rfloor$，$\lfloor\cdot\rfloor$ 为向下取整运算。以子列向量 $\boldsymbol{b}_p^n$ 中的元素构造Hankel矩阵 $\mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^n\right)$

$$\mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^n\right)=\begin{bmatrix} b_p^{1,n} & b_p^{2,n} & \cdots & b_p^{M-\gamma+1,n} \\ b_p^{2,n} & b_p^{3,n} & \cdots & b_p^{M-\gamma+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_p^{\gamma,n} & b_p^{\gamma+1,n} & \cdots & b_p^{M,n} \end{bmatrix} \tag{13}$$

以Hankel矩阵 $\mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^n\right)$ 为子块矩阵，将 N 个子块矩阵 $\left\{\mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^n\right)\right\}_{n=1}^N$ 排列为矩阵 $\boldsymbol{H}_p=\left[\left(\mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^1\right)\right)^{\mathrm{T}},\left(\mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^2\right)\right)^{\mathrm{T}},\cdots,\left(\mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^N\right)\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^{N\gamma\times M-\gamma+1}$。

定义矩阵映射到块Hankel矩阵的操作 $\mathfrak{Q}(\cdot)$ 为

$$\mathfrak{Q}(\cdot):\boldsymbol{H}_p\in\mathbb{C}^{N\gamma\times M-\gamma+1}\rightarrow\mathfrak{Q}\left(\boldsymbol{H}_p\right)\in\mathbb{C}^{\gamma\eta\times(M-\gamma+1)(N-\eta+1)} \tag{14}$$

式中，$\eta=\left\lfloor\dfrac{N+1}{2}\right\rfloor$。以矩阵 $\boldsymbol{H}_p$ 构造的块Hankel矩阵 $\mathfrak{Q}\left(\boldsymbol{H}_p\right)\in\mathbb{C}^{\gamma\eta\times(M-\gamma+1)(N-\eta+1)}$ 可表示为

$$\mathfrak{Q}\left(\boldsymbol{H}_p\right)=\begin{bmatrix} \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^1\right) & \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^2\right) & \cdots & \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^{N-\eta+1}\right) \\ \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^2\right) & \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^3\right) & \cdots & \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^{N-\eta+2}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^\eta\right) & \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^{\eta+1}\right) & \cdots & \mathfrak{F}\left(\boldsymbol{b}_p^N\right) \end{bmatrix} \tag{15}$$

以块Hankel矩阵 $\mathfrak{Q}\left(\boldsymbol{H}_p\right)(p=1,2,\cdots,P)$ 为子块，将 P 个子块 $\left\{\mathfrak{Q}\left(\boldsymbol{H}_p\right)\right\}_{p=1}^P$ 构造为矩阵 $\boldsymbol{D}=\left[\mathfrak{Q}\left(\boldsymbol{H}_1\right),\mathfrak{Q}\left(\boldsymbol{H}_2\right),\cdots,\mathfrak{Q}\left(\boldsymbol{H}_P\right)\right]\in\mathbb{C}^{\gamma\eta\times(M-\gamma+1)(N-\eta+1)P}$。为了分析方便，本文用块Hankel矩阵操作 $\mathcal{H}(\cdot)$ 表示由矩阵因子 $\boldsymbol{B}$ 经过变换获得块Hankel矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的操作，即 $\boldsymbol{D}=\mathcal{H}(\boldsymbol{B})$。

若收发阵元数分别为 $M=5$，$N=3$，目标个数为 $P=3$，对虚拟阵列协方差矩阵分解后可得到矩阵因子 $\boldsymbol{B}\in\mathbb{C}^{15\times 3}$，由矩阵因子 $\boldsymbol{B}$ 构造块Hankel矩阵的操作过程如图1所示。

