基于内点法的安全约束经济调度

张小平 陈朝晖
(电力部电力自动化研究院电网控制研究所 210003 南京)

摘 要 在分析仿射变换内点法的基础上，导出了改进的仿射变换内点法，这种方法特别适合电力系统最优潮流问题的求解；在此基础上建立了基于内点法的电力系统最优潮流问题——安全约束的经济调度的数学模型，并给出了其算法与实现；最后，对新算法以实例进行了验证。算例表明，所提的优化方法具有较快的计算速度。

关键词 最优潮流 经济调度 内点法

0 引言

电力系统最优潮流的历史发展过程可追溯到60年代初期，Carpentier J 首次在经济调度中考虑不等式约束，将经济调度问题扩展为最优潮流问题，并由非线性规划理论来求解。随后，Dommel H W 和 Tinney W F 提出了最优潮流的简化梯度法[1]。这一方法是最优潮流发展史上的里程碑。Sasson A M 等对基于二阶梯度的牛顿法最优潮流进行了研究。Stott B 等从70年代末开始将线性规划法应用于电力系统最优潮流问题[2]，该法于80年代末进入了实用阶段。在80年代中期，由 ESCA 公司等提出的牛顿法最优潮流软件包[3]充分利用了电力系统问题的稀疏特性，使计算速度大大提高，并使最优潮流应用于大规模的电力系统问题成为可能。同时，由 GE 公司等提出的基于二次规划的最优潮流软件包[4,5]也可应用于大规模的电力系统问题。但是，随着电力系统的发展，上述算法在计算速度方面还需不断改进。

1984年，数学家 Karmarkar[6]首次提出了一种新的线性规划算法，称作内点法。该方法的提出很快引起数学界和运筹学界的广泛兴趣。许多学者对这一方法进行了更为广泛深入的研究，提出了多种新的内点法及其变种。近年来，内点法在许多领域得到了广泛的应用。文献[7,8]将仿射变换内点法应用于解算最优潮流问题——安全约束的经济调度(security-constrained economic dispatch，简称 SCED)。本文则在文献[7,8]的基础上，导出了一种新的改进仿射变换内点法，并应用于 SCED 问题。

1 仿射变换内点算法及其改进算法

内点法可分为射影变换法、仿射变换法和路径跟踪法等三大类。三大类算法中，仿射变换法应用最为广泛。关于内点法的详细评述见文献[6]。

1.1 仿射变换内点算法[7~9]

对于线性规划问题

$$\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{1-a}$$

$$\text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b} \tag{1-b}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 满秩矩阵，且 $m\geqslant n$；$\boldsymbol{b}$ 是 m 维向量；$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维列向量。

若给定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}^0$ 以及收敛判据，则求解式(1)给出的优化问题的仿射变换内点法[9](以下简称算法Ⅰ)为：

(1) $k=0$；

(2) 若不满足收敛条件，进行以下各步；否则转步骤(11)；

(3) $\boldsymbol{V}^k=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^k$；

(4) $\boldsymbol{D}_v=\mathrm{diag}(\boldsymbol{V}_1^k,\cdots,\boldsymbol{V}_m^k)$；

(5) $\boldsymbol{h}_x=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_v^{-2}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{c}$；

(6) $\boldsymbol{h}_v=-\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{h}_x$；

(7) 若 $\boldsymbol{h}_v\geqslant 0$，问题无界，则转步骤(11)；否则进行下步；

(8) 确定计算步长：

$$\alpha=\gamma\cdot\min\left\{-\frac{V_i^k}{(h_v)_i}\,\middle|\,(h_v)_i<0,i=1,\cdots,m\right\};$$

γ 为安全因子，且 $0<\gamma<1$，一般取 0.95；

(9) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\alpha\,\boldsymbol{h}_x$；

(10) 置 $k=k+1$ 并转步骤(2)；

(11) 结束。

1.2 改进的仿射变换内点算法

在许多实际问题中，优化问题往往具有如下的形式：

1996－12－27收稿。
电力部电力青年科技促进费资助项目(94Q018)。

$$\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{2-a}$$
$$\text{s.t.}\ \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \tag{2-b}$$
$$\boldsymbol{l} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{u} \tag{2-c}$$

其中　$\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 满秩矩阵，且 $m \geqslant n$；$\boldsymbol{b}$ 是 m 维向量；$\boldsymbol{c},\boldsymbol{x},\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 是 n 维列向量。

