

实时市场中电价多解的判定机理

刘 畅^{1,2}, 冯冬涵^{1,2}, 方 陈³

(1. 上海交通大学电子信息与电气工程学院, 上海市 200240;

2. 电力传输与功率变换控制教育部重点实验室, 上海交通大学, 上海市 200240;

3. 国网上海市电力公司电力科学研究院, 上海市 200437)

摘要: 电价多解情况的出现将为实时市场的出清带来困难,有必要从理论上对其发生条件进行研究,并建立高效判定方法以提高实时定价效率。文中对节点电价多解情况的判定机理进行了深入分析和研究,基于市场出清问题的物理特性和数学特征,提出了退化、对偶问题多解与节点电价多解三者之间明确而严格的数学关系,基于所获判定机理建立了电价多解情况的完整有效判定流程,最终利用算例进行了判定方法对比以及有效性及适应性验证。

关键词: 节点电价; 退化; 对偶问题多解; 电价多解; 判定流程

0 引言

目前,大多数国外电力现货市场均采用节点电价的定价机制,如PJM^[1]、CAISO^[2]和ISO-NE^[3]等。而国内的电力现货市场正在建设中,已发布市场规则的南方(以广东起步)^[4-5]、山东省^[6]等电力现货市场也都是采用节点电价机制。由于实时功率平衡的需要,实时市场一般具有较短的调度间隔(如5 min),因而普遍采用易于求解的线性规划出清^[1-6]。当线性规划出现退化时,除了数学上的迟滞和循环^[7],经济学上的影子价格不唯一^[8-9]等问题,还可能造成实时市场中的节点电价多解^[10-11]。电价多解情况发生时,现有的定价软件将随机输出多个可行解中的一个值^[3]。虽然从表面上看,多重解中的任意一个都是合理的,实际上将造成市场参与方所得利润和效用的差异,因而草率地随机定价将使得对参与方的激励出现偏差,影响市场运行效率。基于上述原因,节点电价多解问题受到了广泛关注^[10-20]。

针对该问题,工程应用上已有直接以随机值定价(ISO-NE)^[3]、取多解区间中值作为价格(欧洲日前市场)^[21]、在出清优化问题中加入扰动或二次惩罚项来消除价格多解(CAISO)^[16,18]等多种解决方法。学术界也已有颇为深入的探索,如基于各类剩

余加权组合的线性优化定价方法^[14],基于阻塞剩余最小化的综合定价方法^[17]等。然而,当前工程上应用的方法仍存在如缺乏公平性等诸多不合理之处^[12-13,15-17],而文献中提出的方法则在计算效率方面有待提高^[19]。

在电价多解的判定方法上,目前仅有较少研究。文献[19-20]提出了一种基于线性无关约束规格(linear independent constraint qualification, LICQ)的节点电价多解判定方法,实际的判定对象为对偶问题多解(multiple dual solutions, MDS)。有业内人士认为,可以通过最优单纯形表中基变量(右端值)是否为零,即原问题最优解是否退化,来判断节点电价是否多解。然而,由于退化、对偶问题多解均非节点电价多解的充要条件,上述判定方法具有天然的理论缺陷,存在误判的可能。

一方面,电价多解情况是现行节点电价机制下的固有问题,对其发生条件进行研究,有助于补充、完善节点电价现有理论体系;另一方面,正常情况(电价唯一)下并不需要转到耗时较长的特殊定价流程^[12-18],若前置一个高效的多解判定(计算效率与特殊定价相比有数量级优势),则可有效缩减出清流程平均耗时。且判定结果的统计数据能够直接反映出电价多解问题发生频率及严重性,有助于市场管理者对市场进行评估与完善,具有显著的现实意义。

此外,由于对电价多解的理解不充分,目前各文献中甚至尚未形成对该情况的统一命名,现有名称如“MDS”^[13,17,19-20],即对偶问题多解,或模糊称为“退化解(degenerate solution)”或“退化价格

