DOI: 10.7667/PSPC151347

基于乘法窗函数的插值 FFT 的谐波分析方法

张俊敏[1]，刘开培[2]，汪 立[3]，陈文娟[2]

(1.中南民族大学计算机科学学院，湖北 武汉 430074；2.武汉大学电气工程学院，湖北 武汉 430072；
3.国网天津市电力公司，天津 300000)

摘要：针对常规加窗插值算法在使用过程中会出现不满足要求的情况，提出了一种新的乘法窗函数构造方法。以三种常规窗函数为例构造出九种乘法窗函数，并验证了基于这些乘法窗函数的三谱线插值 FFT 的谐波高精度分析方法。分析了新的窗函数的性能，将新窗函数应用到三插值 FFT 的谐波分析算法当中。仿真实验表明，构造出的窗函数在 10 个周期左右数据和 5 阶拟合条件下，相比于常规窗函数插值算法有更高的准确度。在实际工程中可根据需要选择所构造的窗函数。

关键词：谐波分析；窗函数；快速傅里叶变换；乘法；频谱泄露

An algorithm for harmonic analysis based on multiplication window function

ZHANG Junmin[1], LIU Kaipei[2], WANG Li[3], CHEN Wenjuan[2]

(1. College of Computer Science, South-Central University for Nationalities, Wuhan 430074, China; 2. College of Electrical Engineering, Wuhan 430072, China; 3. State Grid Tianjin Electric Power Company, Tianjin 300000, China)

Abstract: The conventional interpolation windowed FFT algorithms will have a greater error when the number of the truncation is not enough. For this reason, a new construction method of multiplication window functions is presented to analyze electrical harmonics. Based on three conventional window functions, this paper constructs nine kinds of window functions and verifies an algorithm for harmonic high-precision analysis based on three-spectrum-line interpolation FFT. The performance of new window functions is listed, and the new window function is used for the harmonic analysis algorithm of three interpolation FFT. Simulation experiments show that the algorithms using multiplication windows has higher accuracy than using conventional window functions when the sample number length is about 10 periods and the polynomial is 5 order. In the practical engineering, the constructed window functions can be chosen as required.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 50677048).

Key words: harmonic analysis; window function; FFT; multiplication; spectrum leakage

0 引言

针对电力系统谐波问题一方面恶化电能质量[1]，另一方面对电网的安全稳定和经济运行也造成较大影响[1]。因此，对系统中谐波参数的高精度测量将有利于电能质量的评估，同时对于减少谐波危害，维护电网安全稳定、高效运行也是十分必要的[2]。

加窗傅里叶变换插值分析谐波是目前比较成熟的算法[3-4]。常用窗函数如汉宁(Hanning)窗[5]、布莱克曼(Blackman)窗[6]、布莱克曼汉斯(Blackman-Harris)窗函数[7]、纳托尔(Nuttall)窗函数[8]、莱夫文森特(Rife-Vincent)窗函数[9]以及各种组合窗[10-15]。在插值算法中，D. Agrez 和庞浩等人各自提出了双谱线的修正算法[4,16]，Wu Jing、牛胜锁和黄冬梅等人提出了三谱线[17-21]修正算法。这些改进降低了频谱泄漏和栅栏效应的影响，提高了谐波分析的准确性。然而在工程实际使用中，常用窗函数插值算法仍然不能满足高精度的谐波分析要求。

本文提出了一种乘法窗的构成方法，将三种常规窗函数进行乘法运算构成不同种类的乘法窗函数，利用基于这些乘法窗三谱线插值 FFT 的谐波分析方法进行电力系统谐波分析。仿真结果表明，该构造出的窗函数相对于常规窗函数插值算法，有更高的准确度，实现了谐波的高精度测量。

基金项目：国家自然科学基金项目(50677048)

1 互乘法窗的构造

乘法窗函数的通用公式是由多个窗函数乘积产生的，乘法窗的通用公式为

$$w(n)=\underbrace{w_{1\ (n)}^{p1}\times w_{2\ (n)}^{p2}\times\cdots\times w_{m\ (n)}^{p_m}}_{p} \tag{1}$$

其中，$w_{i(n)}\ (i=1,\cdots,m)$ 为第 i 个基本窗函数，共 m 个，p_i 为 $w_{i(n)}$ 窗函数个数，称为窗 $w_{i(n)}$ 的子阶数，当 $p_i=1$ 时为某窗函数的原函数。$p=\sum_{i=1}^{m}p_i$ 为乘法窗函数的总阶次。当 $w_i(n)$ 表达式相同时为自乘法窗，$w_i(n)$ 表达式不同时为互乘法窗。

