求解无功优化的内点线性和内点非线性规划方法比较

刘明波[1]，程 莹[2]，林声宏[1]

(1. 华南理工大学电力学院，广东省广州市 510640；2. 苏州供电局，江苏省苏州市 215004)

摘要：将内点线性和内点非线性规划算法应用于求解大型电力系统的无功优化问题，并对两种算法的几个关键问题进行了研究，提出了有效的改进措施。根据从14节点到538节点的5个不同规模试验系统的计算结果，在收敛性能、优化结果和计算速度等方面对这两种算法进行了综合评估。

关键词：无功优化；原对偶路径跟踪内点法；线性规划；非线性规划

中图分类号：TM744；TM714.3

0 引言

自1984年Karmarkar提出一种求解线性规划模型的具有多项式时间复杂性的算法以来，内点法的研究已取得很大进展，已形成3类内点算法[1]，即投影尺度法、仿射尺度法和路径跟踪法，其中以路径跟踪内点法最具发展潜力。它本质上是牛顿法、拉格朗日函数和对数壁垒函数三者的结合，具有二阶收敛性和数值鲁棒性。路径跟踪内点法已较广泛地用于求解电力系统优化领域中的线性规划[2~4]、二次规划[5,6]及一般非线性规划问题[7~11]。

内点法的应用已得到研究人员的重视，但对内点线性和内点非线性规划算法应用于求解电力系统优化问题的比较研究还未见到文献发表。本文以大型电力系统无功优化问题为研究对象，对求解线性和非线性无功优化问题的原对偶路径跟踪内点法的关键技术问题进行了研究，比较分析了两者在建模和选择初始点方面的不同，并通过试验系统的计算结果对两种算法的收敛性能、优化结果和计算速度等方面进行了比较和评估。

1 无功优化问题的数学模型

无功优化问题的目标函数 f 及约束条件可以描述为：

$$\min f = P_{\mathrm{S}} \tag{1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} f_{P_i} = P_{\mathrm{G}i} - P_{\mathrm{D}i} - V_i \sum\limits_{j\in i} V_j \cdot \\ \qquad (G_{ij}\cos\theta_{ij} + B_{ij}\sin\theta_{ij}) = 0 \\ f_{Q_i} = Q_{\mathrm{R}i} - Q_{\mathrm{D}i} - V_i \sum\limits_{j\in i} V_j \cdot \\ \qquad (G_{ij}\sin\theta_{ij} - B_{ij}\cos\theta_{ij}) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$i = 1,2,\cdots,n$

$$V_{i\min} \leqslant V_i \leqslant V_{i\max} \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{3}$$

$$Q_{\mathrm{R}i\min} \leqslant Q_{\mathrm{R}i} \leqslant Q_{\mathrm{R}i\max} \quad i = 1,2,\cdots,m+r \tag{4}$$

$$T_{i\min} \leqslant T_i \leqslant T_{i\max} \quad i = 1,2,\cdots,q \tag{5}$$

其中，P_{S} 为整个系统的有功损耗；G_{ij} 和 B_{ij} 分别为节点导纳矩阵的元素 Y_{ij} 的实部和虚部；θ_i 为节点 i 的电压相角；V_i 为节点 i 的电压幅值；$P_{\mathrm{G}i}$ 为节点 i 的发电机有功出力；$Q_{\mathrm{R}i}$ 为节点 i 的可调发电机或可调无功补偿设备的无功出力；$P_{\mathrm{D}i}$ 和 $Q_{\mathrm{D}i}$ 分别为节点 i 的负荷有功和无功功率；T_i 为第 i 台可调变压器的变比；n,m,r 和 q 分别为网络节点、可调发电机、可调无功补偿设备及可调变压器的数目。

