一种能滤去衰减直流分量的改进全波傅氏算法

苏文辉，李 钢
(国电南瑞科技股份有限公司，江苏省南京市 210003)

摘要：全波傅氏算法是基于采样信号不含衰减直流分量推导出来的，对衰减直流分量的滤除不明显。提出一种改进的算法，通过增加两个采样点，计算并消去由直流衰减分量通过全波傅氏算法计算得到的值，使新算法对直流分量的滤波效果得到大大改善。理论上可以消除任意衰减时间常数的直流分量对所求各次谐波分量的影响。仿真试验表明，该算法消除直流衰减分量的能力强，计算量小，具有实际应用前景。

关键词：微机保护；直流衰减分量；全波傅氏算法

中图分类号：TM77

0 引言

电力系统发生故障时，为了维持系统稳定和保护非故障元件，故障元件应被快速切除。继电保护在这里起着检测并切除故障的功能。在微机保护中，这种检测功能主要通过相关的算法来实现。大多数微机保护算法的计算实际上就是对采样信号的参数估计过程，其性能取决于它们能否从若干采样值中获得基波或某次谐波分量的精确估计值。目前的微机继电保护算法中，离散傅里叶变换应用最为广泛。半波傅氏变换由于其只需要半个周期的数据窗、可以很好地滤去奇次谐波等优点而得到大量应用。然而对于含有各次奇次、偶次谐波的场合，半波傅氏变换的精度就很难保证了。全波傅氏算法具有很强的滤波能力，可以滤去所有整次谐波分量，而且稳定性好，可以很好地应用于上述场合。但是，傅氏变换是以周期信号推导出来的，如果采样信号中存在衰减直流分量，即使是用全波傅氏算法来计算，其精度仍然会受到影响[1,2]。

本文从衰减直流分量对全波傅氏算法的影响着手，在全波傅氏变换的基础上提出一种新的计算方法，理论上可完全滤去衰减直流分量的影响。从而使全波傅氏算法能在各种环境下得到理想的精度。

1 全波傅氏算法

假定被采样的信号具有如下形式：

$$x(t) = X_0 \mathrm{e}^{-t/\tau} + \sum_{n=1}^{M} X_{\mathrm{m}}(n)\cos(n\omega t + \varphi_n) \tag{1}$$

式中：X_0 为直流分量；τ 为衰减时间常数；$X_{\mathrm{m}}(n)$，φ_n 分别为 n 次谐波的幅值和初相角。

根据傅氏级数原理，可以得到各次谐波分量的实部和虚部的时域表达式为：

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega t \mathrm{d}t \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega t \mathrm{d}t \tag{3}$$

式中：T 为基频分量的周期；ω 为基频分量的角频率。

将式(2)、式(3)离散化处理后可得：

$$a_n = \frac{2}{T}\sum_{k=0}^{N} x(k)\cos\left(nk\frac{2\pi}{N}\right) \tag{4}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\sum_{k=0}^{N} x(k)\sin\left(nk\frac{2\pi}{N}\right) \tag{5}$$

