

# 水沙环境中大肠杆菌迁移转化模型的解析解

高 广 海

(南开大学 环境科学与工程学院 环境污染过程与基准教育部重点实验室, 天津 300071)

**摘 要:** 对水沙环境中大肠杆菌迁移转化数学模型的解析解进行研究。在一定的简化条件下, 得出了泥沙单纯沉积和单纯侵蚀两种特定动床条件下大肠杆菌迁移转化模型的两个解析解。本文中所得解析解可以用于数学模型的验证和复杂条件下解析解研究的基础。

**关键词:** 大肠杆菌; 泥沙; 解析解; 数学模型; 水沙环境

中图分类号: X522

文献标识码: A

文章编号: 1672-643X(2013)05-0081-04

## Analytical solution of transport and transition model of escherichia coli in environment of water and sediment

GAO Guanghai

(Key laboratory of Process and Standard of Environment Pollution of MOE, College of Environmental Science and Engineering, Nankai University, Tianjin 300071, China)

**Abstract:** The paper studied analytical solutions of transport and transition model of e. coli in environment of water and sediment. Based on some assumptions, two analytical solutions under two special moving bed conditions of deposition and erosion were obtained. The result can be used to verify numerical model and study analytical solution under complex conditions.

**Key words:** escherichia coli; sediment; analytical solution; mathematical model; environment of water and sediment

### 1 概 述

近年来,河流、河口和近岸海域的水体污染日益引起了人们的重视,并得到了广泛的研究。大肠杆菌(E. Coli)是卫生学、流行病学上安全度的公认指标和主要监测项目,是用来评价水体受污染程度的重要指标。泥沙与水流共同成为污染物的主要载体影响着污染物在水体中的迁移转化过程从而最终影响着水体的生态环境条件,其中泥沙运动状态和吸附特征是泥沙影响水质主要的两个方面<sup>[1]</sup>。大肠杆菌以不同形式进入到水体中,如生活污水,表面径流,水生动物,底泥冲刷等。在天然水体和底泥中,大肠杆菌的存在形式一般可分为自由态和吸附于泥沙上的吸附态两种,自由态污染物随水体的运动而运动,而吸附态污染物随泥沙运动。在一定的动力条件下吸附态大肠杆菌会随泥沙沉降到底泥也可能随底泥的冲刷重新进入水体形成二次污染,在一定的动力和外部化学、物理及生物条件下吸附态和自

由态大肠杆菌会发生转化。因水环境中污染物大肠杆菌与泥沙运动有着密不可分的关系,故必须结合水流和泥沙运动的研究水沙环境中大肠杆菌的迁移和转化。

随着计算机技术和数值模拟技术的不断发展,数学模型<sup>[2-5]</sup>已成为研究水环境污染的一种重要手段,但由于泥沙本身的运动规律复杂,加之对微生物与泥沙相互作用的机理的认识还比较有限,目前尚没有成熟大肠杆菌迁移转化数学模型。开展水沙环境中大肠杆菌迁移转化数学模型的研究具有重要的学术意义和实用价值。

水沙环境中大肠杆菌的迁移转化问题本身的复杂性,相应的数学模型的控制方程组一般难以求得解析解,但根据合理的假定对控制方程组进行简化后,仍可能求得解析解。如袁德奎等<sup>[6]</sup>通过得出泥沙和重金属相互作用下数学模型的两个解析解。目前也有一些在静水或准平衡状态下的简单结果<sup>[7-8]</sup>。解析解虽然只能在一定的简化条件下求

得,但其对于评判数学模型的合理性、认识问题的基本规律,以及改进和完善数学模型有着重要的意义。通常,通过数学模型给出的结果是数值解,对数值解进行系统和严格的验证是将数学模型应用于实际问题前必须开展的工作,而用于验证数值解的一般有实测资料、实验数据和解析解。由于问题的复杂性,涉及的因素多,当前针对水沙环境中大肠杆菌迁移转化进行的系统而精确的实测资料和实验数据还较少,因此在现阶段解析解的研究对于数学模型的验证显得尤为重要。

