电力系统静态失稳和周期振荡的局部分叉分析*

刘　劲　吴小辰　孙扬声　陈德树
（华中理工大学电力系·430074·武汉）

【摘　要】 探讨了电力系统稳定的局部分叉方法，将电力系统静态失稳和周期振荡的研究统一用局部分叉理论进行分析，文章给出了由于无功负荷的变化，引起系统周期振荡和电压崩溃的算例。它们分别对应着 Hopf 分叉和鞍结分叉。本文的研究表明局部分叉理论能够从系统结构上更全面地抓住电力系统的稳定特征。

【关键词】 电力系统　局部分叉　静态稳定　周期振荡

1　引言

电力系统稳定问题一直是生产和科研部门所关心的重要课题，人们从不同的角度探求失稳的机理，并希望对失稳进行有效地控制。传统的分析电力系统稳定的方法是系统平衡点局部线性化的特征值方法，特征值方法能够有效反映线性化系统稳定的局部特性，但与实际系统的非线性因素有一些差别。分叉理论用特征值并结合高阶多项式从数学空间结构上来分析系统稳定性，比单一特征值方法分析问题更能把握问题的本质，有时分叉理论能解决用特征值方法解决不了的问题。因此，分叉理论在电力系统稳定问题的研究中越来越受到重视[1~3,6]。针对不同的失稳原因需用不同的分叉方法来分析，静态电压崩溃可以用鞍结分叉来分析[1]，功角的周期振荡可以用 Hopf 分叉来分析[2]，而功角爬行失步与静态电压崩溃又可以有机地统一在静态分叉理论当中[3]。功角爬行失步与静态电压崩溃均被视为静态稳定问题。本文用局部分叉理论统一研究电力系统中的静态失稳和周期振荡，从而能够从数学角度更全面地分析电力系统的稳定性。

2　电力系统稳定分析模型

电力系统模型一般由发电机、输电网络和负荷三部分组成(图1)。发电机一般用二阶转子功角动态微分方程表示，若计及励磁调节系统则需用七阶模型[2]。负荷模型比较复杂，仅考虑图1中简单综合模型情况可构造关于母线电压幅值和相角的动态方程[1]。网络方程可由有功和无功平衡得到。将模型写成通用的表达形式：

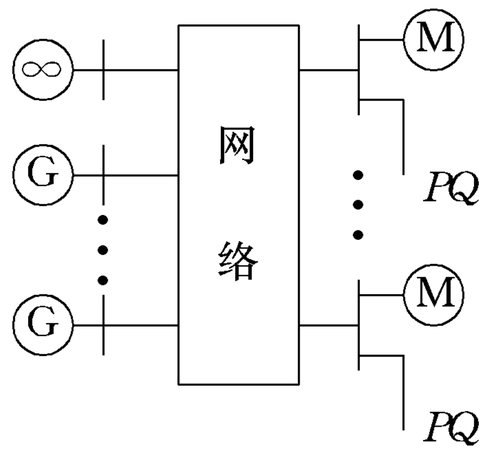


图1　电力系统模型
Fig. 1　Power system model

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mu) \tag{1}$$

$$0 = \mathbf{G}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mu) \tag{2}$$

这里 μ 是影响系统失稳的参数，可以是有功负荷、无功负荷以及其它调节参数(若计及)。本文后面的算例将选择定常 $P-Q$ 负荷中的无功负荷 Q_1。

---

* 1995－03－29收稿，1995－10－09改回。

刘　劲，男，1968年生，博士研究生，从事电力系统非线性、自动化与控制及信号分析等方面研究。
吴小辰，男，1972年生，在读硕士研究生，主要从事电力系统自动化及控制的研究。
孙扬声，男，1933年生，教授，主要从事电力系统计算机应用技术、自动化、控制及远动方面的研究。

3 电力系统局部分叉分析

为了分析问题的方便，认为(1)、(2)式的平衡点在 $(\mathbf{x},\mathbf{y},\mu)=(0,0,0)$，若不然可设 $\mathbf{x}=\mathbf{x}-\mathbf{x}_c$，$\mathbf{y}=\mathbf{y}-\mathbf{y}_c$，$\mu=\mu-\mu_c$，代入(1)、(2)式将平衡点移至原点。将(1)、(2)式写成扩张系统为：

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},\mu) & (3)\\ 0=\mathbf{G}_1(\mathbf{x},\mathbf{y},\mu) & (4)\\ \dot{\mu}=0 & (5)\end{cases}$$