在上述模型中，还可计及函数不等式约束，如输电线路的功率限制等。

2 内点线性规划算法

2.1 线性化模型

选择发电机机端电压、无功补偿设备出力和变压器变比为控制变量，发电机无功出力和负荷节点电压为状态变量。将潮流方程(2)线性化，不难求出表示状态变量(或有功损耗)与控制变量之间关系的灵敏度方程，从而可将式(1)～式(5)表示的非线性规划模型线性化为：

$$\min \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \tag{6}$$

$$\text{s.t.}\ \underline{\boldsymbol{b}} \leqslant \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \bar{\boldsymbol{b}} \tag{7}$$

$$\underline{\boldsymbol{x}} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \bar{\boldsymbol{x}} \tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 表示由控制变量增量构成的向量；$\boldsymbol{A}$ 表示由状态变量对控制变量的偏导数构成的矩阵，$\boldsymbol{A} \in \mathbf{R}^{n(m+r+q)}$；$\bar{\boldsymbol{b}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{b}}$ 分别表示由状态变量增量的上、下限构成的向量；$\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\underline{\boldsymbol{x}}$ 分别表示由控制变量增量的上、下限构成的向量；n 和 $m+r+q$ 分别为状态变量和控制变量的数目。

收稿日期：2001-04-10；修回日期：2001-06-23。

2.2 原对偶路径跟踪内点算法

引入松弛变量 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{l},\boldsymbol{u}(\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{l},\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0})$，将不等式约束(7)和(8)转变为等式约束：

$$\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{s}_1=\underline{\boldsymbol{b}},\quad \boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{s}_2=\bar{\boldsymbol{b}} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}=\underline{\boldsymbol{x}},\quad \boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}=\bar{\boldsymbol{x}} \tag{10}$$

引入对数壁垒函数，消去松弛变量的非负性约束，对等式约束(9)和(10)分别引入拉格朗日乘子向量 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w},\boldsymbol{v}$，得到拉格朗日函数：

$$\begin{aligned}L=&\boldsymbol{c}^{\mathrm T}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^{\mathrm T}(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{s}_1-\underline{\boldsymbol{b}})-\boldsymbol{z}^{\mathrm T}(\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{s}_2-\bar{\boldsymbol{b}})-\\&\boldsymbol{w}^{\mathrm T}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}-\underline{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{v}^{\mathrm T}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{x}})-\\&\mu\sum_{j=1}^{n}\ln s_{1j}-\mu\sum_{j=1}^{n}\ln s_{2j}-\mu\sum_{j=1}^{m+r+q}\ln l_j-\\&\mu\sum_{j=1}^{m+r+q}\ln u_j\end{aligned} \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}\leqslant\boldsymbol{0}$；$\mu$ 为壁垒参数，且 $\mu\geqslant0$。

根据 Kuhn-Tucker 最优性条件，得到：

$$\boldsymbol{L}_x=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{L}_y=\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{s}_1-\underline{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{0} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{L}_z=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{s}_2-\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{0} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{L}_w=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{l}-\underline{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{L}_v=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{L}_{S_1}=\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{Ye}_1-\mu\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{0} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{L}_{S_2}=\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{Ze}_1+\mu\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{0} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{L}_l=\boldsymbol{LWe}_2-\mu\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{L}_u=\boldsymbol{UVe}_2+\mu\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0} \tag{20}$$

其中，$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 分别代表维数为 n 和 $m+r+q$ 的单位向量；$\boldsymbol{S}_1=\mathrm{diag}(s_{11},\cdots,s_{1n})$，$\boldsymbol{S}_2=\mathrm{diag}(s_{21},\cdots,s_{2n})$，$\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}(l_1,\cdots,l_{m+r+q})$，$\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(u_1,\cdots,u_{m+r+q})$，$\boldsymbol{Y}=\mathrm{diag}(y_1,\cdots,y_n)$，$\boldsymbol{Z}=\mathrm{diag}(z_1,\cdots,z_n)$，$\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}(w_1,\cdots,w_{m+r+q})$，$\boldsymbol{V}=\mathrm{diag}(v_1,\cdots,v_{m+r+q})$。

