

文章编号:0559-9350(2018)12-1460-11

平底抛物线形复合渠道水力最佳断面及实用经济断面统一设计方法

王正中^{1,2}, 陈柏儒^{1,2}, 王 羿^{1,2}, 赵延风^{1,2}

(1. 西北农林科技大学 旱区寒区水工程安全研究中心, 陕西 杨凌 712100;

2. 西北农林科技大学 旱区农业水土工程教育部重点实验室, 陕西 杨凌 712100)

摘要: 大中型渠道常采用平底抛物线形复合渠道断面形式进行设计, 但任意幂律指数的平底抛物线形复合渠道的湿周计算理论上无解析解, 致使任意幂律指数的平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面及实用经济断面无统一设计方法。现有的文献, 仅研究了给定幂律指数情况下的平底抛物线形复合渠道断面, 并没进行全局范围内的研究。本文首先采用高斯超几何函数给出了任意幂律指数的平底抛物线形复合渠道湿周的解析计算式, 再以水面宽度与水深的比率、渠部底宽与水深的比率及水深为变量, 利用拉格朗日乘法建立了平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面求解方程; 进一步根据实用经济断面与水力最佳断面的关系建立了平底抛物线形复合渠道的实用经济断面求解方程。本文不仅给出了全范围内连续变化的任意幂律指数的平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面及实用经济断面统一设计方法, 直接计算公式及数据表格, 而且得到了平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面中的最优幂律指数为3, 从而取得全局水力最佳断面。本文结果可供大中型渠道规划设计参考应用。

关键词: 平底抛物线形复合渠道; 高斯超几何函数; 水力最佳断面; 实用经济断面; 明渠水力学

中图分类号: S277; TV131.4

文献标识码: A

doi: 10.13243/j.cnki.slxb.20180290

1 研究背景

明渠是一种人工修建或自然形成的渠道或河道, 是输水工程中最普遍的建筑物, 其水力计算的研究成果已非常丰富^[1-3]。因为抛物线形断面与天然河道断面近似^[1-2], 所以很多渠道工程都选择采用抛物线形断面^[3]。国内外已有许多的学者对抛物线形渠道的水力最佳断面进行了研究^[3-6], 张志昌^[7]和魏文礼^[8]分别给出最常见的二次抛物线形和半立方抛物线形渠道的水力最佳断面参数计算方法。韩延成^[9]利用不完全椭圆积分法对三次抛物线形渠道断面的湿周进行了解析表达, 随后进一步利用高斯超几何函数对幂律指数 $m=5/2$ 、 $10/3$ 的湿周进行了解析表达, 并得到了它们的水力最佳断面参数^[10-11]。张丽伟^[12]利用二次抛物线近似法推求了抛物线形渠道的水力最佳断面参数计算公式。但是, 抛物线形渠道多为窄深式, 从渠坡稳定及占地面积看不便用于大中型渠道^[13]。

为此, 提出一种适于大中型渠道的新型平底抛物线形复合渠道。平底抛物线形复合渠道一种新型复合抛物线形断面, 它是由一个水平的底部和两侧对称的抛物线形边坡组合而成的。其包含的设计参数比普通抛物线形断面多, 使得在水力最佳断面设计中参数的选择比普通抛物线形断面更加灵活优越^[14-15], 李刚^[13]和 Easa^[14]分别研究了二次方平底抛物线形复合渠道, Das^[16]也提出了一种平底抛物线形断面, 并且研究了其经济性, Han等^[15, 17]进一步提出了两种新型的平底抛物线形复合渠道。实际上, 当幂律指数 $m=1$ 时, 平底抛物线形复合渠道就是梯形渠道, 其正常水深^[18]、临界水深^[19-20]、收缩

收稿日期: 2018-04-01

基金项目: 国家重点研发计划重点专项(2017YFC0405103); 中央高校科研业务费科技创新专项(); 国家自然科学基金项目(51279168)

作者简介: 王正中(1963-), 男, 陕西彬县人, 教授, 博士生导师, 主要从事工程力学及水工程安全理论与技术研究。

E-mail: wangzz0910@163.com

水深^[21-22]和共轭水深^[23]及实用经济断面设计的方法都已取得很多成果，水力计算和断面设计也已基本成熟。但任意幂律指数的平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面及实用经济断面的统一设计计算方法鲜有报道，仅有弧形底梯形断面^[24]、弧形坡脚梯形断面^[24]、梯形断面^[25]、平方抛物线形断面^[26]等典型断面的水力最佳断面及实用经济断面的设计计算方法。

综上所述，目前研究成果仅针对工程常见个别典型幂律指数的平底抛物线形复合渠道的成果，所得成果仅限于给定幂律指数时平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面的解，还没有全范围连续变化的任意幂律指数的平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面及实用经济断面的统一设计方法，更没有考虑两侧抛物线形边坡的幂律指数变化对其水力最佳断面的影响。本文采用高斯超几何函数推导出了任意幂律指数的平底抛物线形复合渠道的湿周解析计算公式，再用拉格朗日乘数法求解该类渠道的水力最佳断面，给出了平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面及实用经济断面的求解方程，并给出了断面计算的相关直接计算公式和图表，为方便设计，列出了平底抛物线形复合渠道的水力最佳及实用经济断面设计步骤，供设计查用。为了展示该类断面在水力特性上的优点，分别在给定设计水深和设计流量的条件下，将平底抛物线形复合渠道与其它典型断面的水力计算参数进行了对比。通过算例对比表明：本文给出的统一设计方法具有精确性和简便性及通用性的优点；且获得了平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面中的最优幂律指数，从而取得全局水力最佳断面。可供渠道规划设计参考应用，为规范修订提供依据。

