孤立子和湍流

刘兆存　金忠青

(中国水利水电科学研究院　北京　100038)　(河海大学　南京　210098)

摘要　本文在综述孤立子研究成果的基础上,结合湍流的特点深入分析了湍流的物理机制,对湍流的拟序结构等现象作了一些探讨,对负粘性现象提出了看法。认为孤立子有可能是流体质点间互相作用的基本形式之一,大量孤立子的统计特征量和湍流相关量之间应当有着密切的关系。

关键词　孤立子　湍流　拟序结构　综述

湍流是典型的非线性耗散体系。D. K. Campbell曾指出非线性科学中的 4个有意义的范例中和湍流关系密切的有 3个:① 拟序结构和孤立子;② 确定性混沌和分形;③ 复杂的图形和图型。湍流问题从数学描述来看是无穷维的动力系统,人们目前主要把高维动力系统约化为低维动力系统来处理。从物理上看,耗散结构的自组织思想和协同学的役使(伺服)原理都体现了约化思想。从微分方程的角度出发来模拟湍流是湍流研究的一个重要途径。湍流运动过程中出现的种种特征都和非线性有关,湍流运动具有明显的历史记忆性。从层流到湍流的转换和湍流本身的演化都具有系统整体特性。这里我们主要用孤立子来阐述湍流的机制。

1　孤立子

孤立子简称孤子,亦称孤立波,是一大类非线性偏微分方程的许多具有特殊性质的解及相应物理现象:① 能量比较集中于一个较狭小的区域;② 两个孤立波相互作用时出现弹性散射现象—— 孤立子具备粒子和波的许多特性。

孤立子因其在数学物理方程中应用的广泛性很受人们重视[1],描述孤立子的方程除用微分方程外还用变分方程[2]。在一定条件下大气中也会产生孤立波[3]。孤立子的方程有多种,如 k-dv方程, B-kdv方程, Schwartz-kdv方程等。推广的 k-dv方程也有人讨论[3,4]。广义 k-dV方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+6f(t)u = g(t)+x(f'(t)+12f^2(t)) \qquad (1)$$

的解为[5]

$$u=\frac{\lambda^2 a^2(t)}{2}\mathrm{sech}^2\left[\frac{\lambda a(t)}{2}(x+q(t))\right]+f(t)x+f_1(t) \qquad (2)$$

$$f_1(t)=\exp\left(-12\int f(t)\mathrm{d}t\right)\cdot\left[\int g(t)\exp\left(12\int f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t+C_1\right] \qquad (3)$$

$$q(t)=\exp\left(6\int f(t)\mathrm{d}t\right)\cdot\left[-\int(6f_1(t)+\lambda^2a^2)\exp\left(-\int 6f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t+C_2\right] \qquad (4)$$

上式中　C_1, C_2为积分常数; $a=a(t)$; λ为参数。显然在式(1)中令 $f(t)=0$可知如下方程的解

$$\frac{\partial u}{\partial t}+6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=g(t) \quad (5)$$

许多学者从各个方面研究孤立波:自由表面时分层流体中的孤立波可以分裂[6];分层对表面孤立波分裂的影响几乎可以不予考虑;有人发现了非传播孤立波[7]并考虑了表面张力对非传播孤立波的影响[8];孤立波之间可以互相作用[9]等等。

2 B-kdv 方程

熊树林[10]认为便于用来模拟解释湍流的是 B-kdv 方程

$$u_t+uu_x+\beta u_{xxx}-\nu u_{xx}=0 \quad (6)$$

它的一个解析解为[10]

$$u(x,t)=u(x-\lambda t)=u(\xi)$$
$$=\frac{6}{5}\Bigg(\frac{\nu^2}{5\beta}\sqrt{1+\frac{625\beta^2}{18\nu^4}c}-\frac{\nu^2}{5\beta}+\frac{\frac{2\nu^2}{5\beta}\exp\left(-\frac{\nu}{5\beta}(\xi+\xi_0)\right)}{1+\exp\left(-\frac{\nu}{5\beta}(\xi+\xi_0)\right)}\Bigg)$$
$$+\frac{\frac{12\nu^2}{25\beta}\exp\left(-\frac{\nu}{5\beta}(\xi+\xi_0)\right)}{\left(1+\exp\left(-\frac{\nu}{5\beta}(\xi+\xi_0)\right)\right)^2} \quad (7)$$