用牛顿法求解由式(12)至式(20)组成的非线性方程组，可得到修正方程：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}_2&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}^{\mathrm T}&\boldsymbol{A}^{\mathrm T}&\boldsymbol{D}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{y}\\\Delta\boldsymbol{z}\\\Delta\boldsymbol{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\psi}\\\boldsymbol{\pi}\\\boldsymbol{\gamma}\end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\Delta\boldsymbol{l}=\boldsymbol{L}_{w0}+\Delta\boldsymbol{x} \tag{22}$$

$$\Delta\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{L}_{v0}-\Delta\boldsymbol{x} \tag{23}$$

$$\Delta\boldsymbol{s}_1=-\boldsymbol{Y}_0^{-1}\boldsymbol{L}_{s_10}-\boldsymbol{Y}_0^{-1}\boldsymbol{S}_{10}\Delta\boldsymbol{y} \tag{24}$$

$$\Delta\boldsymbol{s}_2=-\boldsymbol{Z}_0^{-1}\boldsymbol{L}_{s_20}-\boldsymbol{Z}_0^{-1}\boldsymbol{S}_{20}\Delta\boldsymbol{z} \tag{25}$$

$$\Delta\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{L}_0^{-1}(\boldsymbol{L}_{l0}+\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{L}_{w0})-\boldsymbol{L}_0^{-1}\boldsymbol{W}_0\Delta\boldsymbol{x} \tag{26}$$

$$\Delta\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{U}_0^{-1}(\boldsymbol{L}_{u0}+\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{L}_{v0})+\boldsymbol{U}_0^{-1}\boldsymbol{V}_0\Delta\boldsymbol{x} \tag{27}$$

$$\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{Y}_0^{-1}\boldsymbol{S}_{10} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{D}_2=-\boldsymbol{Z}_0^{-1}\boldsymbol{S}_{20} \tag{29}$$

$$\boldsymbol{D}_3=\boldsymbol{L}_0^{-1}\boldsymbol{W}_0-\boldsymbol{U}_0^{-1}\boldsymbol{V}_0 \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\psi}=-\boldsymbol{L}_{y0}-\boldsymbol{Y}_0^{-1}\boldsymbol{L}_{s_10} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{\pi}=-\boldsymbol{L}_{z0}+\boldsymbol{Z}_0^{-1}\boldsymbol{L}_{s_20} \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{L}_{x0}-\boldsymbol{L}_0^{-1}(\boldsymbol{L}_{l0}+\boldsymbol{W}_0\boldsymbol{L}_{w0})-\boldsymbol{U}_0^{-1}(\boldsymbol{L}_{u0}+\boldsymbol{V}_0\boldsymbol{L}_{v0}) \tag{33}$$

相继求解式(21)至式(27)，可以得到所有变量的修正方向 $\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{z},\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{l},\Delta\boldsymbol{u},\Delta\boldsymbol{s}_1,\Delta\boldsymbol{s}_2,\Delta\boldsymbol{w}$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}$。可按文献[5,7,10]的方法求出原步长和对偶步长，从而修正原变量和对偶变量的值。

在采用内点线性规划法求解无功优化问题时，应注意以下 5 个问题：

a. 在迭代过程中，壁垒参数 μ 按下式自动调整：

$$\mu=\frac{D_{\mathrm{gap}}}{2\beta(n+m+r+q)} \tag{34}$$

其中，β 为加速因子，且 $\beta>1$；D_{gap} 为对偶间隙，其计算式为：

$$D_{\mathrm{gap}}=\boldsymbol{s}_1^{\mathrm T}\boldsymbol{y}-\boldsymbol{s}_2^{\mathrm T}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{l}^{\mathrm T}\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}^{\mathrm T}\boldsymbol{v}$$