式中：N 为周期采样点数。

离散情况下有：

$$n\omega t = n2\pi f\frac{1}{fN}k = nk\frac{2\pi}{N}$$

这样，就可以得到 n 次谐波的幅值和初相角为：

$$X_{\mathrm{m}}(n) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{6}$$

$$\varphi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n} \tag{7}$$

若式(1)中不含直流衰减分量，则由式(4)、式(5)可以得到理想的实部和虚部：

$$a_n = X_{\mathrm{m}}(n)\cos\varphi_n \tag{8}$$

$$b_n = X_{\mathrm{m}}(n)\sin\varphi_n \tag{9}$$

2 误差分析

由于傅氏算法的分析基础是以周期信号为基准的，所以对于式(1)含有直流衰减分量的信号而言，必然会使傅氏算法的计算结果产生误差：

收稿日期：2002-07-08。

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^T X_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos n\omega t\mathrm{d}t+\frac{2}{T}\int_0^T\sum_{i=1}^{M}[X_\mathrm{m}(i)\cos(i\omega t+\varphi_i)]\cos n\omega t\mathrm{d}t=\delta_\mathrm{a}+X_\mathrm{m}(n)\cos\varphi_n \tag{10}$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^T X_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin n\omega t\mathrm{d}t+\frac{2}{T}\int_0^T\sum_{i=1}^{M}[X_\mathrm{m}(i)\cos(i\omega t+\varphi_i)]\sin n\omega t\mathrm{d}t=\delta_\mathrm{b}+X_\mathrm{m}(n)\sin\varphi_n \tag{11}$$

$$\delta_\mathrm{a}=\frac{2}{T}\int_0^T X_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos n\omega t\mathrm{d}t \tag{12}$$

$$\delta_\mathrm{b}=\frac{2}{T}\int_0^T X_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin n\omega t\mathrm{d}t \tag{13}$$

可见，当采样信号存在直流衰减分量时，全波傅氏算法所得到的实部、虚部分别有 δ_a 和 δ_b 的误差。为了保证全波傅氏算法在这种情况下仍然具有很好的计算精度，必须消除 δ_a 和 δ_b 的影响。

3 全波傅氏算法的改进

对式(1)的信号采样 $N+2$ 个值。

首先，取 $t\in[0,T]$，即先取一个周期的采样值(此时采样序列从 1 到 N)，对其进行全波傅氏变换，可得：

$$\begin{cases}a_n=A+\delta_\mathrm{a}\\ b_n=B+\delta_\mathrm{b}\end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases}A=X_\mathrm{m}(n)\cos\varphi_n\\ B=X_\mathrm{m}(n)\sin\varphi_n\end{cases} \tag{15}$$

A,B 实际上就是人们希望通过全波傅氏算法得到的理想实部和虚部。

然后，取 $t\in[\Delta T,T+\Delta T]$，即将第 1 个采样值去掉，在最后补上一个采样值(此时采样序列从 2 到 $N+1$)，再进行全波傅氏变换，可得：

$$\begin{cases}a_n'=\frac{2}{T}\int_{\Delta T}^{T+\Delta T}x(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^T x(t+\Delta T)\cos(n\omega t+n\omega\Delta T)\mathrm{d}t\\ b_n'=\frac{2}{T}\int_{\Delta T}^{T+\Delta T}x(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^T x(t+\Delta T)\sin(n\omega t+n\omega\Delta T)\mathrm{d}t\end{cases} \tag{16}$$

文献[1]在进行类似的推导时，认为此时的全波傅氏变换应变为(仅以半波 a_n' 为例)[1]：

$$a_n'=I_\mathrm{m}(n)\cos(\varphi_n+n\omega\Delta T)+\frac{4}{T}\int_0^{T/2}I_0\mathrm{e}^{-\alpha(t+\Delta T)}\cos n\omega t\mathrm{d}t$$

实际上，对于假设的周期分量 $i(t)$ 而言，经全波傅氏变换后应有：

$$\begin{cases}\frac{2}{T}\int_0^T i(t+\Delta T)\cos(n\omega t+n\omega\Delta T)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^T i(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t\\ \frac{2}{T}\int_0^T i(t+\Delta T)\sin(n\omega t+n\omega\Delta T)\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^T i(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t\end{cases}$$

对于假设的衰减直流分量 $I_0\mathrm{e}^{-t/\tau}$ 而言，经全波傅氏变换后应有：$\frac{2}{T}\int_0^T I_0\mathrm{e}^{-(t+\Delta T)/\tau}\cos(n\omega t+n\omega\Delta T)\mathrm{d}t$，所以对于式(16)而言，可以进一步得到：

$$\begin{cases}a_n'=A+\frac{2}{T}\int_0^T X_0\mathrm{e}^{-(t+\Delta T)/\tau}\cos(n\omega t+n\omega\Delta T)\mathrm{d}t=A+(k_\mathrm{a}\delta_\mathrm{a}-k_\mathrm{b}\delta_\mathrm{b})\mathrm{e}^{-\Delta T/\tau}\\ b_n'=B+\frac{2}{T}\int_0^T X_0\mathrm{e}^{-(t+\Delta T)/\tau}\sin(n\omega t+n\omega\Delta T)\mathrm{d}t=B+(k_\mathrm{b}\delta_\mathrm{a}+k_\mathrm{a}\delta_\mathrm{b})\mathrm{e}^{-\Delta T/\tau}\end{cases} \tag{17}$$