2 基本理论

明渠均匀流的流量计算式为^[27]：

$$Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{A^{5/3} \cdot \sqrt{i}}{P^{2/3}} \quad (1)$$

式中： A 为过水断面面积， m^2 ； n 为糙率； Q 为流量， m^3/s ； i 为水力坡度； P 为湿周， m 。

多种抛物线形渠道断面形状如图1所示，以幂律指数为 m 及形状参数为 a_0 的抛物线形渠道断面底部中心为原点建立 $x-y$ 坐标系，其用方程可表达为：

$$y_0 = a_0 \cdot |x|^m \quad (2)$$

式中： a_0 为抛物线形渠道形状参数($a > 0$)； y_0 为抛物线形渠道任一断面的水深(当 $x=B_0/2$ 时， $y=h_0$)，其中 B_0 为水面宽度， m)； m 为抛物线形的幂律指数($m \geq 1$)，其取值应结合具体工程的工程地质、水文情况及气候气象条件，考虑水力最佳、边坡稳定性、渠道冻胀和工程施工及造价、占地面积等进行选择。当 m 大于1时，渠坡越陡，同时渠底越平缓，在寒区冻胀分布越均匀，在多沙地区输沙能力越强。

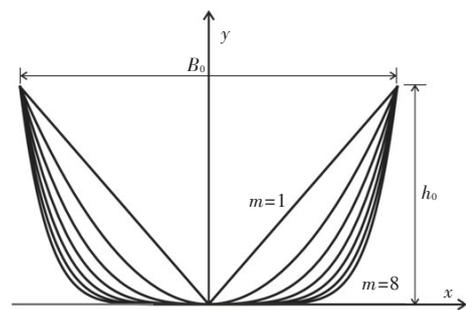


图1 多种抛物线形渠道断面

平底抛物线形复合渠道断面形状如图2所示，利用 $y=0$ ($-b/2 \leq x \leq b/2$ ，其中 b 为水平底部的宽度， m)设置水平底部，且以其底部中心为原点建立 $x-y$ 坐标系，再以任意幂律指数抛物线形断面的两支为边坡分别与水平底部平顺连接。该断面则为平底抛物线形复合渠道断面，其用方程可表达为：

$$y = \begin{cases} a \times \left(x + \frac{b}{2}\right)^m & -\frac{B}{2} \leq x < -\frac{b}{2} \\ 0 & -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ a \times \left(x - \frac{b}{2}\right)^m & \frac{b}{2} < x \leq \frac{B}{2} \end{cases} \quad (3)$$

式中： a 为平底抛物线形复合渠道形状参数($a > 0$)； m 为两侧抛物线边坡的幂律指数，其取值同抛物线形

断面； b 为渠道底部水平宽度， m ； B_0 为两侧抛物线边坡部分的水面宽度， m ； $B=B_0+b$ 为平底抛物线形复合渠道水面总宽度， m ； y 为平底抛物线形复合渠道任一断面的水深(当 $x=B/2$ 时， $y=h$)。当 b 取值为0时，式(3)则变成式(2)，可表达抛物线形渠道；当 b 取值不为0时，式(3)表达为平底抛物线形复合渠道。

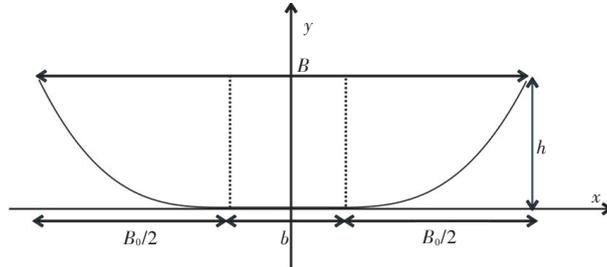


图2 平底抛物线形复合渠道断面

平底抛物线形复合渠道过水断面面积 A 可表达为：

$$A = B_0 h + bh - 2 \int_0^{B_0/2} y dx = \frac{m}{m+1} B_0 h + bh \quad (4)$$

平底抛物线形复合渠道湿周 P 采用弧长微分法可表达为：

$$P = b + 2 \int_0^h \sqrt{1 + \frac{1}{m^2} \frac{y^{\frac{2}{m}-2}}{a_0^{\frac{2}{m}}}} dy \quad (5)$$

在式(5)中只有当幂律指数为1.5、2.0时才易计算出解析解。当为其它幂律指数时，湿周积分公式为不可积分的积分形式，很难计算出解析解。根据式(5)，本文通过公式推导得到了采用高斯超几何函数表达的平底抛物线形复合渠道的湿周解析计算公式^[28-29]，可表达为：

$$P = b + B_0 \cdot \frac{m-1}{m} \times {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2 h^2}{B_0^2} \right\} + \frac{B_0}{m} \sqrt{1 + \frac{4m^2 h^2}{B_0^2}} \quad (6)$$

式中： ${}_2F_1\{C_1, C_2, C_3; x\} = \text{Gaussian Hypergeom}\{C_1, C_2, C_3; x\}$ 为高斯超几何函数，其中 $C_1 \sim C_3$ 为高斯超几何函数的参数。

高斯超几何函数的求导公式为^[30]：

$$\frac{d^n}{dx^n} {}_2F_1\{C_1, C_2, C_3; x\} = \frac{(C_1, n) \times (C_2, n)}{(C_3, n)} \times {}_2F_1\{C_1+n, C_2+n, C_3+n; x\}, n \in N \quad (7)$$