b. 求解过程是一个逐次线性化并用内点法求解的过程，应区分主迭代和子迭代这两个不同的迭代过程。主迭代是指潮流计算，建立线性规划模型及用内点法求控制变量的变化量，然后根据控制变量的变化量修改系统参数到重新求解潮流的过程。主迭代的收敛性判据为相邻两次迭代的目标函数值之差小于 10^{-3} 且所有的不等式约束均被满足。子迭代是指用内点法求解线性规划模型的迭代过程，收敛性判据为对偶间隙的值小于 10^{-6}。

c. 由于线性逼近只在近似点附近才有效，故必须对控制变量的变化量加以限制，并采用动态调整控制变量的线性化步长策略。但在实际中，动态调整步长的依据仍是目前尚未解决的困难。本文的调整策略是在振荡发生时才将步长减半，这样处理可能会增加迭代的次数，但可以保证程序的通用性和简单性。

d. 在采用内点法求解线性规划问题时，从理论上讲，应选择初始内点可行解来启动，但求取初始内点解的过程相当复杂[1,4]而且费时。本文中，我们采用非内点启动，按满足 $\boldsymbol{L}_{w0}=\boldsymbol{L}_{v0}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{l},\boldsymbol{u}>\boldsymbol{0}$ 的条件确定初始点，并在进行第 1 次主迭代时对控制变量的变化量不施加线性化步长限制，即首次大迭代相当于一个校正过程。

e. 内点线性规划算法的主要计算量集中在对高阶修正方程式(21)的反复求解上，这也是其计算瓶颈所在。本文采用类似文献[5]中的 Cholesky 分解技术求解该方程。

3 内点非线性规划算法

由式(1)至式(5)表示的非线性规划模型可以写

成如下一般形式：

$$\min f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) \tag{35}$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{0} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{x}_{1\min}\leqslant \boldsymbol{x}_1\leqslant \boldsymbol{x}_{1\max} \tag{37}$$

其中，$f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)$为系统有功损耗；$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{0}$为潮流方程；$\boldsymbol{x}_1=[\boldsymbol{Q}_G^T,\boldsymbol{Q}_C^T,\boldsymbol{V}^T,\boldsymbol{T}_B^T]^T$；$\boldsymbol{Q}_G$和$\boldsymbol{Q}_C$分别为由可调发电机和可调无功补偿设备的无功出力构成的向量；$\boldsymbol{V}$为由所有节点电压幅值构成的向量；$\boldsymbol{T}_B$为由可调变压器的变比构成的向量；$\boldsymbol{x}_1\in\mathbf{R}^{m+r+n+q}$；$\boldsymbol{x}_{1\max}$和$\boldsymbol{x}_{1\min}$分别为向量$\boldsymbol{x}_1$的上、下限值；$\boldsymbol{x}_2$为由平衡机的有功出力和除平衡节点以外的其他节点电压相角构成的向量，$\boldsymbol{x}_2\in\mathbf{R}^n$。

直接非线性原对偶路径跟踪内点法可以推导如下。引入松弛变量$\boldsymbol{s}_u,\boldsymbol{s}_l(\boldsymbol{s}_u,\boldsymbol{s}_l\geqslant\boldsymbol{0})$，将不等式约束(37)转变成等式约束，得到：

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{s}_u=\boldsymbol{x}_{1\max}\\ \boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{s}_l=\boldsymbol{x}_{1\min}\end{cases} \tag{38}$$

引入对数壁垒函数消去松弛变量的非负性约束，并对等式约束(36)和(38)引入拉格朗日乘子，得到如下的拉格朗日函数：

$$L=f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{y}_g^T\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{y}_u^T(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{s}_u-\boldsymbol{x}_{1\max})-\boldsymbol{y}_l^T(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{x}_{1\min})-\mu\sum_{j=1}^{m+r+n+q}\ln s_{uj}-\mu\sum_{j=1}^{m+r+n+q}\ln s_{lj} \tag{39}$$

其中，$\boldsymbol{y}_g,\boldsymbol{y}_u,\boldsymbol{y}_l$为拉格朗日乘子向量，且$\boldsymbol{y}_l\geqslant\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y}_u\leqslant\boldsymbol{0}$；$\mu$为壁垒参数，且$\mu\geqslant 0$。