如表 1 所示，以 Hanning 窗，Blackman 窗，Blackharris 窗为例，给出乘法窗函数的构造模式及其特性参数。为方便书写做以下简写：Hanning→Hn，Blackman→Bm，Blackharris→Bh。同时考虑到计算量问题，乘法窗函数的阶次不宜过高，在此限定 $p_{\max}=3$，那么每种窗函数的子阶次可能的取值为：0、1、2、3。

(300)、(030)、(003)这三种组合窗函数属于自乘法窗函数，其他 6 种属于互乘法窗函数。

表 1 基于常规函数的乘法窗函数

Table 1 Multiplication window function based on conventional window

Hn (p_1)	Bm (p_2)	Bh (p_3)	主瓣宽度 (×π)	副瓣衰减 (dB)
3	0	0	0.005 4	−61
2	1	0	0.005 8	−84.5
2	0	1	0.006 3	−110.2
1	2	0	0.006 1	−100.6
1	0	2	0.007 1	−138.1
1	1	1	0.006 6	−121.5
0	3	0	0.006 6	−120.4
0	2	1	0.007 1	−139
0	0	3	0.007 8	−176.1

2 三插值算法

对信号进行加窗后，可以得到：

$$x_w(n)=x(n)w(n) \tag{2}$$

离散傅里叶变换后得到：

$$X(k)=\frac{A}{2\mathrm{j}}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}W(k-\frac{f_0}{\Delta f})-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}W(k+\frac{f_0}{\Delta f})] \tag{3}$$

其中，$\Delta f=\dfrac{f_s}{N}$ 为离散频率间隔。若忽略负频率点处旁瓣的影响，式(3)变为

$$X(k)=\frac{A}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}W(k-\frac{f_0}{\Delta f}) \tag{4}$$

加窗 FFT 频谱峰值附近区域频率点较大的谱线分别为 $k_1<k_2<k<k_3$，这三根谱线对应的幅值分别为 y_1，y_2，y_3。由于信号的非同步采样，信号峰值频率点 $f_0=k_0\cdot\Delta f$ 很难刚好位于离散谱线的频点上，即 k_0 一般不为整数。记 $\alpha=k-k_2$，则 $-0.5<\alpha<0.5$。

另记：

$$\beta=\frac{y_3-y_2}{y_1} \tag{5}$$

根据式(4)和式(5)可以得到：

$$\beta=\frac{|W(-\alpha+1)|-|W(-\alpha)|}{|W(-\alpha-1)|} \tag{6}$$

当 N 值较大时，式(6)可以化简为 $\beta=g(\alpha)$，其反函数为 $\alpha=g^{-1}(\beta)$。由于所采用的余弦窗系数均为实系数，其频率响应是偶对称的，因而 $g(\bullet)$ 和 $g^{-1}(\bullet)$ 均为奇函数。可采用多项式逼近方法计算奇函数 $\beta=g^{-1}(\alpha)$，表达式为

$$\alpha\approx p_{11}\times\beta+p_{13}\times\beta^3+\cdots+p_{1p}\beta^p \tag{7}$$

式(7)中，$p_{11},p_{13},\cdots,p_{1p}$ 为多项式逼近的奇次项系数。

求得 α 后，求得信号频率：

$$f_0=k\cdot\Delta f=(k_2+\alpha)\Delta f \tag{8}$$

信号幅值，根据式(4)可知：

$$A_i=2y_i\,|W(k-\frac{f_0}{\Delta f})| \tag{9}$$

考虑到 y_2 是离真实谱线点最近谱线，给予较大权重。可以得到：

$$A=\frac{2(y_3+2y_2+y_1)}{|W(-\alpha+1)|+2|W(-\alpha)|+|W(-\alpha-1)|} \tag{10}$$