一般地，

$$\mathbf{y}=\mathbf{H}_1(\mathbf{x},\mu) \tag{6}$$

代入(3)式，

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\mu) \tag{7}$$

(7)式有 $\mathbf{F}_2(0,0)=0$，那么 $\mathbf{F}_2$ 的雅可比矩阵为：

$$\mathbf{A}_c=\left.\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}_2}{\mathrm{d}\mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=0\\ \mu=0}} \tag{8}$$

因而(7)式可写成

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}_c\mathbf{x}+\mathbf{F}_3(\mathbf{x},\mu) \tag{9}$$

对于(7)式系统发生余维数为1的局部分叉，经相似变换 $\mathbf{A}_c$ 有如下两种形式：

(1) $\mathbf{A}_c$ 有单重零特征值：$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{B}\end{pmatrix}$

(2) $\mathbf{A}_c$ 有一对纯虚特征值 $\pm \mathrm{i}\omega$：$\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix} & 0\\ 0 & \mathbf{B}\end{pmatrix}$

那么(5)、(9)式可写成

$$\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{C}\,\mathbf{u}+\mathbf{f}(\mathbf{u},\upsilon,\mu) \tag{10}$$

$$\dot{\upsilon}=\mathbf{B}\,\upsilon+\mathbf{g}(\mathbf{u},\upsilon,\mu) \tag{11}$$

$$\dot{\mu}=0 \tag{12}$$

对应第一种情况，$\mathbf{C}=0$，是 1×1 矩阵，$\mathbf{u}=(u_1)$。对应第二种情况，$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & -\omega\\ \omega & 0\end{pmatrix}$，是 2×2 维矩阵，$\mathbf{u}=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$。在 $(\mathbf{u},\upsilon,\mu)=(0,0,0)$ 的邻域内，存在中心流形[5]。

$$\upsilon=\mathbf{h}(\mathbf{u},\mu) \tag{13}$$

$\mathbf{h}(\mathbf{u},\mu)$ 满足下面条件：$\mathbf{h}(0,0)=0$，$\left.\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{u}=0\\ \mu=0}}=0$ 和 $\left.\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mu}\right|_{\substack{\mathbf{u}=0\\ \mu=0}}=0$ (14)

将(13)式代入(11)式，

$$\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial\mathbf{u}}[\mathbf{C}\,\mathbf{u}+\mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{h}(\mathbf{u},\mu),\mu)]=\mathbf{B}\,\mathbf{h}(\mathbf{u},\mu)+\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{h}(\mathbf{u},\mu),\mu) \tag{15}$$

求解(15)式偏微分方程，可得 $\mathbf{h}(\mathbf{u},\mu)$，代入(10)式：

$$\dot{\mathbf{u}}=\mathbf{C}\,\mathbf{u}+\mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{h}(\mathbf{u},\mu),\mu) \tag{16}$$

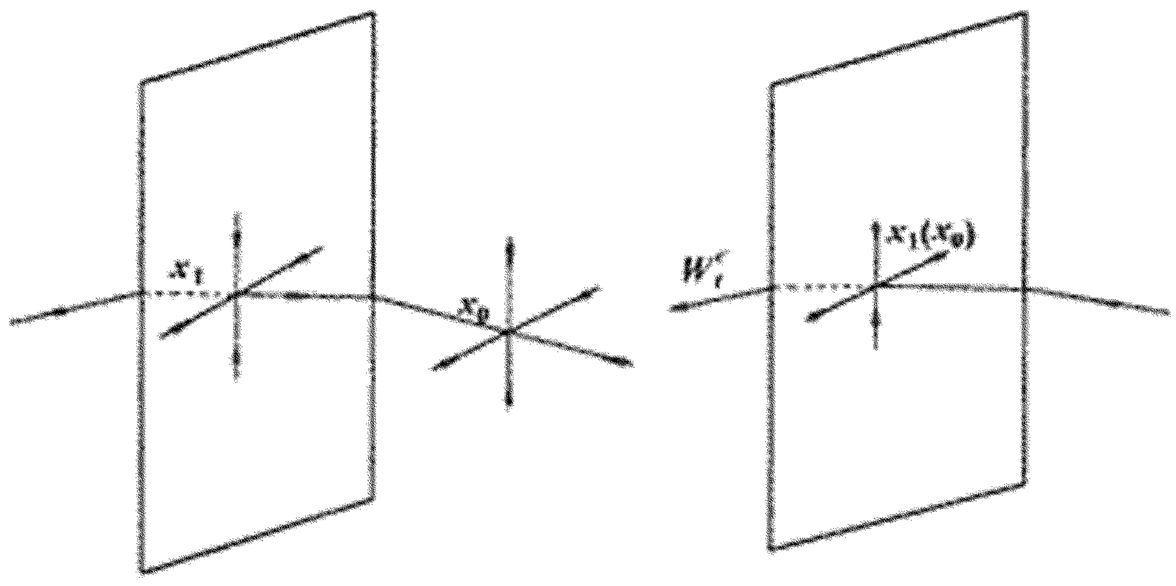
那么整个系统的失稳特征全部归为对(16)式这个含参数的一维或二维的常微分方程的分析。在求解(15)式时，可以将 $\mathbf{f}$、$\mathbf{g}$ 展开为局部 Taylor 级数形式，从而(16)式可以表示成只含低阶多项式的表达形式，非退化的余维数为1的局部分叉方程一般有下面两种形式：