## 2 大肠杆菌迁移转化数学模型

在河口、海岸及河流区域,由于水体的水平尺度远远大于垂向尺度,通常用水深积分的平面二维对流扩散方程来描述泥沙及污染物的运动。二维泥沙运动方程可写为:

$$\frac{\partial SH}{\partial t} + \frac{\partial SUH}{\partial x} + \frac{\partial SVH}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HD_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HD_y \frac{\partial S}{\partial y} \right) = E \quad (1)$$

式中:  $S$  为悬沙浓度;  $D_x$ 、 $D_y$  分别为  $x$ 、 $y$  方向上的综合扩散系数;  $H$  为水深;  $E$  为由于底沙起悬或悬沙沉降引起的源或汇,可表示为:

$$E = \gamma w_s (S_e - \alpha S) \quad (2)$$

式中:  $w_s$  为泥沙沉降速度;  $\gamma$  和  $\alpha$  为两个表示水流挟沙力的系数,通常根据实测资料确定;  $S_e$  为泥沙饱和浓度。

水体中自由态的大肠杆菌迁移转化可以用以下对流扩散方程表示::

$$\frac{\partial C_d H}{\partial t} + \frac{\partial C_d UH}{\partial x} + \frac{\partial C_d VH}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HD_x \frac{\partial C_d}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HD_y \frac{\partial C_d}{\partial y} \right) = C_o^d + C_t^d - k C_d H \quad (3)$$

式中:  $C_d$  为自由态大肠杆菌浓度;  $C_o^d$  为自由态大肠杆菌输入或输出项;  $C_t^d$  为自由态和吸附态大肠杆菌转化项;  $k$  为衰减或生长系数。

水体中吸附态大肠杆菌迁移转化可以用以下对流扩散方程表示:

$$\frac{\partial HC_p}{\partial t} + \frac{\partial UHC_p}{\partial x} + \frac{\partial VHC_p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HD_x \frac{\partial C_p}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HD_y \frac{\partial C_p}{\partial y} \right) = C_o^p + C_t^p + C_b^p - k C_p H \quad (4)$$

式中:  $C_p$  为吸附态大肠杆菌浓度;  $C_o^p$  为吸附态大肠杆菌输入输出项;  $C_t^p$  为自由态和吸附态微生物转化

项;  $C_b^p$  表示随泥沙颗粒沉入底泥中或随底床泥沙的起悬从底泥进入水体中的大肠杆菌。

由于自由态和吸附态污染物之间的转化过程相当复杂,确定方程(3)和(4)中的  $C_t^d$  和  $C_t^p$  很困难。然而,根据质量守恒可知  $C_t^d = -C_t^p$ 。将方程(3)和(4)叠加,可以消去该转化项,从而避开确定  $C_t^d$  和  $C_t^p$  的困难,得到以水体中污染物总浓度为变量的控制方程:

$$\frac{\partial HC_T}{\partial t} + \frac{\partial UHC_T}{\partial x} + \frac{\partial VHC_T}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left( HD_x \frac{\partial C_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( HD_y \frac{\partial C_T}{\partial y} \right) = C_o^d + C_o^p + C_b^p - k C_T H \quad (5)$$

式中:  $C_T$  为总大肠杆菌浓度,可表示为:

$$C_T = C_d + S \cdot P \quad (6)$$

$C_b^p$  可以用以下方程表示:

$$C_b^p = \max(q_{ero}, 0) P_b + \min(-q_{dep}, 0) P \quad (7)$$

式中:  $q_{ero}$  为泥沙冲刷通量,  $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ ;  $q_{dep}$  为泥沙沉积通量,  $\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ ;  $P$  为悬沙中污染物浓度。