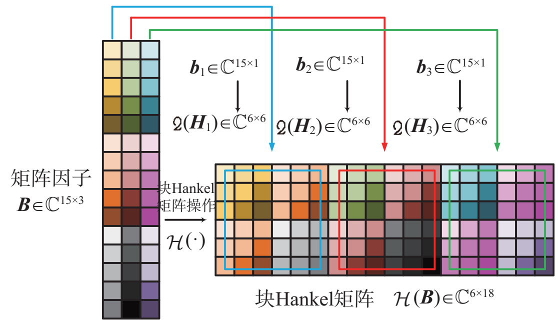


图1 块Hankel矩阵的操作过程示意图

由于式(11)中秩的求解为非凸问题，常用核范数 $\|\cdot\|_*$ 替代矩阵的秩函数，因此将式(11)转换为如下核范数最小化模型：

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{B},\boldsymbol{R}}\left\|\mathcal{H}(\boldsymbol{B})\right\|_* \\ &\text{s.t.}\ \ P_\Omega(\boldsymbol{R})=P_\Omega\left(\tilde{\boldsymbol{R}}\right),\ \boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}} \end{aligned} \tag{16}$$

2.2 优化算法

在求解式(16)时，需引入矩阵的SVD(Singular Value Decomposition)运算[23]。对一个维度为 $M\times N$ 的矩阵进行SVD运算时，一般其计算复杂度为 $O\left(\min\left(M^2N,MN^2\right)\right)$。由于本文引入了块Hankel矩阵操作，使得矩阵因子 $\boldsymbol{B}$ 的维度从 $MN\times P$ 扩大为 $\gamma\eta\times(M-\gamma+1)(N-\eta+1)P$，这样在采用SVD运算时会产生较高的计算复杂度。

为有效降低计算复杂度，将块Hankel矩阵等价表达为两个矩阵的乘积形式[24]，表示如下：

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} \tag{17}$$

式中，$\boldsymbol{U}\in\mathbb{C}^{\gamma\eta\times P}$，$\boldsymbol{V}\in\mathbb{C}^{(M-\gamma+1)(N-\eta+1)P\times P}$。$\mathcal{H}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$ 称为结构化的Hankel矩阵分解[25]，因此核范数可等价表示为

$$\left\|\mathcal{H}(\boldsymbol{B})\right\|_*=\min_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}:\mathcal{H}(\boldsymbol{U})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}}\left\|\boldsymbol{U}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\left\|\boldsymbol{V}\right\|_{\mathrm{F}}^2 \tag{18}$$

式中，$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}^2$ 为Frobenius范数。

根据式(18)，将式(16)转换为如下所示的不完整矩阵因子的重构模型：

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{B}}\left\|\boldsymbol{U}\right\|_{\mathrm{F}}^2+\left\|\boldsymbol{V}\right\|_{\mathrm{F}}^2 \\ &\text{s.t.}\ \ P_\Omega(\boldsymbol{B})=P_\Omega\left(\tilde{\boldsymbol{B}}\right),\mathcal{H}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} \end{aligned} \tag{19}$$

式中，$\tilde{\boldsymbol{B}}$ 为不完整矩阵因子，由阵元失效下协方差矩阵 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 分解所得。可以根据式 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{H}}$ 从恢复出

的完整矩阵因子$\boldsymbol{B}$估计出完整的协方差矩阵$\boldsymbol{R}$。

由于噪声的影响，完整矩阵$\boldsymbol{B}$与不完整$\tilde{\boldsymbol{B}}$之间会存在误差，在式(19)模型中加入噪声约束项。此外，式(19)中的等式约束项$\mathcal{H}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$在实际情况中也为近似相等，因此引入$\left\|\mathcal{H}(\boldsymbol{B})-\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}$最小二乘约束项使得$\mathcal{H}(\boldsymbol{B})$逼近$\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$。最终建立以下不完整矩阵因子填充的模型：

$$\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{B}}\|\boldsymbol{U}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\|\boldsymbol{V}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\frac{\lambda}{2}\left\|\mathcal{H}(\boldsymbol{B})-\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}+\mu\|\boldsymbol{E}\|_{\mathrm{F}}^{2}\\&\text{s.t.}\quad P_{\Omega}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=P_{\Omega}(\tilde{\boldsymbol{B}})\end{aligned}\tag{20}$$