收稿日期: 2019-01-23; 修回日期: 2019-07-25。

上网日期: 2019-11-11。

国家自然科学基金项目(51677115);上海市浦江人才计划(17PJD018);上海交通大学晨星优秀青年学者奖励计划资助。

(degenerate price)”^[10,14],或错误等同为“原问题退化(primal degeneracy)”^[11]。实际行业中,CAISO将该情况称为“退化定价情况(degenerate pricing condition)”^[16,18],而ISO-NE则将其称为“对偶退化(dual degeneracy)”^[3]。缺乏统一命名为电价多解相关研究与学术交流等带来极大不便。

本文对电价多解的判定机理进行了深入探讨,基于市场出清问题的物理特性和数学特征,获得了退化、对偶问题多解与节点电价多解三者间明确而严格的数学关系,形成了节点电价多解情况的判定机理,从而建立了完整有效的节点电价多解情况判定流程,弥补了已有判定方法原理上的不足,为该方法的工业应用提供了理论依据。

1 节点电价多解问题

以社会效益最大化为目标的市场出清问题建模如下^[22-23]:

$$\begin{cases} \min_{P_G, P_D} (\lambda_G^T P_G - \lambda_D^T P_D) \\ \text{s.t.} \quad e^T (P_{BG} - P_{BD}) = 0 \\ \quad T(P_{BG} - P_{BD}) \leq \bar{F} \\ \quad \underline{P}_G \leq P_G \leq \bar{P}_G \\ \quad \underline{P}_D \leq P_D \leq \bar{P}_D \end{cases} \quad (1)$$

式中: λ_G 为机组报价向量; λ_D 为负荷报价向量; P_G 为机组出力向量; P_D 为负荷需求向量; P_{BG} 和 P_{BD} 分别为各节点上总的出力向量和需求向量,可以由 P_G 和 P_D 线性表示; $\bar{P}_G$ 和 $\underline{P}_G$ 分别为机组出力上限和下限向量, $\bar{P}_D$ 和 $\underline{P}_D$ 分别为负荷需求上限和下限向量; $\bar{F}$ 为线路潮流限制向量; T 为功率转移分布系数矩阵; e 为元素全为1的向量;第1行至第4行约束条件相对应的拉格朗日乘子分别为 $\lambda, \mu, (\hat{\tau}, \check{\tau}), (\hat{\xi}, \check{\xi})$;假设系统中节点数量、输电线路、机组和负荷的数量分别为 N_B, N_L, N_G 和 N_D 。

经典边际定价理论中^[22,24],节点电价为:

$$\rho_b = -\lambda - \sum_{l=1}^{N_L} \mu_l T_{l,b} \quad (2)$$

式中: μ_l 为线路 l 潮流约束对应的拉格朗日乘子; $T_{l,b}$ 为线路 l 关于节点 b 的功率转移分布系数。

数学上,当KKT(Karush-Kuhn-Tucker)条件确定的拉格朗日乘子 (λ, μ) 的值不唯一时,由式(2)确定的电价可能出现多解问题。

经济学上,分段报价模式下形成的阶梯型供求曲线可能存在垂直重合部分,即交点不唯一,从而引发电价多解问题。其中,“不存在边际机组/负荷,无

线路阻塞”情况下的供求曲线如图1所示,其他更为复杂的情况可参见文献[17],本文不再赘述。

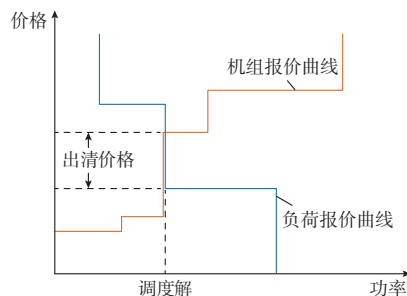


图1 电价多解情况示例
Fig.1 Examples of multiple price solutions

2 电价多解判定机理

由于所依据的判定条件并非电价多解的充要条件,即判定机理具有缺陷,已有判定方法存在误判的可能性。本章从退化、对偶问题多解与节点电价多解的关系出发,探讨逻辑完备的电价多解判定机理。