式中 c 和 ξ_0 是常数;λ 是波速,且满足 $\sqrt{\lambda^2-2c}=\frac{6\nu^2}{25\beta}$。进一步分析知式(7)中右边第一项圆括中部分(记为 u_B)是 Burgers方程 $u_t+uu_x-\nu u_{xx}=0$ 的一个解。第二项(记为 u_k)是 k-dv 方程 $u_t+uu_x+\beta u_{xxx}=0$ 的一个解。B-kdv 方程由冲击波解 u_B 和孤立子解 u_k 线性组合而成。且耗散系数 ν 很小时行波冲击性不明显,色散对行波的冲击性有抑制作用。

文[11]分析指出,非线性演化方程(偏微分方程)的孤立波解相当于此方程对应的动力系统(常微分方程)的同宿轨道,这是动力系统连结同一鞍点的轨道;而非线性演化方程的冲击波解相当于此方程对应的动力系统的异宿轨道,这是动力系统连结不同鞍点,或联结鞍点和结点,或联结鞍点和焦点的轨道。无论孤立波还是冲击波,它们相应的同宿轨道或异宿轨道的极限集可以理解为物理上的不同的相(状态)。用微分方程表达的牛顿第二定律中含有稳定少变的孤立波。从物理场来看其实是一种行波的传播。波粒二重性(林家翘认为湍流有波粒二重性)表现为常微分方程的周期轨道对应于偏微分方程的行波,常微分方程的同宿轨道对应于偏微分方程的孤立波,常微分方程的异宿轨道对应于偏微分方程的冲击波。

利用同宿(或异宿)轨道和行波的关系来研究湍流是近年来发展研究湍流的前沿性课题。这里同宿或异宿分岔是一种大范围的分岔,不同于局部分岔,大范围的分岔更能描述混沌和湍流的整体性质。

文[12]认为,文[10]求得的 B-kdv 方程的解析解是方程的行波解的鞍-结异宿轨道,对湍流而言更有意义的是鞍-焦异宿轨道。

令 $\dot{u}=v$,则方程(6)在相平面(u,v)上有两个平衡点:$P(u_1,0)=P(\lambda+\sqrt{\lambda^2+2A},0)$,$Q(u_2,0)=Q(\lambda-\sqrt{\lambda^2+2A},0)$,其中 λ 是波速,A 是常数。且有:

a. $\nu>0,\beta>0$ 时,若 $\nu^2<4\beta\sqrt{\lambda^2+2A}$,$P$ 是不稳定焦点,Q 是鞍点。方程(6)的鞍-焦异宿轨道间的冲击波解(见图1)为

$$u(x,t)=\begin{cases}u_1+\frac{u_1-u_2}{2}\exp\left(\frac{\nu}{2\beta}\xi\right)\cdot\cos\sqrt{\frac{u_1-u_2}{2\beta}-\frac{\nu}{2\beta}}\,\xi & \xi\in(-\infty,0)\\ u_2+\frac{3(u_1-u_2)}{2}\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{u_1-u_2}{8\beta}}\,\xi & \xi\in[0,+\infty)\end{cases} \quad (8)$$

b. $\nu>0,\beta<0$ 时,若 $\nu^2<-4\beta\sqrt{\lambda^2+2A}$

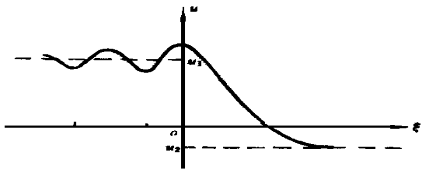

图 1

时, P 是鞍点, Q 是稳定焦点。其解 (见图 2) 为

$$u(x,t)=\begin{cases} u_1-\dfrac{3(u_1-u_2)}{2}\operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\dfrac{u_1-u_2}{-8U}}\,\xi\right) \\ \qquad \xi\in(-\infty,0) \\ u_2-\dfrac{u_1-u_2}{2}\exp\left(\dfrac{\nu}{2U}\xi\right) \\ \cdot\ \cos\left(\sqrt{\dfrac{u_1-u_2}{-2U}-\dfrac{\nu}{2U}}\,\xi\right) \\ \qquad \xi\in[0,+\infty) \end{cases} \tag{9}$$

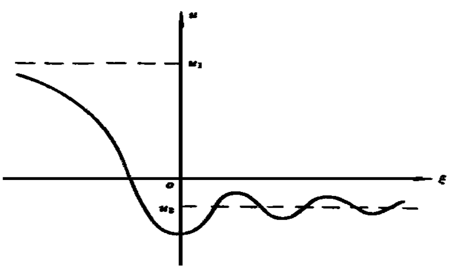

图 2

在两种情况下, $\xi\to-\infty$, $u\to u_1$, 称为解的 T 极限集; $\xi\to+\infty$ 时, $u\to u_2$, 称为解的 k 极限集。图 1中, $\xi\to 0$时, 异宿轨道的最高点 $u\to\frac{1}{2}(3u_1-u_2)$; 图 2中, $\xi\to 0$时异宿轨道的最低点 $u\to-\frac{1}{2}(u_1-3u_2)$。