式中：λ为正则化参数；μ为权重参数；$\boldsymbol{E}$为高斯白噪声矩阵，$\|\boldsymbol{E}\|_{\mathrm{F}}^{2}$为Frobenius范数约束的噪声项。将式(20)转化为无约束项的优化问题，则其增广拉格朗日函数可定义为

$$\begin{aligned}L_{\beta}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\boldsymbol{M})=\frac{1}{2}\left(\|\boldsymbol{U}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\|\boldsymbol{V}\|_{\mathrm{F}}^{2}\right)+\mu\|\boldsymbol{E}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\\\frac{\lambda}{2}\left\|\mathcal{H}(\boldsymbol{B})-\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}+\frac{\beta}{2}\left\|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}-\tilde{\boldsymbol{B}}+\boldsymbol{M}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}\end{aligned}\tag{21}$$

式中，$\boldsymbol{M}$为拉格朗日乘子矩阵，β为惩罚系数。在ADMM的框架下，通过固定多个变量的值，迭代更新一个变量的值来依次更新变量$\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{M}$。在第$k$次迭代中，各个变量的更新函数为

$$\boldsymbol{E}^{(k+1)}=\arg\min_{\boldsymbol{E}}\mu\|\boldsymbol{E}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\frac{\beta}{2}\left\|\boldsymbol{B}^{(k)}+\boldsymbol{E}-\tilde{\boldsymbol{B}}+\boldsymbol{M}^{(k)}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}\tag{22}$$

$$\boldsymbol{B}^{(k+1)}=\arg\min_{\boldsymbol{B}}\frac{\lambda}{2}\left\|\mathcal{H}(\boldsymbol{B})-\boldsymbol{U}^{(k)}\boldsymbol{V}^{(k)\mathrm{H}}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}+\frac{\beta}{2}\left\|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}^{(k+1)}-\tilde{\boldsymbol{B}}+\boldsymbol{M}^{(k)}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}\tag{23}$$

$$\boldsymbol{U}^{(k+1)}=\arg\min_{\boldsymbol{U}}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{U}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\frac{\lambda}{2}\left\|\mathcal{H}\left(\boldsymbol{B}^{(k+1)}\right)-\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{(k)\mathrm{H}}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}\tag{24}$$

$$\boldsymbol{V}^{(k+1)}=\arg\min_{\boldsymbol{U}}\frac{1}{2}\|\boldsymbol{V}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\frac{\lambda}{2}\left\|\mathcal{H}\left(\boldsymbol{B}^{(k+1)}\right)-\boldsymbol{U}^{(k+1)}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}\tag{25}$$

$$\boldsymbol{M}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}^{(k+1)}+\boldsymbol{E}^{(k+1)}-\tilde{\boldsymbol{B}}+\boldsymbol{M}^{(k)}\tag{26}$$

通过求解式(22)，更新$\boldsymbol{E}$的迭代解为

$$\boldsymbol{E}^{(k+1)}=\frac{\beta}{2\mu+\beta}\left(\tilde{\boldsymbol{B}}-\boldsymbol{B}^{(k)}-\boldsymbol{M}^{(k)}\right)\tag{27}$$

利用最小二乘法求解式(23)，可得到更新$\boldsymbol{B}$的迭代解为

$$\boldsymbol{B}^{(k+1)}=\frac{1}{\lambda+\beta}\left[\lambda\mathcal{H}^{-1}\left\{\boldsymbol{U}^{(k)}\boldsymbol{V}^{(k)\mathrm{H}}\right\}-\beta\left(\boldsymbol{E}^{(k+1)}-\tilde{\boldsymbol{B}}+\boldsymbol{M}^{(k)}\right)\right]\tag{28}$$

式中，$\mathcal{H}^{-1}(\cdot)$为块Hankel矩阵操作$\mathcal{H}(\cdot)$的逆变换，对于任意一个矩阵$\boldsymbol{X}$，均有$\mathcal{H}^{-1}\left(\mathcal{H}(\boldsymbol{X})\right)=\boldsymbol{X}$。