式中：$k_\mathrm{a}=\cos(n\omega\Delta T)$；$k_\mathrm{b}=\sin(n\omega\Delta T)$。

最后，再取 $t\in[2\Delta T,T+2\Delta T]$，即将第 1、第 2 个采样值去掉，在最后顺序补上 2 个采样值(此时采样序列从 3 到 $N+2$)，再进行全波傅氏变换，同理可得：

$$\begin{cases}a_n''=A+\frac{2}{T}\int_0^T X_0\mathrm{e}^{-(t+2\Delta T)/\tau}\cos(n\omega t+2n\omega\Delta T)\mathrm{d}t=A+(k_\mathrm{a}'\delta_\mathrm{a}-k_\mathrm{b}'\delta_\mathrm{b})\mathrm{e}^{-2\Delta T/\tau}\\ b_n''=A+\frac{2}{T}\int_0^T X_0\mathrm{e}^{-(t+2\Delta T)/\tau}\sin(n\omega t+2n\omega\Delta T)\mathrm{d}t=B+(k_\mathrm{b}'\delta_\mathrm{a}+k_\mathrm{a}'\delta_\mathrm{b})\mathrm{e}^{-2\Delta T/\tau}\end{cases} \tag{18}$$

式中：$k_\mathrm{a}'=\cos(2n\omega\Delta T)$；$k_\mathrm{b}'=\sin(2n\omega\Delta T)$。

由式(14)、式(17)、式(18) 消去中间变量 A,B,$\mathrm{e}^{-\Delta T/\tau}$ 和 $\mathrm{e}^{-2\Delta T/\tau}$，可得：

$$\delta_\mathrm{a}=\frac{-[(k_\mathrm{b}X_X-k_\mathrm{a}Y_Y)+A_A(k_\mathrm{a}X_X+k_\mathrm{b}Y_Y)]}{k_\mathrm{b}+A_A^2k_\mathrm{b}} \tag{19}$$

$$\delta_\mathrm{b}=A_A\delta_\mathrm{a} \tag{20}$$

式中：$X_X=a_n'-a_n$；$Y_Y=b_n'-b_n$；$X_X'=a_n''-a_n$；$Y_Y'=b_n''-b_n$；$A_A=-[k_\mathrm{b}k_\mathrm{b}'X_X'-k_\mathrm{a}'k_\mathrm{b}Y_Y'-(k_\mathrm{b}k_\mathrm{b}'X_X-k_\mathrm{a}k_\mathrm{b}'Y_Y')]/[k_\mathrm{a}k_\mathrm{b}'X_X+k_\mathrm{b}k_\mathrm{b}'Y_Y-(k_\mathrm{a}'k_\mathrm{b}X_X'+k_\mathrm{b}k_\mathrm{b}'Y_Y')]$。

对于某一次谐波分量，k_a，k_b，k_a'，k_b' 均为常量。将式(19)、式(20)代入式(14)，即可得到 A 和 B：

$$\begin{cases} A = a_n - \delta_a \\ B = b_n - \delta_b \end{cases}$$

上述分析可以发现，新的算法需要进行3次全波傅氏算法的计算，不过这3次计算并不是独立的，第2、第3次都只需要减去前一次计算的最前部分，然后在最后加上新增加的采样点数的相关计算即可，运算量不大。最后求取 δ_a 和 δ_b 两个量需要一定的计算量，但其计算时间仍可满足实时计算的要求。