分配系数  $K_D$  用如下形式表达:

$$K_D = \frac{P}{C_d} \quad (8)$$

代入方程(6)可得:

$$C_d = f_d C_T \quad (9)$$

$$\text{其中: } f_d = \frac{1}{1 + K_D S} \quad (10)$$

$$\text{而 } C_p = f_p C_T \quad (11)$$

$$\text{其中: } f_p = \frac{K_D S}{1 + K_D S} \quad (12)$$

## 3 数学模型的解析解

大肠杆菌在水体中的行为与水动力学条件、泥沙颗粒特性以及吸附解吸附过程等因素密切相关。一般情况下,很难求得方程(5)的解析解。若将水动力学条件、泥沙特性和吸附解吸附关系适当简化,则有可能得出特定条件下的解析解。而这样的解析解对于理论研究和数学模型的开发会有巨大的指导意义。本节引入一定的假设,对问题进行了简化,分别在泥沙沉积和底床侵蚀的条件下得出了大肠杆菌在水沙环境中传播的解析解。本解析解可以作为大肠杆菌传播数学模型开发验证的依据。

### 3.1 沉积过程

图1为设计算例示意图。 $P$  为吸附在悬浮泥沙上大肠杆菌的浓度,  $P_b$  为大肠杆菌在底泥中的浓度,  $H$  为水深,  $h_b$  为底泥厚度,  $S_0$  为水体中初始泥

沙浓度,  $C_T^0$  为初始总大肠杆菌浓度,  $C_T$  为总大肠杆菌浓度。

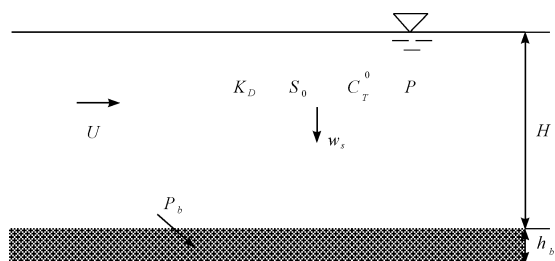


图1 算例示意图

为进一步简化问题,作如下假设:①泥沙粒径均匀,沉降速度  $w_s$  为定值;②水体中初始悬沙浓度  $S_0$  大于泥沙饱和浓度  $S_e$ ;③大肠杆菌的衰减系数  $k$  为常数。

在均匀恒定流条件下,方程(5)可以简化为如下形式:

$$\frac{dC_T}{dt} = \frac{1}{H} C_b^p - kC_T \quad (13)$$

式中:  $C_b^p$  为污染物的沉降量,可表示为:

$$C_b^p = q_{dep} P = \gamma w_s P (S_e - \alpha S) \quad (14)$$

$$P = \frac{K_D C_T}{1 + K_D S} \quad (15)$$

因此方程(13)可以表示为:

$$\frac{dC_T}{dt} = \frac{\gamma w_s}{H} \frac{K_D C_T}{1 + K_D S} (S_e - \alpha S) - kC_T \quad (16)$$

方程(16)中的泥沙浓度可以通过解均匀恒定流条件下的泥沙运动方程获得。均匀恒定流条件下泥沙运动方程可表示为:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\gamma w_s}{H} (S_e - \alpha S) \quad (17)$$

袁德奎等<sup>[6]</sup>推导出该方程的解为如下形式:

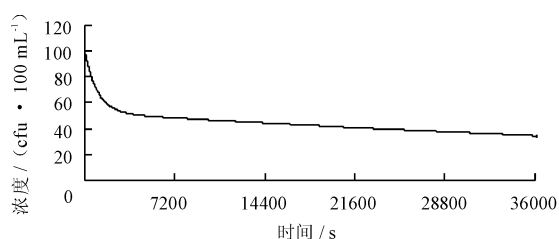
$$S = \frac{1}{\alpha} S_e + \left( S_0 - \frac{1}{\alpha} S_e \right) e^{-\lambda t} \quad (18)$$

$$\text{其中: } \lambda = \frac{\alpha \gamma w_s}{H} \quad (19)$$

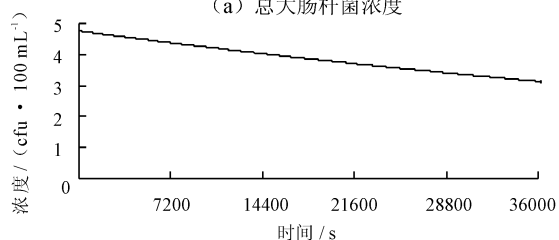
根据图1所示初始条件和泥沙运动方程解析解方程(16)可解,得:

$$C_T = \frac{\alpha + K_D [S_e + (\alpha S_0 - S_e) e^{-\lambda t}]}{\alpha (1 + K_D S_0)} C_T^0 e^{-kt} \quad (20)$$