类似式(7)的逼近方法，当 N 比较大，窗函数系数为实系数，式(10)可表示为：$A=N^{-1}(y_3+2y_2+y_1)u(\alpha)$，$u(\bullet)$ 为偶函数，逼近多项式不含奇次项。三谱线修正逼近多项式如下：

$$A=N^{-1}(y_3+2y_2+y_1)(p_{20}+p_{22}\alpha^2+\cdots+p_{2d}\alpha^d) \tag{11}$$

式(11)中，$p_{20},p_{22},\cdots,p_{2d}$ 为多项式逼近的偶次项系数。

根据式(4)还可以得出信号的相位：

$$\varphi=\arg[X(k_2)]+\frac{\pi}{2}-\arg[W(\alpha)] \tag{12}$$

根据式(6)、式(7)、式(9)、式(11)、式(12)即可进行各次谐波参数的分析。考虑到其中大量窗函数的离散傅里叶分析，其表达式为

$$W(k) = \sin(\pi k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi k} \cdot \left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m \frac{b_m}{2}\frac{\sin(km)}{\sin(\frac{\pi}{N}(k-m))\sin(\frac{\pi}{N}(k+m))}\right] \quad (13)$$

由于 $N >> 1$ ，可以得到：

$$\begin{cases} |W(k)| = \dfrac{N\sin(\pi k)}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{M-1}[(-1)^m \frac{b_m}{k^2 - m^2}] \\ \arg(W(k)) = -\pi k \end{cases} \quad (14)$$

确定基波频率 f_0 后，在范围 $(kf_0 - 5, kf_0 + 5)$ 内重复式(11)、式(12)、式(14)，一直到所有谐波参数计算完毕。

3　算法仿真

为了验证所提算法的精度，进行 10 次谐波仿真分析。信号模型为

$$x(n) = \sum_{i=1}^{21} A_i \sin(2\pi i n\frac{f_1}{f_\mathrm{s}} + \varphi_i) \quad (15)$$

其中：基波频率 f_1 为 50.5 Hz；采样频率 f_s 为 5 120 Hz；数据的截断长度 N 为 1 024 点。仿真所采用的信号参数如表 2 所示。

对如表 2 所示的信号进行加窗 FFT 三插值谐波分析，窗函数如表 1 所示。以下研究不同乘法窗函数对检测精度的影响，修正算法中的拟合多项式次数均取 5 次，拟合次数低，拟合系数的个数比较少。

算法流程图在文献中均有详细说明，此处不予赘述。

仿真结果分别由表 3~表 5 给出。其中 D_{Ai} 表示基波和各次谐波幅值测量值的相对误差；D_{f0} 表示基波频率测量值的相对误差；$D_{\varphi i}$ 表示基波和各次谐波初始相位测量值的相对误差。均用百分比表示。

由表 3~表 5 的仿真结果可以看出，本文构造的乘法窗函数插值 FFT 计算方法，计算结果普遍好于采用普通窗函数插值算法。所用修正公式阶次为 5 次，阶次较低，节约了计算量。

表 2　谐波信号参数

Table 2 Parameters of the harmonic signals

谐波次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A_i / V	220	4	14	3.5	7	2	3.7	2	2.3	0.8	0.5
φ_i /(°)	0	10	55	120.4	53	35	80	46	43.1	−19	20

表 3　乘法窗频率测量相对误差

Table 3 Relative errors of multiplication window in calculating phase

比较项	300	210	201	120	102	111	030	021	003
D_{f0}	2.57×10^{-9}	-2.78×10^{-9}	1.31×10^{-8}	-1.82×10^{-8}	3.19×10^{-8}	2.65×10^{-8}	2.59×10^{-8}	-6.84×10^{-8}	-4.24×10^{-8}