在变量$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$的子问题求解时，对式(24)中的矩阵$\boldsymbol{U}$求偏导数得

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{U}}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{U}}\left(\frac{1}{2}\|\boldsymbol{U}\|_{\mathrm{F}}^{2}+\frac{\lambda}{2}\left\|\mathcal{H}\left(\boldsymbol{B}^{(k+1)}\right)-\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{(k)\mathrm{H}}\right\|_{\mathrm{F}}^{2}\right)=\\\boldsymbol{U}-\lambda\left(\mathcal{H}\left(\boldsymbol{B}^{(k+1)}\right)-\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{(k)\mathrm{H}}\right)\boldsymbol{V}=\\\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{V}^{(k)\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{(k)}\right)-\lambda\mathcal{H}\left(\boldsymbol{B}^{(k+1)}\right)\boldsymbol{V}\end{aligned}\tag{29}$$

显然，使$\dfrac{\partial L}{\partial\boldsymbol{U}}=0$，就可得到子问题$\boldsymbol{U}$的最优迭代解。类似地，子问题$\boldsymbol{V}$的闭式解也可以通过类似方式得到，因此变量$\boldsymbol{U}$和$\boldsymbol{V}$的更新迭代解分别为

$$\boldsymbol{U}^{(k+1)}=\lambda\mathcal{H}\left(\boldsymbol{B}^{(k+1)}\right)\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{V}^{(k)\mathrm{H}}\boldsymbol{V}^{(k)}\right)^{-1}\tag{30}$$

$$\boldsymbol{V}^{(k+1)}=\lambda\left(\mathcal{H}\left(\boldsymbol{B}^{(k+1)}\right)\right)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{(k+1)}\left(\boldsymbol{I}+\lambda\boldsymbol{U}^{(k+1)\mathrm{H}}\boldsymbol{U}^{(k+1)}\right)^{-1}\tag{31}$$

拉格朗日乘子矩阵$\boldsymbol{M}$的更新迭代解为

$$\boldsymbol{M}^{(k+1)}=\boldsymbol{B}^{(k+1)}+\boldsymbol{E}^{(k+1)}-\tilde{\boldsymbol{B}}+\boldsymbol{M}^{(k)}\tag{32}$$

综上所述，式(20)所表示的优化模型求解如表1所示。

表1　式(20)所示的优化模型求解算法

算法1: ADMM算法求解式(20)的优化模型
Input: 不完整协方差矩阵$\tilde{\boldsymbol{R}}\in\mathbb{C}^{MN\times MN}$及其采样索引集$\Omega$以及迭代次数$K$
1) 对$\tilde{\boldsymbol{R}}$进行奇异值分解获得不完整的矩阵因子初始值$\tilde{\boldsymbol{B}}\in\mathbb{C}^{MN\times P}$，$k=\Delta\boldsymbol{B}=1$；
2) 初始化$\boldsymbol{U}\in\mathbb{C}^{\gamma\eta\times P}$，$\boldsymbol{V}\in\mathbb{C}^{(M-\gamma+1)(N-\eta+1)P\times P}$；
while not converged do
3) 通过求解式(27)更新$\boldsymbol{E}$;
4) 通过求解式(28)更新$\boldsymbol{B}$;
5) 通过求解式(30)更新$\boldsymbol{U}$;
6) 通过求解式(31)更新$\boldsymbol{V}$;
7) 通过求解式(32)更新$\boldsymbol{M}$;
8) $\Delta\boldsymbol{B}=\left\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{last}}\right\|_{\mathrm{F}}/\left\|\boldsymbol{B}_{\mathrm{last}}\right\|_{\mathrm{F}}$;
9) $\boldsymbol{B}_{\mathrm{last}}\leftarrow\boldsymbol{B}$;
end while
Output: 重建结果:完整的矩阵因子$\boldsymbol{B}$