若直接采用算法Ⅰ，则式(2)需进一步变形为：

$$\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{3-a}$$
$$\text{s.t.}\ (\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{I},\ -\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{x} \leqslant (\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{u},\ -\boldsymbol{l})^{\mathrm{T}} \tag{3-b}$$

显然，式(3)的约束矩阵为$(m+2n)\times n$ 维矩阵，于是形成$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{D}_v^{-2}\ \boldsymbol{A})^{-1}$的运算量将大大增加，从而影响算法Ⅰ的计算速度。针对这种情况，以下给出求解如式(2)所示问题的非常有效的改进仿射变换法。理论推导过程类似于文献[9]中算法Ⅰ的推导过程。

改进仿射变换算法(算法Ⅱ)：

(1) $k=0$；

(2) 若不满足收敛条件，进行以下各步；否则转步骤(1)；

(3) $\boldsymbol{V}^k=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{U}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}$；

(4) $\boldsymbol{D}_v=\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{V}_1^k,\cdots,\boldsymbol{V}_m^k)$，$\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}\,(\boldsymbol{U}_1^k,\cdots,\boldsymbol{U}_n^k)$，$\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{L}_1^k,\cdots,\boldsymbol{L}_n^k)$；

(5) $\boldsymbol{h}_x=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{D}_v^{-2}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{U}^{-2}+\boldsymbol{L}^{-2})^{-1}\boldsymbol{c}$；

(6) $\boldsymbol{h}_v=-\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{h}_x$；

(7) $$\alpha=\gamma\cdot\min\{-\frac{V_i^k}{(h_v)_i}\Bigg|(h_v)_i<0,\quad i=1,\cdots,m;\quad \frac{U_j^k}{(h_x)_j}\Bigg|(h_x)_j<0,\quad j=1,\cdots,n;\quad -\frac{L_j^k}{(h_x)_j}\Bigg|(h_x)_j<0,\quad j=1,\cdots,n\};$$

(8) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\alpha\ \boldsymbol{h}_x,\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}-\alpha\ \boldsymbol{h}_x,\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}+\alpha\ \boldsymbol{h}_x$；

(9) 置 $k=k+1$ 并转步骤(2)；

(10) 结束。

1.3　算法Ⅰ和算法Ⅱ的比较

(1) 两者有着相同的理论基础和类似的计算过程；

(2) 前者更适用于如式(1)所示的、变量无上下界的一般优化问题；

(3) 而后者更适用于如式(2)所示的、变量带上下界的优化问题。对此类问题的求解算法Ⅱ要优于算法Ⅰ，因算法Ⅱ充分利用了问题的特点，大大地降低了问题的维数(见步骤(5))。

(4) 特别地，算法Ⅱ对电力系统优化潮流问题非常有效。

2　基于内点法的SCED问题的模型、算法与实现

2.1　SCED问题的基本求解原理

安全约束的经济调度SCED一般由以下两步递推的迭代过程构成：(1)进行潮流计算，并形成系统关于运行点的增量模型；(2)由上述增量模型构造可由内点法求解的标准型，并进行优化计算。以上两步不断迭代直到满足收敛判据。

2.2　SCED问题的目标函数和约束条件

安全约束的经济调度的目标函数为：

$$\min\{C_{\mathrm{t}}=\sum_{i\in G}C_i(P_i)\} \tag{4-a}$$

等式约束：

$$P_k=\sum_{j\in k}V_k V_j[G_{kj}\cos(\delta_k-\delta_j)+B_{kj}\sin(\delta_k-\delta_j)],\quad k\in N \tag{4-b}$$

不等式约束：

$$P_{\mathrm{min}i}\leqslant P_i\leqslant P_{\mathrm{max}i},\quad i\in G \tag{4-c}$$
$$S_l\leqslant S_{\mathrm{max}l},\ l\in T \tag{4-d}$$

式中　C_{t} 为总的发电费用；C_i 为发电机 i 的发电费用；P_k 为节点 k 的有功注入；V_k 为节点 k 的电压幅值；δ_k 为节点 k 的电压相角；P_i 为节点 i 的发电机有功出力，而 $P_{\mathrm{min}i}$，$P_{\mathrm{max}i}$ 为其下限、上限；S_l 为支路潮流的视在功率；$S_{\mathrm{max}l}$ 为支路潮流的视在功率上限值；G_{kj} 和 B_{kj} 则为导纳矩阵的元素。