4 仿真计算

设有如下的采样信号：

$$x(t) = 16e^{-t/\tau} + 20\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + 4\cos(2\omega_1 t + \varphi_2) + 2\cos(3\omega_1 t + \varphi_3) + 2\cos(5\omega_1 t + \varphi_4)$$

取 $\tau = 30$ ms，$\omega_1 = 100\pi$，$\varphi_1 = 30°$，$\varphi_2 = 60°$，$\varphi_3 = 36°$，$\varphi_4 = 90°$。对改进的全波傅氏算法进行仿真计算，并与改进前的全波傅氏算法进行比较，计算结果见表1。

表1 仿真计算结果

Table 1 Results of simulation calculation

算法	基波				2次谐波			
	幅值		相角		幅值		相角	
	计算值	误差/(%)	计算值	误差/(%)	计算值	误差/(%)	计算值	误差/(%)
全波傅氏算法	19.245 733	3.771 335	23.101 999	22.999 337	3.125 500	21.862 500	45.584 408	24.025 987
改进全波傅氏算法	19.999 935	0.000 325	30.000 076	0.000 025	3.999 999	0.000 025	60.000 031	0.000 005

算法	3次谐波				5次谐波			
	幅值		相角		幅值		相角	
	计算值	误差/(%)	计算值	误差/(%)	计算值	误差/(%)	计算值	误差/(%)
全波傅氏算法	1.804 640	9.768 000	11.394 608	68.348 311	1.520 360	23.982 000	85.005 165	5.549 817
改进全波傅氏算法	2.000 000	0	36.000 008	0.000 002	2.000 000	0	90.000 000	0

可见，改进后的全波傅氏算法具有良好的过滤直流衰减分量的能力，与一般的全波傅氏算法相比，显然具有更为广泛的应用空间。

5 结语

本文分析了衰减直流分量对全波傅氏算法产生的影响，进而提出了改进的全波傅氏算法，在保留了原来算法功能的基础上，还实现了对衰减直流分量的滤除功能，具有更为广泛的应用空间。改进的全波傅氏算法所需的数据量仅仅是原全波傅氏算法所需数据量再增加两个采样点，计算简单，计算量不大，而且能保证很高的计算精度。

参考文献

1 丁书文，张承学，龚庆武，等(Ding Shuwen，Zhang Chengxue，Gong Qingwu，et al)．半波傅氏算法的改进——一种新的微机保护交流采样快速算法(An Improved Half-wave Fourier Algorithm——A New Fast Algorithm for Microprocessor-based Protection AC Sampling)．电力系统自动化(Automation of Electric Power Systems)，1999，23(5)：18～20

2 李永丽，陈超英，贺家李(Li Yongli，Chen Chaoying，He Jiali)．一种基于半波傅氏算法的继电保护快速算法(A Fast Algorithm Based on Half-cycle Fourier Algorithm for Protective Relaying)．电网技术(Power System Technology)，1996，20(1)：52～55

苏文辉(1976—)，男，硕士，主要从事电力变压器在线监测及继电保护等方面的科研和开发工作。E-mail：swh_nj@netease.com

李 钢(1966—)，男，硕士，高级工程师，主要从事电力系统自动化的科研和开发工作。

AN IMPROVED FULL-WAVE FOURIER ALGORITHM FOR FILTRATING DECAYING DC COMPONENT

Su Wenhui, Li Gang

(NARI Technology Development Limited Company, Nanjing 210003, China)

Abstract: The full-wave Fourier algorithm is derived with the sampling signal without decaying DC component, and can't filtrate this component. By adding two sampling points, the new algorithm can filtrate it evidently. In theory, the influence of the exponential DC component on any harmonic component with random decay time constant can be completely eliminated with the algorithm. The simulation results prove that the algorithm can filtrate exponential DC component and just need little amount of calculation. It has good prospect of practical application.

Key words: microprocessor-based protection; decaying DC component; full-wave Fourier algorithm