引入平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面参数 $\eta=B_0/h$ 和 $\beta=b/h$ ，并且将 $\eta=B_0/h$ 和 $\beta=b/h$ 代入式(4)和式(6)后，即可获得式(8)和式(9)，可表达为：

$$A = \frac{m}{m+1} \eta h^2 + \beta h^2 \quad (8)$$

$$P = \beta h + \eta h \cdot \frac{m-1}{m} \times {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2}{\eta^2} \right\} + \frac{\eta h}{m} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\eta^2}} \quad (9)$$

在式(9)中，当 $m=1$ 时，会使得分母为0，所以只有当幂律指数 m 取值无限接近于1，且水力最佳断面参数 $\beta=b/h$ 等于0时，式(9)可近似计算三角形渠道的湿周；当 m 取值无限接近于1，且 $\beta=b/h$ 不等于0时，式(9)可近似计算梯形渠道的湿周；当 $\beta=b/h$ 取值为0时，式(9)可用来准确计算抛物线形渠道的湿周。因此，式(9)是可用来计算三角形、梯形、抛物线形、平底抛物线类复合形等多种断面湿周的统一方程。

3 平底抛物线形复合渠道水力最佳断面

3.1 水力最佳断面求解模型 平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面参数 $\eta=B_0/h$ 和 $\beta=b/h$ 可认为是该

类断面在水力最佳条件时的标志性参数。因此，求解平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面的模型可表示为^[31]：

目标函数：

$$A = A(h, \eta, \beta) \quad (10)$$

约束条件：

$$\varphi(h, \eta, \beta) = Q - \frac{1}{n} \cdot \frac{A^{5/3} \cdot \sqrt{i}}{P^{2/3}} \quad (11)$$

式中 φ 为等式约束函数。

对式(10)和式(11)利用拉格朗日乘数法可得：

$$\frac{\partial A}{\partial h} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial h} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial \eta} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial \beta} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0 \quad (12)$$

式中 λ 为拉格朗日乘子。

利用式(11)可得到 $\partial\varphi/\partial h$ 、 $\partial\varphi/\partial\eta$ 和 $\partial\varphi/\partial\beta$ 。将它们代入式(12)，可得到如下方程：

$$\frac{\partial A}{\partial h} + \lambda \frac{\partial P}{\partial h} = 0 \quad (13a)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} + \lambda \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \quad (13b)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} + \lambda \frac{\partial P}{\partial \beta} = 0 \quad (13c)$$

将式(13a)和(13c)分别代入式(13b)，消去 λ ，并化简后可得优化模型：

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{\partial A}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial P}{\partial \eta} \quad (14a)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial P}{\partial h} = \frac{\partial A}{\partial h} \cdot \frac{\partial P}{\partial \eta} \quad (14b)$$

式(14a)和式(14b)即为平底抛物线形复合渠道水力最佳断面的微分方程。

3.2 水力最佳断面求解与设计 根据式(8)，面积 A 对水力最佳断面参数 η 、 β 和水深 h 的偏导数分别为：

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} = \frac{m}{m+1} h^2 \quad (15)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = h^2 \quad (16)$$

$$\frac{\partial A}{\partial h} = \frac{2m}{m+1} \eta h + 2\beta h \quad (17)$$

根据式(9)，湿周 P 对水力最佳断面参数 η 、 β 和水深 h 的偏导数分别为：

$$\frac{\partial A}{\partial \eta} = h \times {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2}{\eta^2} \right\} \quad (18)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = h \quad (19)$$

$$\frac{\partial A}{\partial h} = \beta + \eta \cdot \frac{m-1}{m} \times {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2}{\eta^2} \right\} + \frac{\eta}{m} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\eta^2}} \quad (20)$$

将式(15)，式(16)和式(18)，式(19)代入式(14a)，通过化简可得：

$$\frac{m}{m+1} = {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2}{\eta^2} \right\} \quad (21)$$

将式(15)，式(17)和式(18)，式(20)代入式(14b)，通过化简可得：

$$\begin{aligned} & \frac{m}{m+1} \times \left(\beta + \eta \cdot \frac{m-1}{m} \times {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2}{\eta^2} \right\} + \frac{\eta}{m} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\eta^2}} \right) = \\ & \left(\frac{2m}{m+1} \eta + 2\beta \right) \times {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2}{\eta^2} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

由公式 $\eta=B_0/h$, $\beta=b/h$, 可获得如下计算公式:

$$\zeta = \frac{B}{h} = \eta + \beta \quad (23)$$

式中 ζ 为平底抛物线形复合渠道的水面总宽度与水深的比值。

基于式(21)和式(22), 利用数学计算软件 Wolfram Mathematica 11 可获得全幂律指数范围内平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面参数值 $\eta=B_0/h$ 和 $\beta=b/h$, η 和 β 的分布见表1。

表1 平底抛物线形复合渠道水力最佳断面水面宽度与水深的比值

m	$\eta=B_0/h$	$\beta=b/h$	$\zeta=\eta+\beta$
1.001	1.1555	1.1537	2.3092
1.25	1.3061	0.9504	2.2565
1.50	1.4230	0.7906	2.2136
1.75	1.5338	0.6498	2.1836
2	1.6439	0.5184	2.1623
2.25	1.7546	0.3921	2.1467
2.5	1.8659	0.2688	2.1347
2.75	1.9779	0.1475	2.1254
3	2.0904	0.0275	2.1179
3.2	2.1807	-0.0678	2.1129
4	2.5439	-0.4453	2.0987
5	3.0010	-0.9129	2.0881
6	3.4598	-1.3784	2.0815
8	4.3804	-2.3068	2.0736
10	5.3029	-3.2338	2.0691