通常，发电费用可由如下的二次多项式表示：

$$C_i(P_i)=a_i+b_i\,P_i+c_i\,P_i^2 \tag{5}$$

2.3　SCED问题的线性化增量模型

SCED问题的线性化增量模型为

$$\max\{-\Delta C_{\mathrm{t}}^r=-\sum_{j\in G}(b_i+2c_i\,P_i^r)\Delta P_i\} \tag{6-a}$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{N}(1-\gamma_i^r)\Delta P_i=0,\quad i\in G \tag{6-b}$$
$$\Delta P_{\mathrm{min}i}\leqslant\Delta P_i\leqslant\Delta P_{\mathrm{max}i},\quad i\in G \tag{6-c}$$
$$\sum_{i\in G}\beta_{i,l}\Delta P_i\leqslant\Delta S_{\mathrm{max}l},\quad l\in T \tag{6-d}$$

式中　r 为迭代次数；$\beta_{i,l}$ 为发电分布因子，取决于网络拓扑的常数；$\gamma_i=\dfrac{\partial P_L}{\partial P_i}$；$P_L$ 为有功网损；$\Delta P_{\mathrm{min}i}$，$\Delta P_{\mathrm{max}i}$ 为 ΔP_i 的步距。

2.4　SCED的求解流程

(1) 启动；

(2) 输入原始数据并进行基态潮流计算；

(3) 计算发电分布因子 $\beta_{i,l}$[10]；

(4) 置迭代次数 $r=0$；

(5) 进行有功潮流计算，其中收敛判据为：

$$\max(\Delta P_k)\leqslant\varepsilon_1,$$

ε_1 为有功潮流给定收敛精度；

(6) 计算发电增量输电损耗因子 $\gamma_i=\dfrac{\partial P_L}{\partial P_i}$；

(7) 形成如式(6)所示的线性化的安全约束经

济调度增量模型；

(8) 利用内点法(算法Ⅰ或算法Ⅱ)求解式(6)；

(9) 判定迭代是否收敛，其中收敛判据为

$$\frac{|C_t(P_G^r)-C_t(P_G^{r-1})|}{|C_t(P_G^r)|}\leqslant \varepsilon_2,$$

ε_2 为优化收敛精度。

若收敛，则停止迭代并转步骤(10)，否则置 $r=r+1$ 并转步骤(5)；

(10) 输出优化结果；

(11) 结束。

2.5 算法与实现

2.5.1 稀疏矩阵技术

在实现算法时，充分利用了矩阵的稀疏性，进行稀疏存储、稀疏运算如稀疏三角分解等，以提高解算效率。采用稀疏技术后，可有效提高潮流、发电分布因子 $\beta_{i,l}$、发电增量输电损耗因子 γ_i 以及 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_v^{-2}\boldsymbol{A})^{-1}$ 或 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_v^{-2}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{U}^{-2}+\boldsymbol{L}^{-2})^{-1}$ 的求解速度，从而提高总的优化求解速度。

2.5.2 约束松弛

通常，支路潮流不等式约束的数目可能非常大，若全部引入式(6)所示的优化问题，则约束矩阵的维数将会变得十分庞大，从而影响最优潮流的解算速度。

在实际应用时，可采用约束松弛技术，即只把起作用的约束引入到式(6)中，而起作用的约束数目一般比较小，从而大大降低问题(6)的规模，以利于解算速度的提高。

2.5.3 步长的动态调整

如前所述，步距 $\Delta P_{\mathrm{min}i}$，$\Delta P_{\mathrm{max}i}$ 对算法的收敛起着重要的作用。步距太大，则迭代可能振荡甚至发散；步距太小，则迭代收敛可能会非常缓慢。为克服上述困难，我们在实现最优潮流算法时采用了步长的动态调整策略：

(1) 取初始步长 $step=\min(\Delta P_{\mathrm{min}i},\Delta P_{\mathrm{max}i}\,|\,i\in G)$；