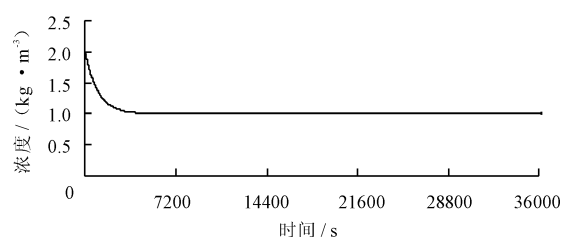
根据以上解析解,图2给出了沉积条件下水体中悬沙浓度  $S$ 、大肠杆菌总浓度  $C_T$ 、自由态浓度  $C_d$  和吸附态浓度  $C_p$  随时间的变化过程。其中的计算条件为:水深  $H = 1$  m,泥沙运动系数  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,沉降速度  $w_s = 0.001$  m/s,饱和泥沙浓度  $S_e$  为  $1 \text{ kg/m}^3$ ;分配系数  $K_D$  为  $10 \text{ L/g}$ ,初始泥沙和大肠杆菌浓度分别为  $2 \text{ kg/m}^3$  和  $100 \text{ cfu/100 mL}$ ,衰减系数为  $1 \text{ d}^{-1}$ ,初始底泥中的大肠杆菌浓度为  $0$ 。



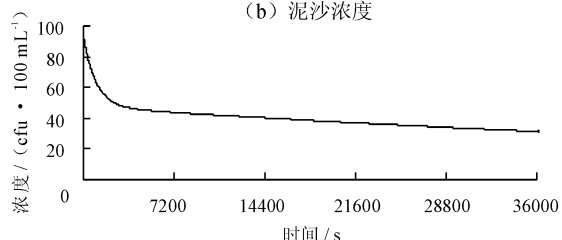
(a) 总大肠杆菌浓度



(c) 自由态大肠杆菌浓度



(b) 泥沙浓度



(d) 吸附态大肠杆菌浓度

图2 沉积条件下水体各种指标随时间的变化过程

### 3.2 侵蚀过程

本算例采用的基本假定和定解条件与单纯沉积过程中的基本一致。和上一算例不同之处在于初始泥沙浓度  $S_0$  设置为高于饱和泥沙浓度  $S_e$ ,底泥中大肠杆菌浓度设定为常数。

在本算例中,  $C_b^p$  为污染物冲刷量:

$$C_b^p = q_{ero} P_b = \gamma w_s P_b (S_e - \alpha S) \quad (21)$$

$$P_b = P_b^0 e^{-k_b t} \quad (22)$$

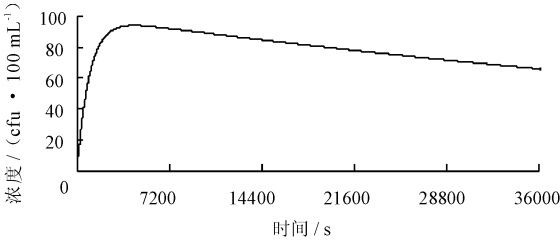
因此方程(13)可以表示为:

$$\frac{dC_T}{dt} = \frac{\gamma w_s}{H} P_b^0 e^{-k_b t} (S_e - \alpha S) - kC_T \quad (23)$$

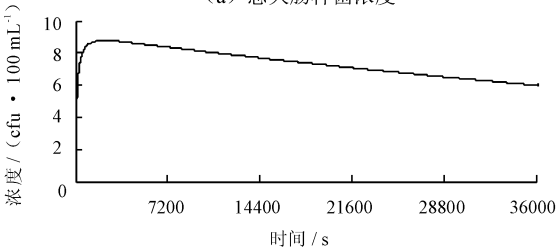
方程(23) 可解, 得:

$$C_T = [C_T^0 + \frac{P_b^0 e^{-k_b t}}{\alpha} (S_e - \alpha S_0) (1 - e^{-\lambda t})] e^{-kt} \quad (24)$$