以 m 为横坐标, η 和 β 为竖坐标, 绘出 $\eta \sim m$ 和 $\beta \sim m$ 关系曲线如图3。

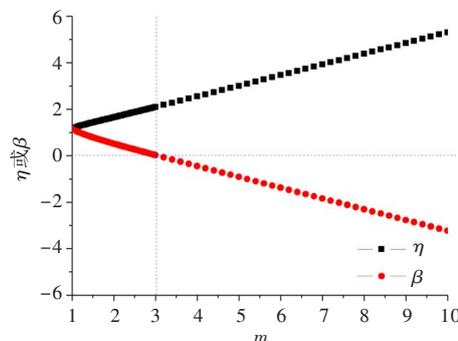


图3 平底抛物线形复合渠道水力最佳断面参数 η 和 β 分布

由图3可知: η 和 β 之间呈负线性相关关系, 且可确定平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面的无量纲参数 m 取值范围为1至3, 因为当幂律指数 m 大于3时, 水力最佳参数 $\beta=b/h$ 为负数, 这显然是不合理的。换言之, 当 m 取值大于3时, 平底抛物线形复合渠道不存在水力最佳断面。

为了方便获得水力最佳断面参数 η 和 β , 对 $m \in (1, 3]$ 范围内的 $\eta \sim m$ 和 $\beta \sim m$ 之间的关系, 通过最小二乘法拟合可得如下直接计算公式:

$$\eta = 0.474m + 0.697 \quad (24)$$

$$\beta = -0.0519m^3 + 0.401m^2 - 1.5m + 2.32 \quad (25)$$

为计算方便, 且考虑到平底抛物线形复合渠道的湿周求解式(6)需求解高斯超几何函数, 现通过拟合给出平底抛物线形复合渠道水力最佳断面的水力设计参数直接计算公式。先利用 $\eta=B_0/h$, $\beta=b/h$ 和式(1)、式(8)和式(9), 得到了幂律指数相应于正常水深的参数、过水面积的参数、湿周的参数之间的关系。再通过最小二乘法拟合, 得到了全范围幂律指数的平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面的过水面

积 A_h (具有脚标 h 的量表示水力最佳断面条件下的水力要素)、湿周 P_h 和正常水深 h_h 的直接计算公式为:

$$A_h = (-0.015m^2 + 0.04m + 1.58) \times \left(\frac{Qn}{\sqrt{i}}\right)^{3/4} \quad (26)$$

$$P_h = (0.054m^2 - 0.0288m + 3.572) \times \left(\frac{Qn}{\sqrt{i}}\right)^{3/8} \quad (27)$$

$$h_h = (-0.009m^2 + 0.051m + 0.928) \times \left(\frac{Qn}{\sqrt{i}}\right)^{3/8} \quad (28)$$

以上各直接计算公式误差可由式(29)计算后, 制作出图4。

$$\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \times 100\% \quad (29)$$

式中: δ 为相对误差, %; ρ 由本文提供的直接公式计算得到; ρ_0 为真值。

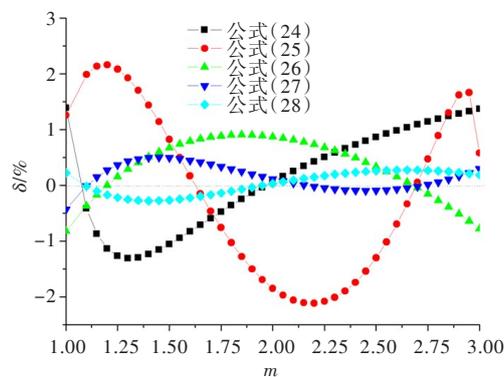


图4 直接计算式相对误差分布

由图4可知: 式(24)至式(28)的相对误差均小于2.5%。

4 各种断面的特征水力参数的比较

已有大量文献[9, 11, 15, 17]对抛物线形渠道断面同其它断面的特征水力计算参数进行了比较。为了展示平底抛物线形复合断面在水力特性上的优点, 利用本文推得的式(21)和式(22)计算二分之三次方、二次方、二分之五次方、三次方平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面参数 β 和 η ; 再基于式(1)和式(8)、式(9)计算得到它们在水力最佳断面条件下的特征水力计算参数。并与已有的各类断面的水力计算参数成果^[9, 11, 15, 17]进行对比, 作出表2和表3。

表2 5种断面的特征水力参数的比较(给定水深 h)

序号	断面类型	$\eta=B_0/h$	$\beta=b/h$	$\zeta=B/h$	过水面积/ m^2	湿周/ m
1	二次方抛物线形渠道	2.0555			$1.3703 \times h^2$	$2.9982 \times h$
2	二分之五次方抛物线形渠道	2.0883			$1.4916 \times h^2$	$3.0963 \times h$
3	二次方平底抛物线形复合渠道	1.6439	0.5184	2.1623	$1.6143 \times h^2$	$3.2287 \times h$
4	二分之五次方平底抛物线形复合渠道	1.8659	0.2688	2.1347	$1.6016 \times h^2$	$3.2032 \times h$
5	三次方平底抛物线形复合渠道	2.0904	0.0275	2.1179	$1.5953 \times h^2$	$3.1906 \times h$

注: $\eta=B_0/h$ 为抛物线断面的水面宽度与水深的比率, $\beta=b/h$ 为平底抛物线形复合渠道底部水平段与水深的比率, $\zeta=B/h=B_0/h+b/h$ 为平底抛物线形复合渠道水面总宽度与水深的比率。

通过表2和表3, 可得如下结论。

从表2可知: 在水力最佳条件下, 并且给定水深时, ①三次方平底抛物线形复合渠道的湿周和过水面积均小于其他平底抛物线形复合渠道; ②同一幂律指数的抛物线形渠道和平底抛物线形复合渠

表3 10种断面的特征水力参数的比较(给定流量的 $\tau=Qn/i^{1/2}$)