对应于图 1的行波当以速度 λ 向右移动时, 该波的前方场首先被状态 u_2 控制, 慢慢进入耗散项不起作用的孤立波一段。当波的振幅达到最大值后, 场便被耗散所引起的衰减振荡所控制, 波的振幅和尺度逐渐衰减, 最后被状态 u_1 控制, 这是湍流涡旋尺度的级串散裂过程。

对于图 2的行波以速度 λ 向右移动时, 波的耗散作用由大变小, 涡旋尺度逐渐增大, 这是负色散的结果。意味大尺度涡旋从小尺度涡旋获得能量, 引起负粘性。

若从物理上看, B-kdv 方程包含三种物理因子: 非线性、耗散和色散。非线性使能量集中, 耗散使机械能向热能转化, 正色散使能量分散。非线性和色散的平衡可形成孤立波, 如图 1的右半部分和图 2的左半部分。正色散中加入正耗散的作用可使涡旋尺度由大变小, 大尺度的涡旋能量转变为小尺度的涡旋能量, 如图 1的左半部分。正耗散中加入负色散的作用可使涡旋尺度由小变大, 小尺度涡旋能量转变为大尺度涡旋能量, 如图 2的右半部分。

描述孤立子的方程是非线性的, 它必然会产生混沌。采用耦合映射模型数值上可以模拟混沌随时空的演化。孤立子的奇怪吸引子应当对应于湍流斑。从数学上看, 对于用微分方程描述的无穷维动力系统而言, 其吸引子和系统的奇异性有关。反映混沌运动的奇怪吸引子来源于系统的双曲点 (即代表系统奇异性的集合)。这类奇异点生出的不稳定流形通过一定方式逐步结合起来, 当它们变得足够“大”时, 就构成了奇怪吸引子。如观测到的木星表面的大红斑块呈混沌态有奇怪吸引子。

简单分析知, 孤立子含有一定的动量和能量, 弹性散射时其原来的动量和能量均不改变。

3 湍流现象

控制湍流运动的方程原则上仍是 Navier-Stokes(N-S)方程, 属拟线性双曲型。N-S方程在给定定解条件下解不确定 (存在但不一定唯一), 这是非线性方程的重要特征, 构成非线性方程描述现象的复杂性。

实验表明,湍流运动具有强烈的三维性。湍流内部的涡旋可以撕裂、合并、卷吸,性态十分复杂。湍流演化的方向总是沿着熵增的方向,耗散单向进行,机械能转化为热能。湍流演化过程中除耗散外还有负粘性现象。能量逆转意味着熵减,是自组织的行为。拟序结构的根本原因在于湍流这个耗散系统的非线性性。远离平衡的非线性开放系统中的涨落具有蝴蝶效应。已经由实验证实壁湍流中拟序运动生成机制与自由切变湍流中拟序运动生成机制有本质的不同。壁湍流中拟序运动具有强三维效应。线性稳定性分析结果表明是稳定的。猝发伴随速度的二次不稳定性。流动显示表明切变湍流中和壁湍流中都有湍流斑。

从层流向湍流的转捩实验表明,转捩后的湍流有明显的记忆特性,对其演化历史有一定的依赖性,同时湍流对外界扰动很敏感。例如近来发现的在一根圆柱旁的某一范围内插入一根细圆柱(直径小一个数量级以上),可以抑制下游卡门涡的形成。

4 湍流的演化

对于从层流失稳并经过发展的湍流,理查逊认为其可以描述为涡中有涡。柯尔莫哥洛夫的湍流图像可以得到不少定量结果。近来的湍流 β 模型是对传统湍流图像的修正。表征湍流的物理量在时间和空间上都是局部的、瞬时的,湍流中的间隙现象主要是湍流中局部的小尺度的运动。

在湍流运动的物理空间充满了大大小小的涡旋,小的涡旋有可能"漂浮"在大涡旋之上,也可能处于边缘。由于粘性涡旋在不断破裂的同时也在重聚,在变形。涡旋的动力学描述必定是复杂的——有些涡旋处于非惯性系内又具有随机性。拟序结构说明,流体运动在用场观点描述时,大量流体质点运动图像随时间在空间中的演化,在相同条件下在统计意义上而言是确定的。实验表明,自由剪切流的初始发展阶段中产生的拟序结构相当有规则,但随空间推移下游拟序结构不如初始阶段那样有规则。实验发现对于湍流边界层,在边界层外层引入扰动对内层流动状态有一定的影响,但影响有限,反映出湍流运动作为耗散结构具有历史性和整体性的演化特征。