① $$\dot{u}=\varepsilon_1+0\cdot u+au^2+\text{高阶项} \tag{17}$$

② $$\dot{u}_1=\varepsilon_2u_1-\omega u_2+U(u_1,u_2)+\text{高阶项} \tag{18a}$$

$$\dot{u}_2=\omega u_1+\varepsilon_2u_2+V(u_1,u_2)+\text{高阶项} \tag{18b}$$

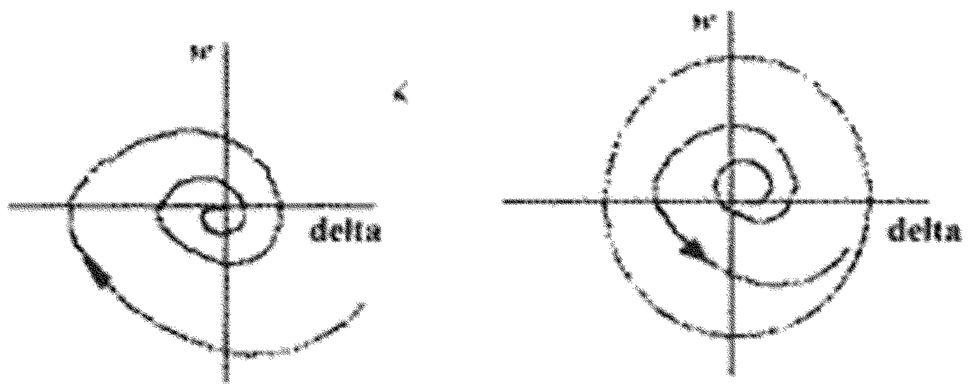
式中 U、V 是含 u_1、u_2 最高项是三次的多项式。(17)式是一个典型的鞍结分叉形式，而(18)式又是 Hopf 分叉形式，在电力系统中，若 $a<0$，参数 ε_1 的变化由正经零变负，这样电力系统运行的平衡点由两个(一个稳定，一个不稳定)变成了没有平衡点，系统将失去静态稳定，参数 ε_1 在缓慢稳定趋于分叉点时，两个平衡点逐渐接近，达到分叉点时，两个平衡点重合，中心流形 W_t^c 是不稳定的(图2)，任何小的扰动都将使系统缓慢地失去稳定。如果鞍结分叉与系统有功变化或电压相角相关联，那么系统将发生功角爬行失步，而如果鞍结分叉与系统无功变化或电压幅值相关联，系统则将发生电压崩溃。(18)式中的 ε_2 由负变正(或由正变负)时，系统在平衡点附近将分叉出极限环，如果极限环是稳定的，系统将产生周期性振荡(图3)，极限环的稳定性由函数 U、V 决定[5]。



(a) 鞍结分叉前　　(b) 鞍结分叉点

图2　鞍结分叉示意图

Fig. 2　Saddle-node bifurcation



(a) Hopf 分叉前　　(b) Hopf 分叉

图3　Hopf 分叉示意图

Fig. 3　Hopf bifurcation

4　算例

考虑图4所示简单电力系统，它由三条母线构成，一为无穷大母线，作为参考母线，另一为发电机母线，第三条为负荷母线。发电机母线用二阶转子方程表示为：

$$\dot{\delta}_G = \omega \tag{19a}$$

$$M\dot{\omega} = P_m - D\,\omega + V_1 Y_1 V_2 \sin(\delta_M - \delta_G - \theta_1) + V_1^2 Y_1 \sin\theta_1 \tag{19b}$$