(2) 若目标函数随迭代而减少，则保持步长 $step$ 不变；

(3) 若目标函数随迭代而增大，则步长 $step$ 减半。

2.5.4 收敛精度

收敛精度对优化问题的解算速度也有重要影响。若给定的收敛精度太高，则会增加优化问题的求解时间。因而，实际应用时一般在精度和解算速度之间寻求折中。实践表明，取 $\varepsilon_1=0.01$ P.U.，$\varepsilon_2=0.001$ P.U. 较为适当。

3 算例与分析

为验证本文提出的基于算法Ⅱ的 SCED 方法的正确性和有效性，分别以 IEEE 14，30，57节点标准算例进行了计算，并与文献[7，8]中采用内点算法Ⅰ的 SCED 方法进行了比较。

IEEE 14，30，57节点标准算例计算表明，本文所用方法的计算时间为文献[7，8]中方法的40%～60%，且前者一般具有与后者相同的迭代次数。其中表1给出了两种算法对 IEEE 30节点系统的计算结果。由此可见，本文提出的方法具有良好的计算性能。

表1 IEEE 30节点系统的计算结果
Table 1 The computational results of the IEEE 30 bus system

方 法	迭代次数	最优目标函数值
文献[7，8]中的方法(算法Ⅰ)	4	803.4213
本文中的方法(算法Ⅱ)	4	803.4213

4 结论

本文对基于内点法的最优潮流问题——SCED 进行了研究，主要有以下结论：

(1) 在分析仿射变换内点法(算法Ⅰ)的基础上，导出了改进的仿射变换内点法(算法Ⅱ)，这种方法特别适合电力系统最优潮流问题的求解；

(2) 在此基础上，建立了基于内点法的 SCED 问题的数学模型；

(3) 探讨了基于内点法的 SCED 的算法与实现，包括稀疏技术的应用，约束松弛技术的采用以及步长的动态调整策略等；

(4) 最后，对基于改进的仿射变换内点法的 SCED 以实例进行了验证。算例表明，本文提出的优化潮流方法具有较快的计算速度，优于文献[7，8]中的方法。

5 参考文献

1 Dommel H W, Tinney W F. Optimal Power Flow Solutions. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems，1977，87：1866～1876

2 Stott B, Alsac O, Monticel A. Security Analysis and Optimization. Proceedings of IEEE，1987

3 Sun D I, Ashley B, Brewer B *et al*. Optimal Power Flow by Newton Approach. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems，1984，103：2864～2880

4 Burchett R C, Happ H H, Vierath D R. Quadratically Convergent Optimal Power Flow. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems，1984，103：3267～3276

(下转第54页)

（上接第29页）
5 Glavitch H, Spoerry M. Quadratic Loss Formula for Reactive Dispatch. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems, 1977, 87: 1866～1876
6 Gonzaga C C. Path-Following Methods for Linear Programming. SIAM Review, 1992, 34(2): 167～224
7 Vargas L S, Quintana V H, Vannelli A. A Tutorial Description of an Interior Point Method and Its Application to Security-Constrained Economic Dispatch. IEEE Trans on Power Systems, 1993, 8(3): 1315～1322
8 Lu C N, Unum M R. Network Constrained Security Control Using an Interior Point Algorithm. IEEE Trans on Power Systems, 1993, 8(3): 1068～1076
9 Adler I, Resende M C C, Veiga G *et al*. An Implementation of Karmarkar's Algorithm for Linear Programming. Mathematical Programming, 1989, 44: 297～335
10 Ng W Y. Generalized Generation Distribution Factors for Power System Security Evaluation. IEEE Trans on Power Apparatus and Systems, 1981, 100(3): 1001～1005

张小平，男，1967年生，博士，从事EMS应用软件的研究和开发以及人工智能技术在电力系统中的应用。

陈朝晖，男，硕士，从事SCADA/EMS系统的研究、开发和工程化工作。

SECURITY-CONSTRAINED ECONOMIC DISPATCH THROUGH INTERIOR POINT METHODS

Zhang Xiaoping, Chen Zhaohui
(Nanjing Automation Research Institute, 210003, Nanjing, China)

Abstract In this paper, a dual affine variant of Karmarkar's interior point method is described at first, then a modified version of the dual affine interior point method is derived. Based on the derived method, a new solution algorithm for the OPF problem——security-constrained economic dispatch is proposed. Numerical results in IEEE standard test systems have shown that the algorithm proposed is very effective.

Keywords optimal power flow economic dispatch interior point method