根据 Kuhn-Tucker 最优性条件可得：

$$\boldsymbol{L}_{x_1}=\nabla f_{x_1}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)-\nabla\boldsymbol{g}_{x_1}^T(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{y}_g-\boldsymbol{y}_l-\boldsymbol{y}_u=\boldsymbol{0} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{L}_{x_2}=\nabla f_{x_2}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)-\nabla\boldsymbol{g}_{x_2}^T(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{y}_g=\boldsymbol{0} \tag{41}$$

$$\boldsymbol{L}_{y_g}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{0} \tag{42}$$

$$\boldsymbol{L}_{y_u}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{s}_u-\boldsymbol{x}_{1\max}=\boldsymbol{0} \tag{43}$$

$$\boldsymbol{L}_{y_l}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{x}_{1\min}=\boldsymbol{0} \tag{44}$$

$$\boldsymbol{L}_{s_l}=\boldsymbol{S}_l\boldsymbol{Y}_l\boldsymbol{e}-\mu\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0} \tag{45}$$

$$\boldsymbol{L}_{s_u}=\boldsymbol{S}_u\boldsymbol{Y}_u\boldsymbol{e}+\mu\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0} \tag{46}$$

其中，$\boldsymbol{e}$是维数为$m+r+n+q$的单位列向量；$\boldsymbol{S}_l,\boldsymbol{S}_u,\boldsymbol{Y}_l,\boldsymbol{Y}_u$分别是以$\boldsymbol{s}_l,\boldsymbol{s}_u,\boldsymbol{y}_l,\boldsymbol{y}_u$的分量为对角元的对角阵。

用牛顿法求解由式(40)至式(46)组成的非线性方程，得到修正方程为：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{11} & \boldsymbol{w}_{12} & -\nabla\boldsymbol{g}_{x_1}^T\\ \boldsymbol{w}_{21} & \boldsymbol{w}_{22} & -\nabla\boldsymbol{g}_{x_2}^T\\ -\nabla\boldsymbol{g}_{x_1} & -\nabla\boldsymbol{g}_{x_2} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}_1\\ \Delta\boldsymbol{x}_2\\ \Delta\boldsymbol{y}_g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Psi}\\ -\boldsymbol{L}_{x_20}\\ -\boldsymbol{L}_{y_g0}\end{bmatrix} \tag{47}$$

$$\Delta\boldsymbol{s}_l=\boldsymbol{L}_{y_l0}+\Delta\boldsymbol{x}_1 \tag{48}$$

$$\Delta\boldsymbol{s}_u=-\boldsymbol{L}_{y_u0}-\Delta\boldsymbol{x}_1 \tag{49}$$

$$\Delta\boldsymbol{y}_l=-\boldsymbol{S}_{l0}^{-1}[\boldsymbol{L}_{s_l0}+\boldsymbol{Y}_{l0}(\boldsymbol{L}_{y_l0}+\Delta\boldsymbol{x}_1)] \tag{50}$$

$$\Delta\boldsymbol{y}_u=-\boldsymbol{S}_{u0}^{-1}[\boldsymbol{L}_{s_u0}-\boldsymbol{Y}_{u0}(\boldsymbol{L}_{y_u0}+\Delta\boldsymbol{x}_1)] \tag{51}$$

$$\boldsymbol{\Psi}=-\boldsymbol{L}_{x_10}-\boldsymbol{S}_{l0}^{-1}(\boldsymbol{L}_{s_l0}+\boldsymbol{Y}_{l0}\boldsymbol{L}_{y_l0})-\boldsymbol{S}_{u0}^{-1}(\boldsymbol{L}_{s_u0}-\boldsymbol{Y}_{u0}\boldsymbol{L}_{y_u0}) \tag{52}$$