2.1 退化与对偶问题多解

在线性规划问题中,原问题最优解退化只是对偶问题多解的一个必要不充分条件^[9]。为弥补其不充分性,或者说在原问题退化的情况下探讨对偶问题解的唯一性,需要利用最优单纯形表中的系数矩阵子矩阵辅助判断^[24]。而商业求解软件求解过程的不透明性对最优单纯形表的获取造成了困难,高度退化情况下可能存在冗长的寻找最优可行基的过程。本节基于电力市场出清问题的物理特性和数学特征,从电力系统的角度,对市场出清问题最优解退化情况下对偶问题解的唯一性进行了分析。

2.1.1 市场出清问题的退化

设式(1)的约束条件系统为:

$$S \triangleq \begin{cases} e^T (P_{BG} - P_{BD}) = 0 \\ T(P_{BG} - P_{BD}) \leq \bar{F} \\ \underline{P}_G \leq P_G \leq \bar{P}_G \\ \underline{P}_D \leq P_D \leq \bar{P}_D \end{cases} \quad (3)$$

在其当前最优解 (P_G^*, P_D^*) 退化的情况下,系统 S 中取得的等号数量大于决策变量数。在式(1)中,决策变量数为机组数量和负荷数量之和,即 $N_G + N_D$;取得等号的数量为 $1 + N_\mu + N_G + N_D - N_m$,包括1个等式约束、 N_μ 条阻塞线路、 $N_G + N_D - N_m$ 个非边际系统单元, N_m 为系统中边际单元(机组/负荷)的数量; N_μ 为阻塞线路的数量。因此优化式(1)最优解退化等同于如下条件:

$$1 + N_\mu > N_m \quad (4)$$

2.1.2 市场出清问题的对偶问题多解

当优化式(1)取得最优解时,相关的拉格朗日乘子即为优化式(1)的对偶问题的最优解,相应数值可由 KKT 条件计算。为将 KKT 条件以矩阵形式表述,定义为:

$$\begin{cases} X = [\lambda, \mu_{N_L \times 1}, \hat{\tau}_{N_G \times 1}, \check{\tau}_{N_G \times 1}, \hat{\xi}_{N_D \times 1}, \check{\xi}_{N_D \times 1}]^T = [\lambda, Y^T]^T \\ I = (1)_{N_G \times 1} \\ J = (1)_{N_D \times 1} \\ E = \text{diag}(1) \\ \bar{G} = \text{diag}(P_{Gg}^* - \bar{P}_{Gg})_{N_G \times N_G} \\ \underline{G} = \text{diag}(\underline{P}_{Gg} - P_{Gg}^*)_{N_G \times N_G} \\ \bar{D} = \text{diag}(P_{Dd}^* - \bar{P}_{Dd})_{N_D \times N_D} \\ \underline{D} = \text{diag}(\underline{P}_{Dd} - P_{Dd}^*)_{N_D \times N_D} \\ \bar{F} = \text{diag}\left(\sum_b T_{l,b} \sum_{f_{Gg}=b, f_{Dd}=b} (P_{Gg} - P_{Dd}) - \bar{F}_l\right)_{N_L \times N_L} \\ T_G = (T_{l,f_{Gg}})_{N_G \times N_L} \\ T_D = (-T_{l,f_{Dd}})_{N_D \times N_L} \end{cases} \quad (5)$$

式中: T_G 为机组对应的转移分布系数矩阵,其元素为 $T_{l,f_{Gg}}$; T_D 为负荷对应的转移分布系数矩阵,其元素为 $-T_{l,f_{Dd}}$; g 为机组编号; d 为负荷编号; b 为节点编号; l 为线路编号; f_{Gg} 表示机组 g 所在节点; f_{Dd} 表示负荷 d 所在节点; P_{Gg}^* 和 P_{Dd}^* 分别为原问题最优解中机组 g 与负荷 d 的功率; $\bar{P}_{Gg}$ 和 $\underline{P}_{Gg}$ 分别为机组 g 出力的上、下限; $\bar{P}_{Dd}$ 和 $\underline{P}_{Dd}$ 分别为负荷 d 需求的上、下限; $\bar{F}_l$ 为线路 l 的潮流功率限制。