其中　δ_G、ω、M、P_m、D 分别为发电机的摇摆角、角频率、惯性系数、机械输入功率和阻尼系数；V_1 为发电机母线电压；V_2、δ_M 分别为负荷母线电压幅值和相角；Y_1、θ_1 为线路导纳幅值和相关相角。

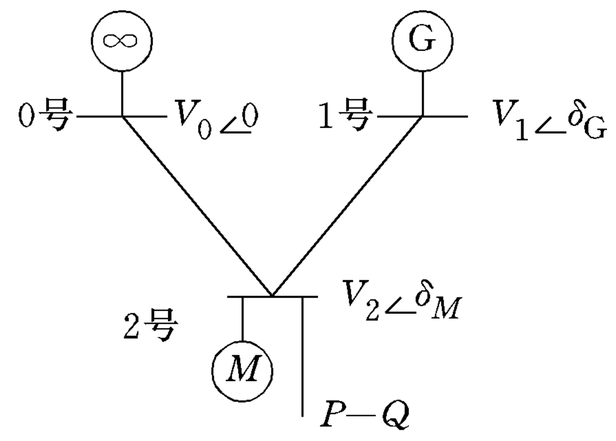


图4　三母线电力系统

Fig. 4　Three-bus power system example

负荷母线考虑电动机动态效应，用下列模型表示[1]：

$$P_2 = P_0 + P_1 + K_{pw}\dot{\delta}_M + K_{pv}(V_2 + T\dot{V}_2) \tag{20a}$$

$$Q_2 = Q_0 + Q_1 + K_{qw}\dot{\delta}_M + K_{qv}V_2 + K_{qv2}V_2^2 \tag{20b}$$

其中　P_0、Q_0 为电动机负荷定常有功和无功；P_1、Q_1 为定常 $P-Q$ 负荷的有功和无功，P_2、Q_2 为负荷母线总的有功和无功，其它为固定参数。

将(19)、(20)式写成状态方程形式：

$$\dot{\delta}_G = \omega \tag{21a}$$

$$M\dot{\omega} = -D\,\omega + P_m + V_1 Y_1 V_2 \sin(\delta_M - \delta_G - \theta_1) + V_1^2 Y_1 \sin\theta_1 \tag{21b}$$

$$K_{qw}\dot{\delta}_M = -K_{qv2}V_2^2 - K_{qv}V_2 + Q_2 - Q_0 - Q_1 \tag{21c}$$

$$T\cdot K_{qw}K_{pv}\dot{V}_2 = K_{pw}K_{qv2}\cdot V_2^2 + (K_{pw}\cdot K_{qv} - K_{qw}\cdot K_{pv})\cdot V_2 + K_{qw}(P_2 - P_0 - P_1) - K_{pw}(Q_2 - Q_0 - Q_1) \tag{21d}$$

通过网络功率平衡有：

$$P_2 = -V_0 Y_0 V_2 \sin(\delta_M + \theta_0) - V_1 Y_1 V_2 \sin(\delta_M - \delta_G + \theta_1) + (Y_0 \sin\theta_0 + Y_0 \sin\theta_1)V_2^2 \quad (22a)$$

$$Q_2 = V_0 Y_0 V_2 \cos(\delta_M + \theta_0) + V_1 Y_1 V_2 \cos(\delta_M - \delta_G + \theta_1) - (Y_0 \cos\theta_0 + Y_1 \cos\theta_1)V_2^2 \quad (22b)$$

(21)、(22)式即是(1)、(2)式的形式，将(22)式代入(21)式即可进行局部分叉分析，取电机、负荷及网络参数如下：

$K_{pw} = 0.4$，$K_{pv} = 0.3$，$K_{qw} = -0.03$，$K_{qv} = -2.8$，$K_{qv2} = 2.1$，

$T = 8.5$，$P_0 = 0.6$，$Q_0 = 1.3$，$P_1 = 0.0$ $Y_0 = 8.0$，$\theta_0 = -12.0°$，$V_0 = 2.5$

$Y_1 = 5.0$，$\theta_1 = -5.0°$，$V_1 = 1.0$ $P_m = 1.0$，$D = 0.05°$，$M = 0.3$

将(21)式中的Q_1作为变化参数，用数值方法求取不同Q_1的平衡点及对应的雅可比矩阵的特征值。在表1中列出几个Q_1值的平衡点及雅可比矩阵特征值。

表1 平衡点及特征值随Q_1变化情况

Table 1 Movement of the critical points and eigenvalues as a function of Q_1

Q_1	10.945	11.406	11.410
δ_G	0.310	0.342	0.347
ω	0.000	0.000	0.000
δ_M	0.120	0.139	0.138
V_2	1.099	0.993	0.925
特征值	−0.005±j12.850 −17.219 −1.300	0.003±j12.804 −12.354 −0.271	−0.337±j12.342 −11.928 −0.007