$\boldsymbol{w}_{kj}(k,j=1,2)$的计算式为：

当$k=j=1$时，

$$\boldsymbol{w}_{11}=-\sum_{i=1}^{2n}y_{gi}\nabla^2 g_{ix_1x_1}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{S}_{l0}^{-1}\boldsymbol{Y}_{l0}-\boldsymbol{S}_{u0}^{-1}\boldsymbol{Y}_{u0} \tag{53}$$

对于其他情况，

$$\boldsymbol{w}_{kj}=\nabla f_{x_kx_j}^2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)-\sum_{i=1}^{2n}y_{gi}\nabla\boldsymbol{g}_{ix_kx_j}^2(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) \tag{54}$$

依次求解式(47)至式(51)可得到原变量和对偶变量的修正方向。并按文献[5,7,10]的方法求出原步长和对偶步长，从而修正原变量和对偶变量的值。

在采用内点非线性规划法求解无功优化问题时，应注意以下4个问题：

a. 对于非线性规划问题，不能保证对偶间隙为正值[8]，因此我们采用补偿间隙来近似代替对偶间隙，其定义如下：

$$C_{\text{gap}}=\boldsymbol{y}_l{}^T\boldsymbol{s}_l-\boldsymbol{y}_u{}^T\boldsymbol{s}_u \tag{55}$$

由此，壁垒参数可由下式确定，β的含义及取值范围与内点线性规划法的相同：

$$\mu=\frac{C_{\text{gap}}}{2\beta(m+r+n+q)} \tag{56}$$

b. 许多文献均指出，对于非线性规划问题，并不需要从严格的内点开始，只需将各变量的初值限制在各自的取值范围内即可。在我们的研究中也证实了内点非线性规划法可直接采用平均值启动，即：可调发电机的无功出力、可调无功补偿设备的出力、可调变压器的变比及节点电压幅值的初值取其上下限的平均值；节点电压相角的初值取为0；平衡发电机有功出力的初值根据节点电压和导纳矩阵求出；松弛变量的初值按式(43)和式(44)求取，并能自动满足非负性约束；对偶变量的初值按满足$\boldsymbol{y}_u<\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y}_l>\boldsymbol{0}$给定。

c. 收敛性判据为：补偿间隙的值小于10^{-6}且潮流方程(36)的最大潮流偏差小于10^{-3}。

d. 内点非线性规划算法的主要计算量集中在对高阶修正方程(47)的反复求解上，这也是其计算瓶颈所在。修正方程(47)的阶数由系统的原始变量数目和潮流方程的阶数确定。本文中，其系数矩阵的

数据结构采用与文献[12]相似的结构,以提高该修正方程的求解速度。

4 算例及结果分析

对内点线性和非线性规划两种算法,选取相同的加速因子 $\beta=10$。5 个试验系统均采用标幺值计算,基准功率 $S_B=100$ MVA。试验系统的基本数据见表 1。计算所用的微机为 Pentium Ⅲ 550,内存为 128 MB,两种算法均用 C 语言实现,并用 Visual C++ 6.0 编译。表 2 分别列出了采用内点线性和内点非线性规划算法求解这 5 个系统时的优化后网损、网损下降率、迭代次数及计算时间。

表 1 试验系统的基本数据

Table 1 Basic data of test systems

系统名称	节点数/支路数	可调变压器数	无功补偿设备数	发电机数
IEEE 14 节点系统	14/19	3	3	2
IEEE 30 节点系统	30/40	4	9	6
美国 EPRI 68 节点系统	68/82	4	10	16
IEEE 118 节点系统	118/188	8	10	36
广东省 538 节点系统	538/639	64	98	48