湍流的随机性,有人(如 Landav and Lifishitz Frisch等)认为是 N-S方程的吸引子的结果。对不可压缩的均匀湍流的研究指出,采用统计方法处理运动学是成功的,处理动力学是失败的[13]。随机性仅仅从一个侧面刻划了湍流的性态。湍流中的间隙实验证实(Batchelor and Townsend)间隙强度和从大尺度现象总结的高斯统计律不符,和小尺度相联系的能量在空间呈稀疏状分布,基本上呈点状。这种点状的分布在和小尺度运动相连的,有相对长时间尺度的现象中也被实验观察看到了。

湍流中在边界影响下流体运动在由剪切向旋转过渡的过程中会出现发夹形的涡[14],发夹涡和雷诺应力有关[15],涡面向涡管演化过程中的现象可用 Kelin-Helmholtz不稳定规律描述[14]。在均匀各向同性湍流的小尺度结构演化中发现的涡旋以涡管或涡面形式在流体中运动,且涡管涡旋强度大于涡面涡旋强度。均匀各向同性湍流的粘性耗散区本质上并不一定要有惯性。用计算机模拟均匀各向同性湍流的小尺度结构特性时,如果去掉惯性区,仍能得到和实验相符的能谱。湍流中,涡旋的大尺度分量在有螺旋度和某些附加对称性条件时才存在[15]。螺旋度在湍流中有抑制动能散裂的作用。这种作用对于螺旋度分布不均匀的情形是和雷诺应力分别起作用的。

原来认为在统计意义上湍流内部大尺度运动和小尺度运动可以看作是相互独立的,这是不正确的[16]。数值模拟表明,在湍流边

界层中,壁面附近的涡运动在近壁处有流体上升形成致密涡群以恒定速度沿壁面运动,因壁面影响而破裂成反向旋转的偶极子[17]。这种崩裂和最初的边界条件影响的非线性色散作用有关,之后可成为孤立波。计算机模拟中可产生孤立波垫层,这些孤立波旋转缓慢,最后消失在背景旋转之中。文[17]指出湍流中产生不稳定孤立波的原因主要是波列释放多余的能量,能量释放以不连续形式进行。

5 孤立波和湍流

湍流中含有大量的涡。研究表明,涡波可以存在非定常非线性作用。波中可以有涡,涡中可以有波,涡波可以互相调控。不仅如此,不但涡会发生波而且波也会产生涡。前者包含涡能向波能的转化,后者则是波能向涡能的转化。

孤立子方程是弱非线性方程,含有非线性、耗散和色散。它的解的性质清楚地体现了湍流具有的一些本质性特征,如能量耗散,能量逆转等,可以方便地解释负粘性现象。一维的孤立波方程很符合湍流的一些特征。

湍流演化过程中内部结构从整体性大尺度长时标特性看是连续的,与经验相当吻合。然而继 β 模型[18]之后人们认为湍流中的能量主要含于有分数维(分形)的内波集上。

虽然孤立子在一些情形下的奇怪吸引子特性已有人探讨[19],但 B-kdv 方程更适合阐释湍流。吸引子的长期和耗散系统参数扰动下的动力学行为,几何结构,尤以吸引子的短期动力学行为更重要,和湍流关系最为密切。从孤立波方程出发利用格点耦合映射模型模拟孤立波随时空演化特性已做不少工作,却不便于从理论上进一步分析,因为求出一些参数后进入了混沌。

湍流的数学描述是无穷维的动力系统。N-S方程有可能有惯性流形(目前假定它有,从物理上看这是大小涡之间的相互作用)。惯性流形的存在标志着奇怪吸引子的存在,和混沌关系密切,如探讨得较多的 ABC流等。可是当将无穷维空间投影到有限维空间时,给出的仅是近似本质的特征。B-kdv 方程从一个侧面刻划了湍流。

随机分形的生长可成为奇怪吸引子,有助于模拟拟序结构等现象,湍流中的随机性本质上来源于非线性性。

二维平行壁面剪切流失稳分析表明,湍流和孤立子关系密切,虽然不少本质性问题还不能确定,但湍流中的拟序结构,湍流斑等重要特征表征了湍流中能量分配情况。笔者认为,负粘性、拟序结构等是和存在于湍流无穷维动力系统中的众多孤立子的作用有关的。换言之,孤立子是流体质点间作用的一种形式,有可能是基本作用的形式之一,因为拟序结构是湍流中波包调制的结果。