在算法1中，当迭代条件满足$\Delta \boldsymbol{B} \leqslant \varepsilon$或达到最大迭代次数$K$时，迭代停止，其中$\varepsilon$为较小的正数。此外，本文利用了协方差矩阵的SVD分解进行矩阵因子初始化，有效地加快了算法收敛速度。当迭代停止时，可得到完整的矩阵因子$\boldsymbol{B}$，然后基于完整矩阵因子进行目标角度估计。

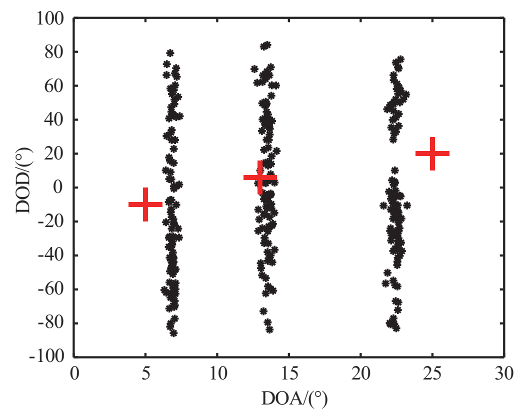
2.3 算法复杂度分析

文献[20]的计算复杂度集中在构造完整协方差矩阵上，需对MN个子矩阵进行取平均操作，其计算复杂度约为$O\left((MN)^2\right)$；本文算法的计算复杂度主要集中在式(30)和式(31)中的矩阵相乘和求逆运算，其计算复杂度约为$O\left(K_1\left(\gamma\eta(M-\gamma+1)(N-\eta+1)(P^3+P^2)+P^3\right)\right)$，其中$K_1$为迭代次数；文献[21]方法对由协方差矩阵构造的四重Hankel矩阵进行核范数最小化求解，需要对复杂度较高的四重Hankel矩阵进行SVD分解，其复杂度为$O\left(K_2\left(\frac{M+1}{2}\right)^6\left(\frac{N+1}{2}\right)^6\right)$，其中$K_2$为迭代次数。

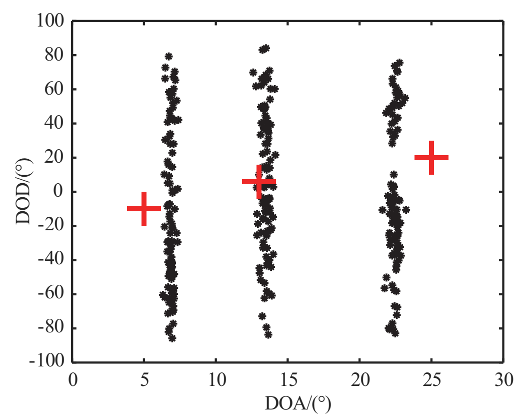
3 仿真与分析

为保证各算法对比的公平性，统一采用ESPRIT算法[10]对本文方法（记为IMFR-MC）、文献[20]方法（记为DC-MC）和文献[21]方法（记为FFH-MC）恢复出的完整协方差矩阵进行目标角度估计，并以基于完整协方差矩阵直接进行ESPRIT算法估计的目标角度性能进行对比。在仿真实验中，设置收发阵元数分别为$M=5, N=15$。假设有$P=3$个远场目标，其角度分别为$(\theta_1,\varphi_1)=(-10°,5°)$，$(\theta_2,\varphi_2)=(6°,13°)$，$(\theta_3,\varphi_3)=(20°,25°)$。第$m$个发射阵元发射的波形信号为$\boldsymbol{w}_m=(1+j)/\sqrt{2}\,\boldsymbol{h}_m$，其中，$\boldsymbol{w}_m$为$\boldsymbol{W}$的第$m$行，$\boldsymbol{h}_m$表示维度为$256\times256$的Hadamard矩阵的第$m$行。信噪比定义为$SNR=10\log_{10}\left(\left\|\boldsymbol{X}_q-\boldsymbol{Z}_q\right\|_F^2 \Big/ \left\|\boldsymbol{Z}_q\right\|_F^2\right)$。均方根误差定义为$RMSE=\sqrt{\frac{1}{2PM_T}\sum_{p=1}^{P}\sum_{i=1}^{M_T}\left\{\left(\hat{\theta}_{p,i}-\theta_p\right)^2+\left(\hat{\varphi}_{p,i}-\varphi_p\right)^2\right\}}$，$M_T$为蒙特卡洛实验次数，$\hat{\theta}_{p,i}$和$\hat{\varphi}_{p,i}$分别为第$p$个目标在第$i$次蒙特卡洛实验中的DOD和DOA估计值。