则优化式(1)对应的 KKT 条件可写为线性方程组(式(6))和对偶可行性约束(式(7))。

$$CX = \beta \quad (6)$$

$$Y \geq 0 \quad (7)$$

其中系数矩阵 C 为:

$$C = \begin{bmatrix} I & T_G & E & -E & 0 & 0 \\ -J & T_D & 0 & 0 & E & -E \\ 0 & \bar{F} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{D} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中: C 的维数为 $(N_L + 3N_G + 3N_D) \times (1 + N_L +$

$2N_G + 2N_D)$; E 为单位矩阵。

式(6)右端常数向量为:

$$\beta = [-\lambda_G \quad \lambda_D \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T_{(N_L + 3N_G + 3N_D) \times 1} \quad (9)$$

那么,式(1)的对偶问题多解等价于由 KKT 条件组成的线性系统(式(6)和式(7))多解。

2.1.3 退化情况下对偶问题解的唯一性

基于系数矩阵 C 的结构特征,可对系数矩阵 C 进行合理调整以方便求秩,即对线性方程组(式(6))进行化简。利用矩阵初等变换,使所有全零行位于非全零行上方,并适当调整矩阵各列的顺序,以及对部分行进行符号变换,可将矩阵 C 变为矩阵 C_1 ,即

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0_{M_1} & 0 & 0 \\ \dot{I}_{N_{mG} \times 1} & \dot{T}_{G, N_{mG} \times N_\mu} & 0 \\ -\dot{J}_{N_{mD} \times 1} & \dot{T}_{D, N_{mD} \times N_\mu} & 0 \\ \ddot{I} & \ddot{T} & E_{M_2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中:下标 $M_1 = (N_G + N_D - N_m + N_\mu) \times 1$, $M_2 = (2N_G + 2N_D + N_L - N_\mu) \times (2N_G + 2N_D + N_L - N_\mu)$; N_{mG} 与 N_{mD} 分别为边际机组与边际负荷的数量, $N_m = N_{mG} + N_{mD}$ 。 $\dot{I}$ 和 $\dot{J}$ 表示元素全为 1 的列向量, $\dot{T}_G$ 和 $\dot{T}_D$ 分别为边际机组/负荷与阻塞线路对应的转移分布系数; $\ddot{I}$ 和 $\ddot{T}$ 均为调整后的系数子向量/矩阵。

易知矩阵 C_1 中第 4 行是满行秩的,不妨设第 2 行和第 3 行左侧非零子矩阵为:

$$\dot{C} = \begin{bmatrix} \dot{I}_{N_{mG} \times 1} & \dot{T}_{G, N_{mG} \times N_\mu} \\ -\dot{J}_{N_{mD} \times 1} & \dot{T}_{D, N_{mD} \times N_\mu} \end{bmatrix}_{N_m \times (N_\mu + 1)} \quad (11)$$

则矩阵 C_1 (或 C) 的秩为:

$$\text{rank}(C) = \text{rank}(C_1) =$$

$$\text{rank}(\dot{C}) + 2N_G + 2N_D + N_L - N_\mu \quad (12)$$

线性方程组(式(6))多解要求矩阵 C 的秩小于变量数,即

$$\text{rank}(C) < 1 + N_L + 2N_G + 2N_D \quad (13)$$

则

$$\text{rank}(\dot{C}) < N_\mu + 1 \quad (14)$$

因而,原问题最优解退化时,即存在约束式(4),结合式(11)可知必定满足约束式(14),线性方程组(式(6))多解。然而线性系统(式(6)和式(7)),即对偶问题是否多解仍不明确,需要其他的补充条件。换言之,退化仅是对偶问题多解的必要条件。下面继续探讨对偶问题多解所需的补充条件。