序号	断面类型	水面宽度/m	过水面积/m ²	湿周/m
1	矩形断面渠道	$1.8340 \times \tau^{3/8}$	$1.6818 \times \tau^{3/4}$	$3.6680 \times \tau^{3/8}$
2	三角形断面渠道	$2.5940 \times \tau^{3/8}$	$1.6818 \times \tau^{3/4}$	$3.6680 \times \tau^{3/8}$
3	梯形断面形渠道	$2.2351 \times \tau^{3/8}$	$1.6224 \times \tau^{3/4}$	$3.3527 \times \tau^{3/8}$
4	半圆形断面形渠道	$2.3355 \times \tau^{3/8}$	$1.6213 \times \tau^{3/4}$	$3.3468 \times \tau^{3/8}$
5	二次方抛物线形渠道	$2.2213 \times \tau^{3/8}$	$1.6004 \times \tau^{3/4}$	$3.2401 \times \tau^{3/8}$
6	二分之五次方抛物线形渠道	$2.1576 \times \tau^{3/8}$	$1.5922 \times \tau^{3/4}$	$3.1990 \times \tau^{3/8}$
7	二分之三次方平底抛物线形复合渠道	$2.1845 \times \tau^{3/8}$	$1.6015 \times \tau^{3/4}$	$3.2456 \times \tau^{3/8}$
8	二次方平底抛物线形复合渠道	$2.1487 \times \tau^{3/8}$	$1.5941 \times \tau^{3/4}$	$3.2084 \times \tau^{3/8}$
9	二分之五次方平底抛物线形复合渠道	$2.1276 \times \tau^{3/8}$	$1.5909 \times \tau^{3/4}$	$3.1925 \times \tau^{3/8}$
10	三次方平底抛物线形复合渠道	$2.1140 \times \tau^{3/8}$	$1.5894 \times \tau^{3/4}$	$3.1847 \times \tau^{3/8}$

道的湿周和过水面积参数是完全不相同的。因此，抛物线形渠道的水力最佳断面特征不可直接利用在平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面的设计上。

从表3可知：在水力最佳条件下，并且给定流量时，三次方平底抛物线形复合渠道的湿周和过水面积小于其它断面(其它幂律指数的平底抛物线形复合断面，抛物线形断面，矩形断面，三角形断面，半圆形断面，梯形断面)。换言之，在同样过水面积的条件下，三次方平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面通过的流量大于其它断面(其它幂律指数的平底抛物线形复合断面，抛物线形断面，矩形断面，三角形断面，半圆形断面，梯形断面)。

渠道的过水面积及湿周与渠道建设土方的开挖量及衬砌长度直接相关，在旱区长距离输水时，水面宽度还与水面蒸发损失有关^[32]。从表3可知：在水力最佳条件下，并且给定流量时，三次方平底抛物线形复合渠道的过水面积和湿周都是最小的，这意味着这种断面的土方的开挖量和衬砌长度都是最小的；同时，三次方平底抛物线形复合渠道的水面宽度仅次于矩形的水面宽度，但寒区矩形断面抗冻胀性能极差。综上可知：三次方平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面($B_0/h=2.0904$ 和 $B/h=2.1179$)是旱区、寒区、多沙河渠最经济合理的大中型渠道断面形式。

5 平底抛物线形复合渠道的实用经济断面

按水力最佳断面设计的渠道断面往往是窄深式的，不便于施工和维护。为此，应设计一个相对更宽浅的渠道断面，使其水深和底宽有一个较广的选择范围，以适用各种情况的需要，而在此范围内其过水面积与水力最佳断面面积相近，该断面即实用经济断面。推求实用经济断面时，假定其过水面积 A 与水力最佳断面面积 A_h 之间的关系是 $A=\alpha \times A_h$ (下标 h 表示为水力最佳情况下，无下标表示为实用经济断面情况下，下同)，其中 α 取值稍大于1(1.01~1.04)。则根据实用经济断面与水力最佳断面通过流量应相等的条件，利用式(1)和满宁公式可得如下关系^[33]：

$$\alpha = \frac{A}{A_h} = \left(\frac{R_h}{R}\right)^{2/3} = \left(\frac{A_h P}{A P_h}\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{P}{P_h}\right)^{2/3} \quad (30)$$

设 $B_0/h=k_1$ ， $b/h=k_2$ ， $B_h/h_h=\eta$ ， $b_h/h_h=\beta$ 。将式(8)和式(9)分别代入式(30)可得：

$$\alpha = \frac{A}{A_h} = \frac{\frac{m}{m+1} B_0 h + b h}{\frac{m}{m+1} B_h h_h + b_h h_h} = \frac{k_1 + k_2 \left(\frac{h}{h_h}\right)^2}{\beta + \eta \left(\frac{h}{h_h}\right)^2} \quad (31)$$

$$\alpha^{5/2} = \frac{k_2 + k_1 \frac{m-1}{m} \times {}_2F_1\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2}{k_1^2}\right\} + \frac{k_1}{m} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k_1^2}}}{\beta + \eta \cdot \frac{m-1}{m} \times {}_2F_1\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2}{\eta^2}\right\} + \frac{\eta}{m} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\eta^2}}} \times \frac{h}{h_h} \quad (32)$$

将式(31)代入式(32)，并且消去 h/h_0 项，可得：

$$\alpha = \left(\frac{\beta + \eta}{k_1 + k_2} \right)^{1/4} \times \left(\frac{k_2 + k_1 \frac{m-1}{m} \times {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2}{k_1^2} \right\} + \frac{k_1}{m} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k_1^2}}}{\beta + \eta \cdot \frac{m-1}{m} \times {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2m-2}, \frac{2m-1}{2m-2}; \frac{4m^2}{\eta^2} \right\} + \frac{\eta}{m} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{\eta^2}}} \right)^{1/2} \quad (33)$$