仿真实验1：设置MIMO雷达故障阵元位置集合为$\Omega_T=[3]$，$\Omega_R=[2,4,7,12,14]$，信噪比为-5 dB，快拍数$Q=100$，$M_T=100$。图2(a)和(b)分别为阵元故障时ESPRIT算法和IMFR-MC算法的角度估计结果星座图。图中符号“*”表示目标角度估计值，符号“+”表示目标角度真实值。由图2可知，由于故障阵元缺失数据未填补，阵元失效时直接采用ESPRIT算法估计出的目标角度值与真实值相差较大，而IMFR-MC算法充分利用矩阵因子的结构特性对故障阵元的缺失数据进行了有效填补，其目标角度估计值与真实值接近。



（a）阵元故障时ESPRIT算法



（b）阵元故障时IMFR-MC算法

图2 目标角度估计星座图

仿真实验2：阵列故障阵元位置设置与仿真实验1相同，$Q=100$，$M_T=100$。图3为不同方法的RMSE随SNR变化的曲线图。由图3可知，故障阵元会导致阵列接收数据缺失，致使协方差矩阵的

完整结构遭到破坏,此时直接使用 ESPRIT 算法估计出的目标角度精度非常差,从而无法有效地估计目标的角度。此外,由于目标的 DOD 和 DOA 不同,MIMO 雷达协方差矩阵具有块 Toeplitz 特性而非 Toeplitz 特性,因此采用差分处理技术的 DC-MC 算法无法填补故障阵元缺失数据,其目标角度估计误差较大。FFH-MC 算法和 IMFR-MC 算法对故障阵元的缺失数据进行了有效填补,在低信噪比区域两者几乎具有相同的性能,而在高信噪比区域 IMFR-MC 算法的角度估计精度优于 FFH-MC 算法。

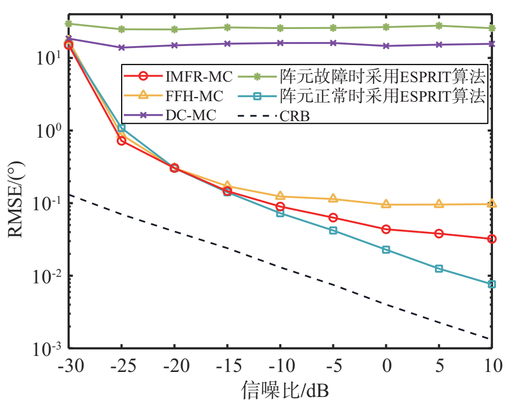


图 3　不同方法的 RMSE 随 SNR 的变化曲线图

仿真实验 3:设置信噪比为 −5 dB,发射阵列和接收阵列的故障阵元位置设置与仿真实验 1 中相同,$M_T = 100$。图 4 为 RMSE 随快拍数变化的曲线图,图中除 DC-MC 算法的目标角度估计精度较差以外,其余方法随着快拍数的增多,角度估计精度均有所提升,但 IMFR-MC 算法明显优于 FFH-MC 算法。