表 2 两种方法优化结果与计算时间的比较

Table 2 Comparison of optimization results and execution times of two methods

计算方法	内点线性规划算法				内点非线性规划算法			
	优化后网损	网损下降率/(%)	主迭代次数/子迭代次数	计算时间/s	优化后网损	网损下降率	迭代次数	计算时间/s
IEEE 14 节点系统	0.138 69	20.93	11/8	1.0	0.138 44	21.00	11	0.1
IEEE 30 节点系统	0.072 45	18.27	14/10	3.5	0.071 02	19.89	10	0.4
美国 EPRI 68 节点系统	1.781 68	2.15	6/15	1.0	1.769 67	2.81	14	1.0
IEEE 118 节点系统	1.169 19	14.47	24/16	20.0	1.167 29	14.61	14	3.5
广东省 538 节点系统	1.475 72	14.51	12/17	553.0	1.468 47	14.93	40	857

从优化结果来看,用上述两种算法对不同系统求得的网损都有不同程度的降低,两者的网损下降幅度均很接近,只相差 1%左右,但用内点非线性规划法求得的网损普遍要比用内点线性规划算法时的下降幅度大一些。仅从目标函数的下降幅度很难评估孰优孰劣,只能说明系统的优化结果并不惟一。

从表 2 可知,随着系统规模的扩大,内点线性规划法的迭代次数稳定,且其对系统规模不敏感的特点再次得到了证明,即使对具有 538 节点的广东省电网,内点线性规划法的子迭代平均次数也保持在 17 次左右。内点线性规划法所具有的这种多项式时间复杂性可从理论上得到证明[1]。

在采用内点非线性规划法求解从 14 节点到 118 节点系统时,迭代次数稳定在 14 次以内,而广东省电网迭代次数明显增多,这是因为其电网节点数多,对节点电压的限制和控制手段的限制相当严格,致使寻找最优解的难度增加。同时也说明了虽然内点非线性规划法采用牛顿迭代方法,具有二阶收敛性,但其在收敛性能上要较内点线性规划法逊色。

目前,还不能从理论上证明内点非线性规划法具有多项式时间复杂性,但表 2 的计算结果表明它确实是一种具有稳定收敛特性的优化算法。具体来说,从 14 节点到 118 节点系统,内点非线性规划算法的求解速度都要快于内点线性规划算法,但是对于广东省电网,由于迭代次数的增多,使得优化时间增加。若能提高其收敛性能,使迭代次数得以减少,就可以进一步提高计算速度。

在采用内点线性规划法的求解过程中,若计算中途退出,只要该次迭代结果满足所有的不等式约束条件,则说明此优化结果为一个次优解。这在实际系统运行中可为运行人员提供参考。当无功优化程序在适当时候中途退出时,根据此结果可调整目前的各种无功控制设备,具有较大的灵活性。而在采用内点非线性规划法的求解过程中,其中间结果是没有意义的,计算中途退出,则无法得到可行解。实际系统的运行条件非常复杂,对各种控制手段有严格的限制,很有可能得不到优化解。因此,对于内点非线性规划算法而言,如何在求解过程中对不可行性情况进行检测,并在不可行性情况下采取适当的对策以找到一个尽量合理的优化解还有待于更进一步的研究。

5 结论

求解无功优化问题的内点线性和内点非线性规划法在建模、选择初始点及计算流程方面均有很大的差异。通过实例计算对它们在优化结果、收敛性能和计算速度等方面进行了比较和分析,结果表明,内点线性规划法具有数据稳定、收敛可靠和计算速度

快等优点，理论上比较成熟，但对线性化步长的动态调整还不能找到一种更为恰当的方法，对其初始点的选择仍需要进行理论上的研究；内点非线性规划法在实际计算中展现出良好的收敛特性和计算精度，但对于大规模电力系统的无功优化计算，其计算速度还有待提高，且内点非线性规划法的数学理论基础尚未成熟，许多应用中的具体问题仍需要理论上的证明和实践经验的积累，如收敛性能的进一步改善等，这些都是有待深入研究的课题。同时也应看到，高阶修正方程的求解仍是制约内点线性和内点非线性规划算法的计算瓶颈，因此探索更有效的数据结构及求解方法将会给内点法的应用开辟更为广阔的前景。