在已知 m ，利用式(21)和式(22)或式(24)和式(25)分别求得 η 和 β 。再选定 k_1 (1~2) 和 α (1.01~1.04) 时，即可由式(33)求得 k_2 。考虑到由式(33)直接求解 k_2 十分麻烦，现给出求解的详细结果见表4，供设计查用。

表4 平底抛物线形复合渠道的实用经济断面梁底水平段与水深的比值 k_2

m	α	k_1				m	α	k_1			
		1.25	1.50	1.75	2			1.25	1.50	1.75	2
1.001	1.01	1.4904	1.5811	1.5851	1.5559	2.25	1.01	0.1980	0.5644	0.6444	0.6390
	1.02	1.7598	1.8220	1.8398	1.8055		1.02	0.6606	0.8407	0.8905	0.8716
	1.03	2.0058	2.0536	2.0742	2.0190		1.03	0.9552	1.1185	1.1249	1.1128
	1.04	2.2602	2.3040	2.3195	2.2593		1.04	1.2894	1.3738	1.3665	1.3204
1.25	1.01	1.1952	1.2830	1.3058	1.2700	2.50	1.01		0.3944	0.5083	0.5162
	1.02	1.4197	1.5203	1.5118	1.4929		1.02		0.7031	0.7679	0.7544
	1.03	1.6844	1.7598	1.7554	1.7289		1.03		0.9892	1.0125	0.9866
	1.04	1.9394	2.0025	2.0012	1.9311		1.04		1.2530	1.2732	1.2208
1.50	1.01	0.9337	1.0788	1.0996	1.0712	2.75	1.01		0.2601	0.3770	0.3905
	1.02	1.2065	1.3153	1.3191	1.2878		1.02		0.5790	0.6470	0.6497
	1.03	1.4877	1.5610	1.5606	1.5321		1.03		0.8622	0.9092	0.8852
	1.04	1.7253	1.7944	1.7746	1.7474		1.04		1.1560	1.1624	1.1345
1.75	1.01	0.7224	0.9012	0.9282	0.9066	3.00	1.01		0.0001	0.2210	0.3000
	1.02	1.0164	1.1486	1.1588	1.1304		1.02		0.4407	0.5304	0.5383
	1.03	1.2919	1.3628	1.3981	1.3543		1.03		0.7244	0.8031	0.7901
	1.04	1.5587	1.6309	1.6348	1.5844		1.04		1.0394	1.0693	1.0324
2.00	1.01	0.4974	0.7234	0.7852	0.7706						
	1.02	0.8596	0.9914	1.0160	0.9943						
	1.03	1.1397	1.2509	1.2567	1.2216						
	1.04	1.4283	1.4908	1.4980	1.4463						

6 平底抛物线形复合渠道水力最佳和实用经济断面设计步骤

在已知渠道流量 Q 、渠道底坡 i 、渠道糙率 n 的条件下。首先根据具体工程的工程地质、水文情况及气候气象条件，考虑水力最佳、边坡稳定性、渠道冻胀和工程施工及造价、占地面积等，选定平底抛物线形复合渠道的幂律指数 m ($1 < m \leq 3$)，再进行渠道断面的水力设计。

利用直接计算式(24)、式(25)计算水力最佳断面参数 $\eta = B_0/h_h$ 和 $\beta = b/h_h$ 。再利用式(26)、式(27)、式(28)计算水力最佳断面条件下的过水面积 A_h 、湿周 P_h 、正常水深 h_h 。水面宽度 B 可通过 $\eta = B_0/h_h$ 和 $\beta = b/h_h$ 以及 h_h 计算得到。

当认为水力最佳断面的渠道宽深比不够理想需要调整时，首先选定比例系数 α (α 可取 1.01, 1.02, 1.03, 1.04) 和实用经济断面其中一个参数值 k_1 (k_1 可取 1.25, 1.50, 1.75, 2.00)。再根据 m 、 α 和 k_1 通过表4查得相应的平底抛物线形复合渠道的实用经济断面另一参数值 k_2 。

利用 m 、 α 、 k_1 、 k_2 、 h_h 根据式(31)求出实用经济断面的水深 h ，再利用 $B_0/h = k_1$ ， $b/h = k_2$ 以及 h 计算得到渠道水面总宽度 B ，利用 $A = \alpha \times A_h$ 求出实用经济断面的面积 A 值，利用 $P = \alpha^{5/2} \times P_h$ 求出实用经济

断面的湿周 P 值。

利用 $V=Q/A$ 计算出断面的平均流速，再按不冲不淤的要求校核渠道流速是否满足要求。并且应从衬砌和挖方的经济性、占地面积、施工管理等进行综合考虑，选定渠道的断面尺寸。

7 算例与分析

算例：假设需设计某半立方平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面和实用经济断面，渠道底部糙率为 0.014，渠底坡降为 1/10000，流量 Q 为 2.5 m³/s。并与文献[17]的结果进行对比。

解：对于半立方平底抛物线形复合渠道，由式(24)和式(25)得水力最佳断面参数 $\eta=1.408$ 和 $\beta=0.797$ ；由式(26)得过水断面面积 $A_h=4.1256$ m²；由式(27)得湿周 $P_h=5.2173$ m；由式(28)得正常水深 $h_h=1.5745$ m。与文献[17]采用解析计算方法的计算结果进行对比，可知水力最佳断面参数、正常水深、断面面积、湿周的相对偏差分别为：1.056%、-0.813%、-0.675%、-0.4918%、0.2623%，相对偏差的绝对值均小于 1.5%，验证了本文方法的精确性。