表 4　乘法窗幅值测量相对误差

Table 4 Relative errors of multiplication window in calculating amplitude

比较项	D_{A1}	D_{A2}	D_{A3}	D_{A4}	D_{A5}	D_{A6}	D_{A7}	D_{A8}	D_{A9}	D_{A10}	D_{A11}
300	-7.84×10^{-7}	-1.05×10^{-6}	-1.73×10^{-6}	-5.66×10^{-7}	-5.88×10^{-6}	-1.25×10^{-5}	-1.95×10^{-6}	2.26×10^{-7}	9.88×10^{-7}	1.79×10^{-6}	9.50×10^{-7}
210	6.54×10^{-7}	2.70×10^{-8}	-3.15×10^{-7}	6.81×10^{-8}	-3.93×10^{-6}	1.06×10^{-5}	-1.94×10^{-6}	2.18×10^{-9}	5.87×10^{-7}	9.72×10^{-7}	6.53×10^{-7}
201	5.58×10^{-7}	3.58×10^{-7}	-1.33×10^{-6}	-5.91×10^{-8}	-3.93×10^{-6}	-1.09×10^{-5}	-1.94×10^{-6}	2.18×10^{-9}	5.87×10^{-7}	9.72×10^{-7}	6.53×10^{-7}
120	5.58×10^{-7}	-6.91×10^{-7}	8.36×10^{-6}	8.71×10^{-7}	-3.98×10^{-6}	1.18×10^{-5}	1.40×10^{-6}	-3.24×10^{-7}	5.06×10^{-7}	8.57×10^{-7}	4.37×10^{-7}
102	4.41×10^{-7}	2.79×10^{-6}	-9.49×10^{-7}	-1.58×10^{-6}	-3.58×10^{-6}	-1.19×10^{-5}	-1.48×10^{-6}	6.71×10^{-7}	6.09×10^{-7}	8.62×10^{-7}	6.01×10^{-7}
111	4.97×10^{-7}	1.83×10^{-6}	-1.10×10^{-6}	-1.57×10^{-6}	-3.59×10^{-6}	-1.24×10^{-5}	-1.53×10^{-6}	6.98×10^{-7}	6.98×10^{-7}	1.04×10^{-6}	6.70×10^{-7}
030	5.04×10^{-7}	1.75×10^{-6}	-1.12×10^{-6}	-1.60×10^{-6}	-4.01×10^{-6}	-1.25×10^{-5}	-1.53×10^{-6}	7.15×10^{-7}	7.13×10^{-7}	1.06×10^{-6}	6.80×10^{-7}
021	4.14×10^{-7}	-3.94×10^{-6}	-1.44×10^{-6}	4.51×10^{-6}	-5.07×10^{-6}	2.54×10^{-5}	2.25×10^{-6}	-1.80×10^{-6}	-7.83×10^{-8}	2.36×10^{-8}	9.28×10^{-8}
003	3.47×10^{-7}	-5.71×10^{-6}	4.79×10^{-7}	1.57×10^{-6}	-2.56×10^{-6}	1.11×10^{-5}	1.21×10^{-6}	-4.37×10^{-7}	2.84×10^{-7}	5.27×10^{-7}	2.55×10^{-7}

表 5 乘法窗相位测量相对误差

Table 5 Relative errors of multiplication window in calculating phase

比较项	$D_{\varphi1}$	$D_{\varphi2}$	$D_{\varphi3}$	$D_{\varphi4}$	$D_{\varphi5}$	$D_{\varphi6}$	$D_{\varphi7}$	$D_{\varphi8}$	$D_{\varphi9}$	$D_{\varphi10}$	$D_{\varphi11}$
300	-1.22×10^{-6}	-2.37×10^{-4}	-4.78×10^{-7}	-6.66×10^{-5}	1.16×10^{-4}	-7.40×10^{-5}	1.09×10^{-5}	1.11×10^{-4}	9.70×10^{-5}	4.16×10^{-4}	1.52×10^{-3}
210	1.13×10^{-7}	-7.73×10^{-5}	-1.55×10^{-6}	1.11×10^{-6}	2.02×10^{-6}	-2.78×10^{-6}	1.34×10^{-6}	4.97×10^{-6}	2.03×10^{-6}	-9.37×10^{-7}	-1.10×10^{-5}
201	1.05×10^{-6}	-4.54×10^{-5}	-5.01×10^{-8}	-7.78×10^{-5}	-1.26×10^{-4}	-8.31×10^{-6}	7.24×10^{-6}	1.15×10^{-4}	1.08×10^{-4}	-4.93×10^{-4}	1.81×10^{-3}
120	5.58×10^{-7}	-6.91×10^{-7}	8.36×10^{-6}	8.71×10^{-7}	-3.98×10^{-6}	1.18×10^{-5}	1.40×10^{-6}	-3.24×10^{-7}	5.06×10^{-7}	8.57×10^{-7}	4.37×10^{-7}
102	6.38×10^{-7}	-4.41×10^{-4}	-1.20×10^{-5}	-7.64×10^{-5}	-1.48×10^{-4}	-1.2×10^{-4}	1.29×10^{-5}	1.46×10^{-4}	1.25×10^{-4}	-5.35×10^{-4}	1.98×10^{-3}
111	7.29×10^{-7}	-4.35×10^{-4}	-9.07×10^{-6}	-7.61×10^{-5}	-4.50×10^{-5}	-1.01×10^{-4}	1.29×10^{-5}	1.46×10^{-4}	1.25×10^{-4}	-5.35×10^{-4}	1.87×10^{-3}
030	7.38×10^{-7}	-4.35×10^{-4}	-9.07×10^{-6}	-7.61×10^{-5}	-1.48×10^{-4}	-101×10^{-4}	1.31×10^{-5}	1.45×10^{-4}	1.25×10^{-4}	-5.32×10^{-4}	1.85×10^{-3}
021	-1.08×10^{-6}	1.25×10^{-3}	2.73×10^{-5}	1.56×10^{-4}	-4.50×10^{-5}	2.19×10^{-4}	-3.14×10^{-5}	-3.25×10^{-4}	-2.72×10^{-4}	1.15×10^{-3}	-3.90×10^{-3}
003	-4.46×10^{-7}	3.57×10^{-4}	1.69×10^{-5}	8.18×10^{-5}	-1.21×10^{-5}	1.28×10^{-4}	-1.03×10^{-5}	-1.64×10^{-4}	-1.45×10^{-4}	6.41×10^{-4}	-2.19×10^{-3}