由表1知，无功负荷Q_1在变化的过程中，系统可能发生了两次Hopf分叉和一次鞍结分叉，利用Hopf分叉知识分析得到在Q_1=10.945发生的Hopf分叉将产生稳定的极限环，同时平衡点将失稳，系统将产生周期振荡。而$Q_1 = 11.407$发生的Hopf分叉产生的是不稳定极限环，同时平衡点将从不稳定回到稳定。当Q_1进一步增加到11.411时，系统出现鞍结分叉，将发生电压崩溃，这正是文献[2]的结果，形如(17)式中的$a = -82.0$。将负荷电压V_2随无功变化曲线示于图5。虚线表示平衡点失稳产生了稳定的极限环。

图5 母线电压V_2随Q_1变化曲线

Fig. 5 Q_1 vs V_2 magnitude curve

本算例表明，无功负荷的变化能够引起系统电压崩溃，也能够引起系统周期振荡，这说明一种失稳参数的变化能够引起多种失稳现象，电力系统中各种失稳机理是有着相互内在关系的。因而，从全面角度来分析失稳机理有着重要意义，局部分叉理论无疑在这方面提供了有力的工具。

5 结论和分析

(1) 用局部分叉理论能够将电力系统中的静态稳定问题和部分动态稳定问题统一进行研究，因而能够从一个更为全面的角度探求电力系统失稳现象，进而对其进行控制。

(2) 本文算例没有考虑在电力系统失稳过程中有着重要作用的一些调节器，如励磁调节器，有载调压器等，但这并不影响本文的一般性，若计及这些调节器的模型，电力系统动态模型将增加许多阶数，而没有影响局部分叉理论的普遍性，事实上，已有许多学者在这方面进行了探讨[3]。

(3) 本文在讨论电力系统局部分叉过程当中，没有考虑系统局部分叉的退化过程。因而用较低阶的Taylor展开式(二阶或三阶)就能对问题进行分析，当分叉是退化时，就必须用到较高阶Taylor展开式，电力系统退化的Hopf分叉可以参见文献[6]。

(4) 当系统的规模比较大，并计及各种调节器时，动态模型的维数将变得非常高，不论是求解雅可比矩阵特征值还是求解低维中心流形，工作量都是非常巨大的，因而用局部分叉方法实时分析系统失稳还需进一步探讨。

(下转第34页)

(上接第28页)

参 考 文 献

1 Dobson I, Chiang H D. Towards a Theory of Voltage Callapse in Electric Power Systems. Systems and Control Letters. 1989, 13

2 Rajagopalan C, Sauer P W, Pai M A. Analysis of Voltage Control System Exhibiting Hopf Bifurcation. Proceeding of the 28th Conference on Decision and Control. Tampa, Florida, 1989.12

3 Kwatny H G, Pasrija A K, Bahar L Y. Static Bifarcations in Electric Power Networks: Loss of Steady-State Stability and Voltage Collapse. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1986.10, 33(10)

4 冯治鸿. 电力系统电压稳定性研究. 清华大学博士论文, 1990

5 Guckenheimer J, Holms P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag, New Youk, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983

6 Chen R L, Varaiya P. Degenerate Hopf Bifurcation in Power Systems. IEEE Transaction on Circuits and Systems, 1988.7, 35(7)

LOCAL BIFURCATION IN POWER SYSTEMS: LOSS OF STEADY-STATE STABILITY AND PERIODIC OSCILLATION

Liu Jin, Wu Xiaochen, Sun Yangshen, Chen Deshu

(Huazhong University of Science & Technology, Wuhan)

Abstract This paper discusses the stability of the power system, making use of local bifurcation theory. Steady-state stability and periodic oscillation are combined to analyze through local bifurcation theory. The paper also gives the example of periodic oscillation and voltage callapse, corresponding to Hopf bifurcation and saddle-node bifurcation respectively, with the variation of reactive load. The research of the paper indicates that the stable character of the power systems can be grasped in the structure by local bifurcation theory.

Keywords power system local bifurcation steady-state stability periodic oscillation