在文献[17]中，半立方平底抛物线形复合渠道的湿周可利用弧长微分法计算出解析解，为：

$$P = \frac{B^3}{864h^2} \left[\left(144 \frac{h^2}{B^2} + 16 \right)^{3/2} - 64 \right] + b \quad (34)$$

根据本文给出的式(6)，将 $m=3/2$ 代入其中，可得到利用高斯超几何函数表达的半立方平底抛物线形复合渠道的湿周，为：

$$P = b + \frac{B_0}{3} \times {}_2F_1 \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2; \frac{-9h^2}{B_0^2} \right\} + \frac{B_0}{1.5} \sqrt{1 + \frac{9h^2}{B_0^2}} \quad (35)$$

其它任意幂律指数的平底抛物线形复合渠道，也都可由式(6)得到湿周的解析表达式。进而可利用式(21)和式(22)分别计算得到平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面参数 η 和 β ，或利用式(23)、式(24)直接计算得到 η 和 β 。

对于实用经济断面，先选定 $\alpha=1.04$ ， $k_1=1.25$ ，通过表 4 可查得 $k_2=1.7253$ ，由式(31)可得实用经济断面正常水深 $h=1.3823$ m；水面宽度 $B=(k_1+k_2) \times h=4.1128$ m；实用经济断面面积 $A=\alpha \times A_h=4.2906$ m²；实用经济断面湿周 $P=\alpha^{5/2} \times P_h=5.7548$ m。本文填补了平底抛物线形复合渠道的实用经济断面的计算方法的空白，方便了平底抛物线形复合渠道的实用经济断面的设计。

其它任意幂律指数的平底抛物线形复合渠道，也可利用式(33)计算得到平底抛物线形复合渠道的实用经济断面参数 k_2 ，再结合式(1)、式(4)、式(6)进行相应的断面设计和水力计算。

综上，上述算例展示了平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面及实用经济断面统一设计方法的精确性、便利性以及通用性。且填补了平底抛物线形复合渠道的实用经济断面的计算方法的空白，方便了平底抛物线形渠道的实用经济断面设计。

8 结论

平底抛物线形复合渠道是由抛物线形断面发展而来的一种新型复合抛物线形断面，其除了具有边坡连续性好、抗冻胀性能优良、坡脚光滑便于输沙、渠底平坦施工方便等优点外，还因含多个设计变量使得设计更灵活的优点。现有的平底抛物线形复合渠道断面只能选择极个别幂律指数，选择范围太窄，且水力最佳断面的设计计算过程复杂、精度低、适用范围小等问题，给设计人员带来极大不便。(1)本文得到了可计算三角形断面、梯形断面、抛物线形断面、平底抛物线形复合断面等各类渠道湿周解析解的统一表达式，并得到了平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面求解方程，给出了该类断面全范围($1 < m \leq 3$)的水力最佳断面参数的直接计算公式。(2)给出了相对误差均小于 2% 的水力最佳断面条件下的水深、过水面积及湿周的直接计算公式。且获得了平底抛物线形复合渠道

的水力最佳断面中的最优幂律指数，从而取得全局水力最佳断面。通过与各类水力最佳断面的对比发现：三次方平底抛物线形复合渠道的水力最佳断面是旱区、寒区、多沙河渠大中型渠道最经济合理的断面形式。(3)得到了任意幂律指数的平底抛物线形复合渠道的实用经济断面参数的求解方程。并给出了全范围($1 < m \leq 3$)典型该类断面的实用经济断面设计参数的查算表及其水力最佳及实用经济断面设计步骤。

参 考 文 献：

- [1] VALIANI A, CALEFFI V . Depth-energy and depth-force relationships in open channel flows . II: Analytical findings for power-law cross-sections[J] . Advances in Water Resources, 2009, 32(2): 213-224 .
- [2] VALIANI A, CALEFFI V . Depth-energy and depth-force relationships in open channel flows: Analytical findings[J] . Advances in Water Resources, 2008, 31(3): 447-454 .
- [3] ABWAR A A, VRUES T T d . Hydraulically efficient power-law channels[J] . Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2003, 129(1): 18-26 .
- [4] LOGANATHAN G V . Optimal design of parabolic canals[J] . Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 1991, 117(5): 716-735 .
- [5] STRELKOFF T S, CLEMMENS A J . Approximating wetted perimeter in power-law cross section[J] . Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2000, 126(2): 98-109 .
- [6] HUSSEIN A S A . Simplified design of hydraulically efficient power-law channels with freeboard[J] . Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2008, 134(3): 380-386 .
- [7] 张志昌, 刘亚菲, 刘松舰 . 抛物线形渠道水力最优断面的计算[J] . 西安理工大学学报, 2002, 18(3): 235-237 .
- [8] 魏文礼, 杨国丽 . 立方抛物线形渠道水力最优断面的计算[J] . 武汉大学学报(工学版), 2006, 39(3): 49-51 .
- [9] HAN Y C, EASA S M . Superior cubic channel section and analytical solution of best hydraulic properties[J] . Flow Measurement and Instrumentation, 2016, 50: 169-177 .
- [10] 韩延成, 徐征和, 高学平, 等 . 二分之五次方抛物线形明渠设计及提高水力特性效果[J] . 农业工程学报, 2017, 33(4): 131-136 .
- [11] HAN Y C, EASA S M . New and improved three and one-third parabolic channel and most efficient hydraulic section[J] . Canadian Journal of Civil Engineering, 2017, 44(5): 387-391 .
- [12] 张丽伟, 滕凯 . 抛物线形断面最优水力参数及方程指数计算方法[J] . 水利水电科技进展, 2014, 34(5): 65-68 .
- [13] 李刚, 何武全, 翟东汉 . 基于拉格朗日法的抛物线形复合渠道的水力最佳断面[J] . 灌溉排水学报, 2017, 36(11): 51-55 .
- [14] EASA S M . Improved channel cross section with two-segment parabolic sides and horizontal bottom[J] . Journal of Irrigation & Drainage Engineering, 2009, 135(3): 357-365 .
- [15] HAN Y C, XU Z H, GAO X P . The best hydraulic section of horizontal-bottomed parabolic channel section[J] . Journal of Hydrodynamics, 2017, 29(2): 305-313 .
- [16] DAS A . Optimal design of channel having horizontal bottom and parabolic sides[J] . Journal of Irrigation & Drainage Engineering, 2007, 133(2): 192-197 .
- [17] HAN Y C . Horizontal bottomed semi-cubic parabolic channel and best hydraulic section[J] . Flow Measurement and Instrumentation, 2015, 45: 56-61 .
- [18] 王正中, 席跟战, 宋松柏, 等 . 梯形明渠正常水深直接计算公式[J] . 长江科学院院报, 1998, 15(6): 1-4 .
- [19] WANG Z Z . Formula for calculating critical depth of trapezoidal open channel [J] . Journal of Hydraulic Engineering, 1998, 124(1): 90-91 .
- [20] 王正中, 袁骊, 武成烈 . 再论梯形明渠临界水深计算法[J] . 水利学报, 1999(4): 14-17 .
- [21] 王正中, 雷天朝, 宋松柏, 等 . 梯形断面收缩水深计算的迭代法[J] . 长江科学院院报, 1997, 14(3): 18-19 .