4 结论

利用 FFT 进行谐波分析时，通过加窗和插值算法可以减少由于非同步采样或非整周期截断所引起的误差。本文从常规窗函数入手，推导出了一种构造的乘法窗函数插值 FFT 分析方法。仿真实验结果表明本文所提出的基于乘法窗函数的算法的总体精度比基于常规窗函数谐波检测的计算精度更高，具有较高的实用价值。在实际使用中可根据仿真结果来选择合适的乘法窗函数。

参考文献

[1] 姚致清, 赵倩, 刘喜梅. 基于准同步原理的逆变器并网技术研究[J]. 电力系统保护与控制, 2011, 39(24): 123-131.
YAO Zhiqing, ZHAO Qian, LIU Ximei. Research on grid-connected technology of inverter based on quasi synchronous principle[J]. Power System Protection and Control, 2011, 39(24): 123-131.

[2] 刘亚栋, 杨洪耕, 陈丽, 等. 非稳态谐波和间谐波检测的新方法[J]. 电网技术, 2012, 36(1): 170-175.
LIU Yadong, YANG Honggeng, CHEN Li, et al. A new method to detect non-stationary harmonics and inter-harmonics[J]. Power System Technology, 2012, 36(1): 170-175.

[3] 曾博, 滕召胜. 纳托尔自卷积窗加权电力谐波分析方法[J]. 电网技术, 2011, 35(8): 134-139.
ZENG Bo, TENG Zhaosheng. A Nuttall self-convolution window-based approach to weighted analysis on power system harmonic[J]. Power System Technology, 2011, 35(8): 134-139.

[4] 庞浩, 李东霞, 俎云霄, 等. 应用FFT 进行电力系统谐波分析的改进算法[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(6): 49-54.
PANG Hao, LI Dongxia, ZU Yunxiao, et al. An improved algorithm for harmonic analysis of power system using FFT technique[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(6): 49-54.

[5] GRANDKE T. Interpolation algorithms for discrete Fourier transform of weighed signals[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1983, 32(2): 350-355.

[6] 周俊, 王小海, 祈才君. 基于Blackman窗函数的插值FFT在电网谐波信号分析中的应用[J]. 浙江大学学报(理学版), 2006, 33(6): 650-653.
ZHOU Jun, WANG Xiaohai, QI Caijun. Estimation of electrical harmonic parameters by using the interpolated FFT algorithm based on Blackman window[J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2006, 33(6): 650-653.

[7] 许珉, 张鸿博. 基于Blackman-harris窗的加窗FFT插值修正算法[J]. 郑州大学学报(工学版), 2005, 26(4): 99-101.
XU Min, ZHANG Hongbo. The correction algorithm based on the Blackman-harris windows and interpolated FFT[J]. Journal of Zhengzhou University (Engineering Science), 2005, 26(4): 99-101.

[8] 卿柏元, 滕召胜, 高云鹏, 等. 基于Nuttall窗双谱线插值FFT的电力谐波分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(25): 153-158.
QING Baiyuan, TENG Zhaosheng, GAO Yunpeng, et al. An approach for electrical harmonic analysis based on Nuttall window double-spectrum-line interpolation FFT[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(25): 153-158.