在线性方程组(式(6))多解的情况下,若加上约束式(7)后,线性系统(式(6)和式(7))只能取唯一解,说明约束式(7)对向量 Y 的非负限制起到了作用。此时假设有一组解 $X^*=(\lambda^*,(Y^*)^T)^T$,容易证明 Y^* 中必定有部分乘子取值为0,其个数记为 N_0 。其中, $N_G+N_D+N_m+N_L-N_\mu$ 个乘子是由KKT条件中的互补松弛性直接确定为0的,即它们对应的约束为松约束,删去矩阵 C_1 中这些乘子对应的系数列,将由此在第4行中形成的全零行移动到第1行中。其余的取值为0的乘子(对应紧约束),若对应的是机组/负荷上下限约束(个数记为 N_{0b}),则删去矩阵 C_1 中相应系数列,将右下角单位矩阵 E 中被删去的1对应的行移动到由虚线划分的第2部分中去;若对应的是线路潮流约束(个数记为 $N_{0\mu}$,即阻塞线路对应的乘子中取零的个数),直接删去矩阵 C_1 中相应系数列,则矩阵 C_1 变为:

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \ddot{C} & 0 \\ M & E \end{bmatrix} \quad (15)$$

C_2 的维数为 $(N_L+3N_G+3N_D) \times (1+N_L+2N_G+2N_D-N_0)$,其中,第3行仍然是满行秩的,且调整后的矩阵 $\ddot{C}$ 区别于矩阵 $\dot{C}$,维数为 $(N_m+N_{0b}) \times (1+N_\mu-N_{0\mu})$,矩阵 M 为调整后的系数子矩阵。由线性系统(式(5)和式(6))有唯一解,易证删除 N_0 个乘子并调整系数矩阵与右侧常数向量后,所得线性方程组为:

$$C_2 X' = \beta' \quad (16)$$

式中: X' 和 β' 分别为调整后的乘子向量与右侧常数向量。

式(16)有唯一解,即矩阵 C_2 满列秩,可得:

$$\text{rank}(C_2) = 1 + N_L + 2N_G + 2N_D - N_0 \quad (17)$$

则矩阵 $\ddot{C}$ 满列秩,即

$$\text{rank}(\ddot{C}) = 1 + N_\mu - N_{0\mu} \quad (18)$$

根据文献[25],除满足条件式(18)外,对偶问题有唯一解的条件还应补充线性系统 S_1 无解。线性系统 S_1 可构造为:

$$S_1 \triangleq \begin{cases} C_\lambda \lambda + C_+ Y_+ + C_0 Y_0 = 0 \\ Y_0 \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

式中: (Y_+, Y_0) 为紧约束对应的乘子向量, Y_0 中的元素不全为0;以 Y^* 中取值是否为零分类; $[C_\lambda, C_+, C_0]$ 为 C_1 删去松约束对应乘子的系数列,删去全零行,并根据 (Y_+, Y_0) 调整各列顺序后所得矩阵,其维数为 $(N_G+N_D) \times (1+N_G+N_D-N_m+N_\mu)$ 。

综上所述,式(1)最优解退化的情况下,若符合条件(式(18))且线性系统 S_1 无解,则对偶问题(即

线性系统(式(6)和式(7)))仍是有唯一解的,否则,对偶问题多解。

2.2 对偶问题多解与节点电价多解

基于节点电价计算式(2),可将KKT方程组,即线性方程组(6)改为如式(20)形式以便讨论。

$$\begin{cases} \rho_{f_{Gg}} = -\lambda - \sum_{l=1}^{N_g} \mu_l T_{l,f_{Gg}} = \lambda_{Gg} + \tau_g & g=1, 2, \dots, N_G \\ \rho_{f_{Dd}} = -\lambda - \sum_{l=1}^{N_D} \mu_l T_{l,f_{Dd}} = \lambda_{Dd} - \xi_d & d=1, 2, \dots, N_D \end{cases} \quad (20)$$