6 结　论

从层流向湍流熵增过程的演化,是流体中湍流态逐渐被激发的过程。经过逐级分叉,能量在流体内部被重新分配和耗散。从物理上看,层流向湍流的相变应当在有限时间和空间内完成,在这可逆方向转化中,雷诺数的不同仅仅是初始扰动演化背景的不同,因为不能从动力学上区别出惯性系内的不同惯性态。孤立子有可能是流体质点间互相作用的基本形式之一,大量孤立子的统计特征量和湍流相关量之间应当有密切的关系。

参考文献

1 谷超豪等.孤立子理论与应用.杭州:浙江科学技术出版社,1990

2 屠规彰.约束形式变分计算及其在孤立子方程研究中的应用.中国科学 A辑,1985(10):890~897

3 何猛省.正压大气中的孤立波.中国科学 A辑,1985(12):1121~1128

4 楼森岳.推广的 Boussinesq方程和 kdv方程——

Painleve性质、Backlund变换和 Lax对.中国科学 A辑,1991(6): 622~ 631
5 朱佐农.含外力项的广义 kdv 方程的类孤子解.物理学报,1992,41(10): 1561~ 1566
6 周显初.分层流体中孤立波的分裂.中国科学 A辑,1987(10): 1071~ 1080
7 王本仁.参量激励圆柱槽中的强迫孤立波.中国科学 A辑,1992(1)
8 周显初等.表面张力对非传播孤立波的影响.中国科学 A辑,1992(12)
9 陈陆君等.水槽中孤波相互作用的微扰变分分析.物理学报,1992,41(10): 1745~ 1752
10 熊树林. Burgers-kdv 方程的一类解析解.科学通报,1989(1): 26~ 29
11 刘式达等.孤立波和同宿轨道.力学与实践,1991,13(4): 9~ 15
12 刘式达等.湍流的 kdv-Burgers方程模型.中国科学 A辑,1991(9): 938~ 946
13 Shtilman L, et al. On some kinematic versus dynamic properities of homogeneous turbulence. J Fluid Mech, 1993, 247: 65~ 77
14 Ruetsch G R, et al. The evolution of small-scale structure in homogeneous isotropic turbulence. Phys Fluids A, 1992, 4(12): 2747~ 2760
15 Nobumitsv Yokai, et al. Statistical analysis of the effects of helicity in inhomogeneous turbulence. Phys Fluids A, 1993, 5(2): 464~ 477
16 Alexander, et al. The sweeping decorrelation hypothesis and energy- inertial scale interaction in high Reynolds number flows. J Fluid Mech, 1993, 248: 493~ 511
17 Javier, et al. The rollup of a vortex layer near a wall. J Fluid Mech, 1993, 248: 297~ 313
18 Uriel Frisch, et al. A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence. J Fluid Mech, 1978, 87: 719~ 736
19 田立新等.耗散孤立波方程的吸引子.应用数学和力学,1994,15(6): 539~ 547

(收稿日期: 1994- 10- 10)

(上接第 20页)

11 Okubo P G, Keiti Aki. Fractal geometry in the San Andress foult system. J Geophys Res, 1987, 92(B1): 345~ 355
12 Barton fractal geometry of two-dimension fracture networks at Yucca Mountion, Southwest Nevada. In Stephannson ed. On Fundamentals of Rock Joints, Bjorkkliden, Swedan, 1985: 77~ 84
13 谢和平.雁型断裂的分形模型和能量耗散.岩土工程学报,1994,16(1): 1~ 17
14 Harris. Fractal analysis of fraeture in rocks. Tectonophys, 1991, 198: 107~ 115
15 La Point. A method to characterize fracture density and connectivity through fractal geometry. Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr, 1988, 25: 421~ 429
16 黄暹,柯家骏.分形粒度分布模型及颗粒过程的统一性.见:第二届分形大会论文集.合肥:中国科学技术大学出版社,1992: 294~ 297
17 Samiss C G, Robert H O, Anderson J L, et al. Self-similar cataclasite in the formation of fault gouge. Pure & Applied Geophys, 1986, 124: 53~ 78
18 Turcotte. Fractal and fragmentation. J Geophys Res, 1986, 91(B2): 1921~ 1926
19 Zhao Zhongyan, Wang Yi, Liu Xiaohan. Fractals analysis applied to cataclastic rocks. Tectonophys, 1990, 178: 373~ 377
20 徐永福,张耀华,田美存等.围压对砂岩破碎分形特征的影响.河海大学学报,1995,23(4): 24~ 28
21 Turcotte. A fractal model for crustal deformation. Tectonophys, 1986, 132: 261~ 269

(收稿日期: 1995- 01- 27)