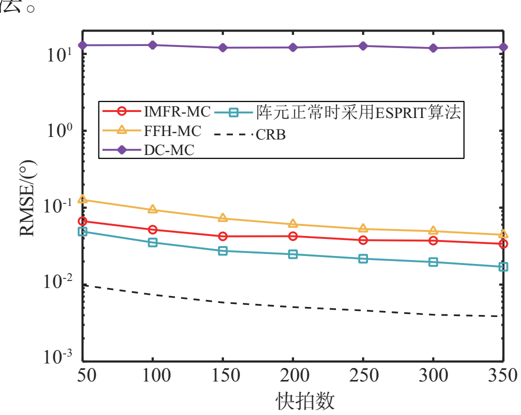


图 4　不同方法的 RMSE 随快拍数变化曲线图

仿真实验 4:假设失效接收阵元的数量从 0 至 8 递增,对应的接收阵列的故障率为 0% ~ 53%,其中故障率为 0% 表示接收阵列中故障阵元个数为 0。在每次独立实验中,故障接收阵元的位置随机选取,而发射阵列中第 3 个发射阵元故障。设置信噪比为 −5 dB,快拍数为 $Q = 100$, $M_T = 100$。图 5 为不同方法的 RMSE 随接收阵列故障率变化的曲线图,除 DC-MC 算法的角度估计性能普遍较差以外,FFH-MC 算法与 IMFR-MC 算法的 RMSE 随着接收阵元故障率的增加均有不同程度的增大,但 IMFR-MC 算法总体上比 FFH-MC 算法具有更低的 RMSE 值。

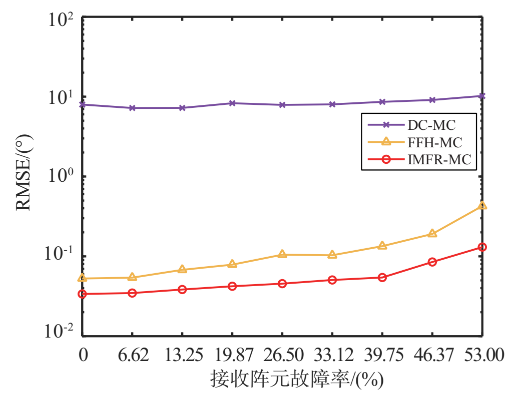


图 5　不同方法的 RMSE 随接收阵列故障率变化曲线图

仿真实验 5:本仿真实验参数设置与仿真实验 1 相同。实验仿真软件为 MATLAB2018a,CPU 为 Intel Core i5-4570,内存为 8 GB。由表 2 可知,DC-MC 算法的运算时间最短,但角度估计误差较大;FFH-MC 算法和 IMFR-MC 算法均能实现目标角度的有效估计,相较于 FFH-MC 算法,IMFR-MC 算法的运行时间更短、角度估计精度更高。

表 2　不同角度估计方法的运行时间

算法	IMFR-MC	FFH-MC	DC-MC
时间/s	0.010 9	4.188 1	0.002 3
RMSE/(°)	0.047 4	0.088 3	12.128 3

4　结束语

双基地 MIMO 雷达收发阵列中出现失效阵元时,其虚拟协方差矩阵中会产生大量结构性缺失数据,严重影响了传统角度估计算法的性能。为此,本文提出一种有效的不完整矩阵因子重构算法。基于矩阵 SVD 分解从不完整协方差矩阵中提取出维度较低的矩阵因子,通过分析矩阵因子中

行和列间相关性,将矩阵因子变换为块Hankel矩阵,并对其施加核范数约束,从而建立不完整矩阵因子的重构模型。为了有效降低算法的运算时间,利用Hankel矩阵分解性质,基于低秩矩阵拟合算法重新表征了核范数约束。基于ADMM设计了不完整矩阵因子重构模型的求解算法,以获得完整的矩阵因子,从而能有效估计出目标角度。本文方法可以有效缓解因阵元失效而导致MIMO雷达角度估计性能恶化的影响,实现高精度的角度估计。

参考文献:

[1] LI Jian, PETRE S. MIMO Radar with Colocated Antennas [J]. IEEE Trans on Signal Processing Magazine, 2007, 24 (5):106-114.