参考文献

1 方述诚，普森普拉·S(Fang Shucheng, Puthenpuru Sarat). 线性优化及扩展——理论与算法(Linear Optimization and Extensions: Theory and Algorithms). 北京：科学出版社(Beijing: Science Press)，1994

2 Yan X, Quintana V H. An Efficient Predictor-corrector Interior Point Algorithm for Security-constrained Economic Dispatch. IEEE Trans on Power Systems, 1997, 12(2): 51～56

3 Yan X, Quintana V H. Improving an Interior-point-based OPF by Dynamic Adjustments of Step Sizes and Tolerances. IEEE Trans on Power Systems, 1999, 14(2): 709～717

4 刘明波，陈学军(Liu Mingbo, Chen Xuejun). 电力系统无功优化的改进内点算法(Improved Interior Point Method for Reactive Power Optimization in Power Systems). 电力系统自动化(Automation of Electric Power Systems), 1998, 22(5): 33～36

5 Wei H, Sasaki H, Yokoyama R. An Application of Interior Point Quadratic Programming Algorithm to Power Systems Optimization Problems. IEEE Trans on Power Systems, 1996, 11(1): 260～265

6 王晓东，李乃湖(Wang Xiaodong, Li Naihu). 基于稀疏技术的原对偶内点法电压无功功率优化(A Primal-dual Interior Point Method for Optimal Voltage/Reactive Power Control with Sparsity Structure). 电网技术(Power System Technology), 1999, 23(3): 23～26

7 Ganville S. Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods. IEEE Trans on Power Systems, 1994, 9(1): 136～146

8 Wu Y C, Debs A S, Marsten R E. A Direct Nonlinear Predictor-correcter Primal-dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows. IEEE Trans on Power Systems, 1994, 9(2): 876～883

9 郝玉国，刘广一，于尔铿(Hao Yuguo, Liu Guangyi, Yu Erkeng). 一种基于内点法的最优潮流算法(A New OPF Algorithm Based on Karmarkar's Interior Point Method). 中国电机工程学报(Proceedings of the CSEE), 1996, 16(6): 409～412

10 Wei H, Sasaki H, Kubokawa J, et al. An Interior Point Nonlinear Programming for Optimal Power Flow Problems with a Novel Data Structure. IEEE Trans on Power Systems, 1998, 13(3): 870～877

11 Guo Ruipeng, Han Zhenxiang, Wang Qin. Preventive/Corrective Control for Voltage Stability Using Predictor-corrector Interior Point Method. In: International Conference on Power System Technology. Beijing: 1998. 1513～1517

12 Sun D I, Ashley B, Brewer B, et al. Optimal Power Flow by Newton Approach. IEEE Trans on PAS, 1984, 103(10): 2864～2880

刘明波(1964—)，男，教授，博士，系主任，主要研究方向为电网无功优化调度及最优潮流计算、电力系统电压稳定性分析、地理信息系统及配网自动化技术。E-mail: epmbliu@scut.edu.cn

程　莹(1975—)，女，硕士，主要研究方向为电力系统最优潮流及无功优化计算。

林声宏(1968—)，男，硕士，工程师，主要研究方向为电力系统最优潮流计算及电压稳定分析。

COMPARATIVE STUDIES OF INTERIOR-POINT LINEAR AND NONLINEAR PROGRAMMING ALGORITHMS FOR REACTIVE POWER OPTIMIZATION

Liu Mingbo[1], *Cheng Ying*[2], *Lin Shenghong*[1]

(1. South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

(2. Suzhou Power Supply Bureau, Suzhou 215004, China)

Abstract: An application of interior-point linear and nonlinear programming algorithms to reactive power optimization problems of large-scale power systems is presented in this paper. Also, several crucial problems in their application are studied in detail, and the improvement schemes are proposed. According to the numerical results of test systems that range in size from 14 to 538 buses, general comparison between these two algorithms in terms of their convergence, optimization results and computational performances have been presented respectively.

Key words: reactive power optimization; primal-dual path-following interior-point algorithm; linear programming; nonlinear programming