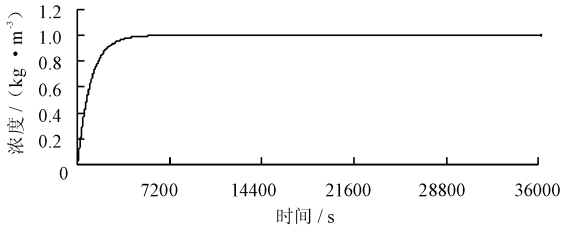
根据以上解析解, 图 3 给出了冲刷条件下水体中悬沙浓度  $S$ 、污染物总浓度  $C_T$ 、自由态大肠杆菌浓度  $C_d$  和吸附态污染物浓度  $C_p$  随时间的变化过程。



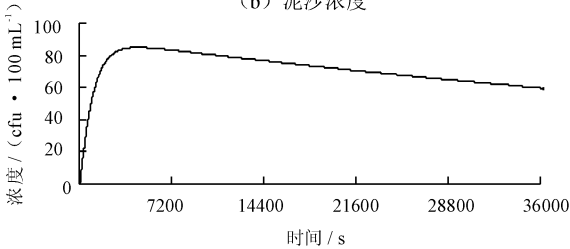
(a) 总大肠杆菌浓度



(c) 自由态大肠杆菌浓度



(b) 泥沙浓度



(d) 吸附态大肠杆菌浓度

图 3 冲刷条件下水体中各种指标随时间的变化过程

4 结 语

本文通过引入一定的假设, 对水沙环境中大肠杆菌迁移转化模型进行简化, 对其解析解进行了初步探索, 得出沉积和侵蚀两种特定条件下污染物传播模型的解析解。所用方法及所得结果可用于进一步的解析解研究, 也可用于数值模拟方法和程序的验证。本文仅开展了尝试性的工作, 求解中所用的假设的条件比较理想化, 需要在进一步的研究中逐步向实际情况靠近。

参考文献:

[1] 禹雪中, 杨志峰, 钟德钰, 等. 河流泥沙与污染物相互作用数学模型[J]. 水利学报, 2006, 37(1): 10 - 15.

[2] Bai Sen, Lung Wuseng. Modeling sediment impact on the transport of fecal bacteria[J]. Water Research, 2005, 39(20): 5232 - 5240.

[3] Kashefipour S M, Lin B, Harris E, et al. Hydro - environ-

其中的计算条件为: 水深  $H = 1\text{ m}$  泥沙运动系数  $\alpha = 1, \gamma = 1$ , 沉降速度  $w_s = 0.001\text{ m/s}$ , 饱和泥沙浓度  $S_e$  为  $1\text{ kg/m}^3$ ; 分配系数  $K_d$  为  $10\text{ L/g}$ , 初始泥沙和大肠杆菌浓度均为 0, 衰减系数为  $1\text{ d}$ , 初始底泥中的污染物浓度  $P_b^0 = 10^3\text{ cfu/g}$ 。

mental modelling for bathing water compliance of an estuarine basin[J]. Water Research, 2002, 36(7): 1854 - 1868.

[4] Lin B, Falconer R A. Numerical modelling of 3 - D tidal currents and water quality indicators in the Bristol Channel. Water and Maritime Engineering[J]. Proceedings of Institution of Civil Engineers - Water and Maritime Engineering, 2001, 148(3): 155 - 166.

[5] Wu Yan, Falconer R A, Lin Binliang. Modelling trace metal concentration distributions in estuarine waters[J]. Estuarine, Coastal and Shelf Science. 2005, 64(4): 699 - 709.

[6] 袁德奎, 郑康, 聂红涛. 水沙环境中重金属迁移转化模型的两个解析解[J]. 海洋技术, 2008, 27(3): 61 - 65.

[7] Chapra S C. Surface water quality modeling[M]. New York: McGraw - Hill, 1997.

[8] DiToro D M. Sediment Flux Modeling[M]. New York: John Wiley & Sons, 2001.