- [22] 赵延风, 王正中, 芦琴. 梯形断面收缩水深的直接计算公式[J]. 农业工程学报, 2009, 25(8): 24-30.
- [23] 赵延风, 王正中, 芦琴, 等. 梯形明渠水跃共轭水深的直接计算方法[J]. 山东大学学报(工学版), 2009, 39(2): 131-136.
- [24] GB/T50600—2010, 渠道防渗工程技术规范[S]. 北京: 中国计划出版社, 2011.
- [25] GB/T50288—1999, 灌溉与排水工程设计规范[S]. 北京: 中国计划出版社, 1999.
- [26] 何武全, 宋清林, 宋江涛, 等. 抛物线形混凝土衬砌渠道标准化结构形式研究[J]. 灌溉排水学报, 2016, 35(5): 10-14.
- [27] CHOW V T. Open Channel Hydraulics[M]. New York: McGraw-Hill, 1959.
- [28] BRYCHKOV Y A. Handbook of Special Function[M]. New York: the CRC Press, 2008.
- [29] BRONSHTEIN I N, SEMENDYAYEV K A, MUSIOL G, et al. Handbook of Mathematics[M]. New York: Springer, 2007.
- [30] 裘松良. Gauss超几何函数的导数和广义Legendre关系[J]. 杭州电子科技大学学报, 1998(2): 1-8.
- [31] MONADJEMI P. General formulation of best hydraulic channel section[J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 1994, 120(1): 27-35.
- [32] SWAMEE P K, CHAHAR B R. Design of Canals[M]. India: Springer, 2015.
- [33] 荣丰涛. 弧形坡脚梯形渠道实用经济断面的计算[J]. 山西水利科技, 2004(1): 4-6.

Design method for optimal hydraulic cross-section and practically economic cross-section of horizontal-bottomed power-law shaped canals with general exponent parameter

WANG Zhengzhong^{1, 2}, CHEN Bairu^{1, 2}, WANG Yi^{1, 2}, ZHAO Yanfeng^{1, 2}

(1. Cold and Arid Regions Water Engineering Safety Research Center, Northwest A&F University, Yangling 712100, China;

2. Key Laboratory of Agricultural Soil and Water Engineering in Arid and Semiarid Areas of Ministry of Education Northwest A&F University, Yangling 712100, China)

Abstract: As to large and medium-sized canals, they are often designed in the form of horizontal-bottomed Power-Law shaped canals. But there is no analytical solution for all of the wetted-perimeter of horizontal-bottomed power-law shaped canals with general exponent parameter. Therefore, its optimal hydraulic cross-section and practically economic cross-section with general exponent parameter is very complicated. In addition, in the literature the optimum hydraulic horizontal-bottomed power-law shaped canals has been developed for only specific exponent m of the power-law formula. In this article, by using Gauss-hypergeometric function, an analytical solution for the integral formula of the wetted-perimeter of horizontal-bottomed power-law section with general exponent parameter is obtained. Taking ratio of water surface width of power-law shaped side to water depth, and ratio of bed width to water depth as variables, hydraulic optimal section parameter can be obtained by using Lagrange multiplier method. The parameter equation of optimal hydraulic cross-section is obtained. According to the relationship between optimal hydraulic cross-section and practically economic cross-section, the parameter equation of practically economic cross-section of any horizontal-bottomed power-law section with general exponent parameter is also obtained. This article not only presents the uniform design method of optimal hydraulic cross-section and practically economic cross-section about these shaped canals with general exponent parameter, but also gives a super-optimal hydraulic horizontal-bottomed power-law shaped canals' s exponent parameter $m=3$, where the discharge is largest. This super-optimal hydraulic section presents a new discovery as it provides the global maximum discharge among all possible section shapes. It can be used as reference in the planning and design of large and medium-sized canals.

Keywords: horizontal-bottomed power-law shaped canals; Gaussian hypergeometric function; optimal hydraulic cross-section; practically economic cross-section; open channel hydraulics

(责任编辑: 李福田)