式中: $\rho_{f_{Gg}}$ 为机组 g 所在节点的电价; $\rho_{f_{Dd}}$ 为负荷 d 所在节点的电价; λ_{Gg} 为机组 g 申报价格; λ_{Dd} 为负荷 d 申报价格; τ_g 与 ξ_d 表示KKT方程组中与机组/负荷功率上下限约束相关的部分(为多个乘子的线性组合),其具体数值如下。

$$\tau_g = \begin{cases} \hat{\tau}_g & P_{Gg}^* = \bar{P}_{Gg} \\ -\check{\tau}_g & P_{Gg}^* = \underline{P}_{Gg} \\ 0 & \underline{P}_{Gg} < P_{Gg}^* < \bar{P}_{Gg} \end{cases} \quad (21)$$

$$\xi_d = \begin{cases} \hat{\xi}_d & P_{Dd}^* = \bar{P}_{Dd} \\ -\check{\xi}_d & P_{Dd}^* = \underline{P}_{Dd} \\ 0 & \underline{P}_{Dd} < P_{Dd}^* < \bar{P}_{Dd} \end{cases} \quad (22)$$

显然,节点电价多解时,对偶问题必定是多解的。然而,对偶问题是多解的,即线性系统(式(6)和式(7))多解,并不意味着每个对偶变量都是多解的。换言之,在KKT方程组中,虽然乘子向量是多解的,但是仍可能存在其中部分乘子是唯一的。这时,有可能在对偶问题多解的情况下,仍然得到节点电价唯一的结论。从式(20)可以看出,只要每个方程中的乘子 τ_g 或 ξ_d 的取值是唯一的,那么即使KKT方程组是多解的,节点电价也是唯一的。删去矩阵 C_1 中松约束对应的乘子系数列,并去掉全零行,系数矩阵变为:

$$C_4 = \begin{bmatrix} \dot{I}_{N_{mG} \times 1} & \dot{T}_{G, N_{mG} \times N_g} & 0 & 0 \\ -\dot{J}_{N_{mD} \times 1} & \dot{T}_{D, N_{mD} \times N_g} & 0 & 0 \\ \hline \tilde{I}_{N_{nmG} \times 1} & \tilde{T}_{G, N_{nmG} \times N_g} & E_{N_{nmG}} & 0 \\ \tilde{J}_{N_{nmD} \times 1} & \tilde{T}_{D, N_{nmD} \times N_g} & 0 & E_{N_{nmD}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{C} & 0 \\ \hline \tilde{C} & E \end{bmatrix} \quad (23)$$

式中: N_{nmG} 和 N_{nmD} 分别为非边际机组和负荷的数量; $\tilde{I}$ 为元素为1的列向量,对应位置的机组处于功率上限时,取1,否则取-1; $\tilde{J}$ 表示元素为1的列向

量,对应位置的负荷处于功率上限时,取-1,否则取1; $\tilde{T}_G$ 与 $\tilde{T}_D$ 分别为非边际机组、非边际负荷与阻塞线路对应的功率转移分布系数。子矩阵 $\dot{C}$ 与条件式(14)中一致,维数为 $N_m \times (N_\mu + 1)$,子矩阵 $\tilde{C}$ 维数为 $(N_G + N_D - N_m) \times (N_\mu + 1)$ 。

设与系数矩阵 C_4 中虚线左侧部分对应的乘子向量为 u (包括乘子 λ 和阻塞线路对应的 μ),右侧部分对应的乘子向量为 v (各非边际单元的紧界限约束对应的乘子为 τ_g 和 ξ_d),设某一组解为 (u^0, v^0) , u^0 中取值为零的乘子(不包括 λ)下标集合为 A_u , v^0 中取值为零的乘子下标集合为 A_v 。则有线性方程组为:

$$\begin{cases} \dot{C}u = \beta_1'' \\ \tilde{C}u + Ev = \beta_2'' \end{cases} \quad (24)$$

在对偶问题多解的情况下,若节点电价有唯一值,那么式(24)中的向量 v 应该有唯一解。构建线性系统为:

$$S_2 \triangleq \begin{cases} \dot{C}\Delta u = 0 \\ \tilde{C}\Delta u + E\Delta v = 0 \\ \Delta v \neq 0 \\ \Delta u_i \geq 0 \quad i \in A_u \\ \Delta v_j \geq 0 \quad j \in A_v \end{cases} \quad (25)$$