[9] 曾博, 滕召胜, 温和, 等. 莱夫-文森特窗插值FFT谐波分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2009, 29(10): 115-120.
ZENG Bo, TENG Zhaosheng, WEN He, et al. Harmonic

analysis based on Rife-Vincent window interpolated FFT[J]. Proceeding of the CSEE, 2009, 29(10): 115-120.

[10] WEN He, TENG Zhaosheng, GUO Siyu. Triangular self-convolution window with desirable side lobe behaviors for harmonic analysis of power system[J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement, 2010, 59(3): 543-551.

[11] ZENG Bo. Parameter estimation of power system signals based on cosine self-convolution window with desirable side-lobe behaviors[J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2011, 26(1): 250-257.

[12] WEN He, TENG Zhaosheng, GUO Siyu, et al. Hanning self-convolution window and its application to harmonic analysis[J]. Sci China Ser E, 2009, 52(2): 467-476.

[13] 许珉, 刘玮. 加8 项余弦窗插值FFT算法[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(11): 27-32.
XU Min, LIU Wei. An interpolation FFT algorithm based on 8-term cosine window[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(11): 27-32.

[14] 王玲, 徐柏榆, 盛超, 等. 一种新的余弦组合窗插值FFT谐波分析算法[J]. 武汉大学学报: 工学版, 2014, 47(2): 250-254.
WANG Ling, XU Baiyu, SHENG Chao, et al. An approach for harmonic analysis based on a new type of cosine combination window interpolation FFT[J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2014, 47(2): 250-254.

[15] 王刘旺, 黄建才, 孙建新, 等. 基于加汉宁窗的FFT高精度谐波检测改进算法[J]. 电力系统保护与控制, 2012, 40(24): 28-33.
WANG Liuwang, HUANG Jiancai, SUN Jianxin, et al. An improved precise algorithm for harmonic analysis based on Hanning-windowed FFT[J]. Power System Protection and Control, 2012, 40(24): 28-33.

[16] AGREZ D. Weighted multipoint interpolated DFT to improve amplitude estimation of multi-frequency signal[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2002, 51(2): 287-292.

[17] WU J, ZHAO W. A simple interpolation algorithm for measuring multi-frequency signal based on DFT[J]. Measurement, 2009, 42(2): 332-327.

[18] 牛胜锁, 梁志瑞, 张建华, 等. 基于三谱线插值FFT的电力谐波分析算法[J]. 中国电机工程学报, 2012, 32(16): 130-136.
NIU Shengsuo, LIANG Zhirui, ZHANG Jianhua, et al. An algorithm for electrical harmonic analysis based on triple-spectrum-line interpolation FFT[J]. Proceedings of the CSEE, 2012, 32(16): 130-136.

[19] 牛胜锁, 梁志瑞, 张建华, 等. 基于四项余弦窗三谱线插值 FFT 的谐波检测方法[J]. 仪器仪表学报, 2012, 33(9): 2002-2008.
NIU Shengsuo, LIANG Zhirui, ZHANG Jianhua, et al. Harmonic detection approach based on 4-term cosine window triple-spectrum-line interpolation FFT[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2012, 33(9): 2002-2008.

[20] 黄冬梅, 龚仁喜, 焦凤昌, 等. 莱夫-文森特窗三谱线插值的电力谐波分析[J]. 电力系统保护与控制, 2014, 42(2): 28-34.
HUANG Dongmei, GONG Renxi, JIAO Fengchang, et al. Power harmonic analysis based on Rife-Vincent window and triple-spectral-line interpolation[J]. Power System Protection and Control, 2014, 42(2): 28-34.

[21] 蔡晓峰, 张鸿博, 鲁改凤. 应用三谱线插值 FFT 分析电力谐波的改进算法[J]. 电力系统保护与控制, 2015, 43(2): 33-39.
CAI Xiaofeng, ZHANG Hongbo, LU Gaifeng. Improvement algorithm for harmonic analysis of power system using triple-spectrum-line interpolation algorithm based on window FFT[J]. Power System Protection and Control, 2015, 43(2): 33-39.

收稿日期：2015-08-11；　修回日期：2015-09-30

作者简介：

张俊敏(1977-)，女，博士，副教授，主要从事电力系统谐波分析；E-mail: 173902815@qq.com

刘开培(1962-)，男，博士，教授，博士生导师，主要从事电能质量相关分析处理；E-mail: kpliu@whu.edu.cn

汪　立(1990-)，男，硕士，研究方向为窗函数插值算法。E-mail: 417197078@qq.com

（编辑　姜新丽）