[2] HAN K, HONG S. High-Resolution Phased-Subarray MIMO Radar with Grating Lobe Cancellation Technique[J]. IEEE Trans on Microwave Theory Techniques, 2022, 70 (5):2775-2785.

[3] SATYA G D, RATNAM V R. A Distributed MIMO Radar with Joint Optimal Transmit and Receive Signal Combining[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2021, 57(1):623-635.

[4] YU Zehua, LI Jun, GUO Qinghua, et al. Efficient Direct Target Localization for Distributed MIMO Radar with Expectation Propagation and Belief Propagation [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2021, 69:4055-4068.

[5] ZAHRA G, MOSTAFA D. Performance Analysis of the Matched Subspace Detector in the Presence of Signal-Dependent Interference for MIMO Radar[J]. Signal Processing, 2020, 176(1):1-12.

[6] GAO Xiangyu, ROY S, XING Guanbin. MIMO-SAR: A Hierarchical High-Resolution Imaging Algorithm for mmWave FMCW Radar in Autonomous Driving[J]. IEEE Trans on Vehicular Technology, 2021, 70(8):7322-7334.

[7] 黄磊,柳艾飞,高才才.集中式MIMO雷达研究进展:正交波形设计与信号处理[J].雷达科学与技术,2023,21 (1):1-15.

[8] YAN Haidong, LI Jun, LIAO Guisheng. Multitarget Identification and Localization Using Bistatic MIMO Radar Systems[J]. Eurasip Journal on Advances in Signal Processing, 2008(1):1-8.

[9] ZHANG Xiaofei, XU Lingyun, XU Lei, et al. Direction of Departure (DOD) and Direction of Arrival (DOA) Estimation in MIMO Radar with Reduced-Dimension MUSIC [J]. IEEE Communications Letters, 2010, 14(12):1161-1163.

[10] CHEN Jinli, GU Hong, SU Weimin. Angle Estimation Using ESPRIT without Pairing in MIMO Radar[J]. Electronics Letters, 2008, 44(24):1422-1423.

[11] OM P, AMALENDU P. Antenna Array Failure Correction [J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2017, 59 (6):106-115.

[12] ZARDI F, OLIVERI G, SALUCCI M, et al. Minimum-Complexity Failure Correction in Linear Arrays via Compressive Processing [J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 2021, 69(8):4504-4516.

[13] GAO Sizhe, MA Hui, LIU Hongwei, et al. DOD and DOA Estimation from Incomplete Data Based on PARAFAC and Atomic Norm Minimization Method[J]. IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing, 2023, 61:1-14.

[14] JALAL B, ELNAHAS O, QUAN Zhi. Efficient DOA Estimation Under Partially Impaired Antenna Array Elements[J]. IEEE Trans on Vehicular Technology, 2022, 71(7):7991-7996.

[15] SETAYESH A, YAZDIAN E, MALEK M. Direction of Arrival Estimation with Missing Data via Matrix Completion[J]. Signal Image and Video Processing, 2019, 13: 1451-1459.

[16] 张永顺,葛启超,丁姗姗.阵元缺损下的波达方向估计算法[J].电子科技大学学报,2017,46(4):501-504.

[17] 杨东,廖桂生,朱圣棋,等.阵列信号降采样低秩矩阵的恢复方法[J].西安电子科技大学学报,2014,41(5): 30-35.

[18] JI Yuanjie, WEN Cai, YAN Huang, et al. Robust Direction-of-Arrival Estimation Approach Using Beamspace-Based Deep Neural Networks with Array Imperfections and Element Failure [J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2022, 16(11):1761-1778.

[19] ZHU Chenglong, WANG Wenqin, CHEN Hui, et al. Impaired Sensor Diagnosis, Beamforming and DOA Estimation with Difference Co-Array Processing[J]. IEEE Sensors Journal, 2015, 15(7):3773-3780.

[20] ZHANG Weiyu, VOROBYOV A, GUO Lianghao. DOA Estimation in MIMO Radar with Broken Sensors by Difference Co-Array Processing[C]//2015 IEEE 6th International Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP),
(下转第669页)