式中: Δu 与 Δv 分别为现有对偶问题最优解上的变化量。

向量 v 有唯一解等价于上述系统 S_2 无解。进一步,从系统 S_2 的结构特点可以得到向量 v 有唯一解的一个充分条件,可以在一定程度上简化判断,即

$$\text{rank}(\dot{C}) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \dot{C} \\ \tilde{C} \end{bmatrix}\right) \quad (26)$$

当条件式(26)成立时,显然系统 S_2 无解。

2.3 节点电价多解判定机理

综合2.1节和2.2节分析可知,退化、对偶问题多解和节点电价多解之间的关系为:退化是对偶问题多解的必要非充分条件,对偶问题多解则是节点电价多解的必要非充分条件。具体关系及补充条件如图2所示。

由此可得,大多数文献所提的退化并不能直接导致节点电价多解,而只是电价多解的一个必要条件。节点电价多解情况发生的数学逻辑与条件为:首先需要原问题最优解退化;然后需要最优解统计数据不满足条件式(18)或系统 S_1 有解,从而对偶问题多解;进一步还需要系统 S_2 也有解,最终导致节点电价多解。上述数学逻辑与条件构成了节点电价多解的判定机理,即依据提出的数学条件,逐步判定

退化、对偶问题多解与节点电价多解,或经层层验证得到节点电价多解的结论,或通过短路求值提前跳出判定,得到节点电价唯一的结论。由于所得退化、对偶问题多解与节点电价多解之间的数学关系与补充条件是明确且严格的,故该判定机理是严谨而完备的。

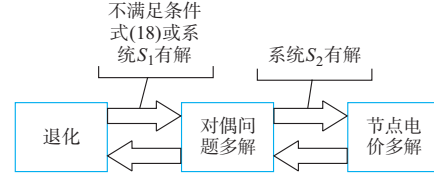


图2 退化、对偶问题多解与节点电价多解关系
Fig.2 Relationships among degeneracy, multiple solutions of coupling problems and node electricity price

3 电价多解完整判定流程

根据所得判定机理,本文给出了节点电价多解的完整判定流程。严格的节点电价多解的完整判定流程应该包括退化判定、对偶问题多解判定和节点电价多解判定3个部分。

退化判定:若原问题最优解满足条件式(4),则该最优解退化,进入对偶问题多解判定;否则,对偶问题有唯一解,节点电价唯一,提前结束判定。

对偶问题多解判定:若不满足条件式(18)或系统 S_1 有解,则对偶问题多解,进入节点电价多解判定;否则,对偶问题有唯一解,节点电价唯一,提前结束判定。

节点电价多解判定:若系统 S_2 有解,则节点电价多解;否则,节点电价唯一。结束判定。

同时,为了改善退化判定,即条件式(4),只适用于极点最优解的不足(内点法等算法求取的最优解不一定是极点解),实际应用中可将其替换为条件式(14)。其中,系统 S_1 与 S_2 的解的存在性可采用Cplex等商业解优化软件来快速判别,即分别以系统 S_1 与 S_2 为约束条件构造一目标函数为零的优化问题,并利用优化软件对优化问题可行性的输出信息来判别相应系统是否有解。具体判定流程图如图3所示。

由图3可以直观地看到,目前已有的判定方法均只是完整判定流程中的一部分。一方面,退化只是电价多解的一个必要条件。因而基于最优单纯形表的退化判定无法准确判定电价是否多解,其只是完整判定流程的一部分(第1个判定)。另一方面,根据本文第2章分析,基于LICQ的对偶问题多解判定^[19]中对于电价多解的判定条件即为本文中的条件式(14),而条件式(14)仅是KKT条件中线性方程

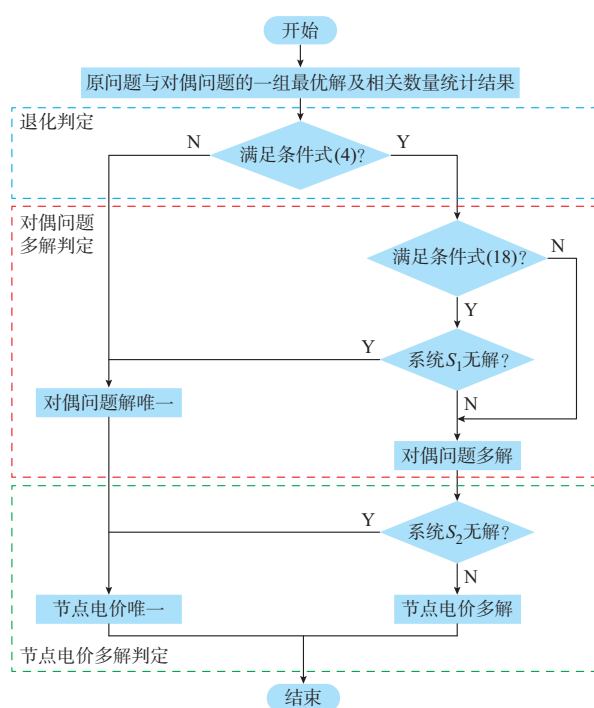


图3 节点电价多解完整判定流程图
Fig.3 Flow chart of complete judgment process of multiple solutions of electricity price for node

组部分多解的条件。即该判定条件并非对偶问题多解的充要条件,更不是节点电价多解的充要条件,直接作为节点电价多解的判据显然是不严谨的。

4 算例分析

4.1 方法对比分析

本文采用以下两节点与三节点算例对比分析各判定方法,即单纯形表方法与LICQ方法以及本文所提完整判定方法。

4.1.1 节点电价多解

三节点算例参数^[17,19]如表1所示。三节点系统

如图 4 所示。

表1 机组/负荷基本参数
Table 1 Basic parameters of units/loads

内容	编号	机组容量/ MW	负荷需求/ MW	报价/ (美元·MW ⁻¹)
机组	1	1 000		15
	2	300		20
	3	500		35
负荷	1		700	60
	2		200	40
	3		200	25

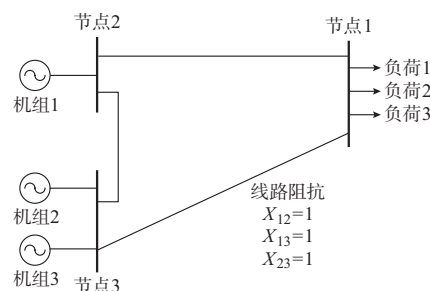


图4 三节点系统
Fig.4 Network topology of 3-node system

线路12容量约束为500 MW。解优化问题,可以得到最优解 $(P_{G1}, P_{G2}, P_{G3}, P_{D1}, P_{D2}, P_{D3}) = (600 \text{ MW}, 300 \text{ MW}, 0, 700 \text{ MW}, 200 \text{ MW}, 0)$ 。

1) 单纯形表方法

利用单纯形法求解市场出清问题,可得如下最优单纯形表。其中 s_1 至 s_8 均为松弛变量,RHS表示单纯形表右端值(right-hand-side value), f 为目标函数值。可以看到,存在基变量(P_{D2} 需求上限约束对应的松弛变量 s_8)取值为零,因而最优解退化。根据引言中提及的部分业内人士看法,此时应出现节点电价多解情况。

表 2 最优单纯形表
Table 2 Optimal simplex tableau

参数	P_{G1}	P_{G2}	P_{G3}	P_{D1}	P_{D2}	P_{D3}	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	RHS
P_{G1}	1		0.5			0	1.5				-0.5		0			600
P_{G2}		1	0			0	0				1.0		0			300
P_{D1}			0	1		0	0				0		1			700
P_{D2}			-0.5		1	1.0	1.5				0.5		-1			200
s_2			0.5			0	-0.5	1			-0.5		0			1 600
s_3			-0.5			0	-0.5		1		0.5		0			1 900
s_4			-0.5			0	-1.5			1	0.5		0			400
s_6			1.0			0	0				0	1	0			500
s_8			0.5			-1.0	-1.5				-0.5		1	1		0
s_9			0			1.0	0				0		0		1	200
f			-7.5			-1.5	-37.5				-7.5		-20			35 000

2) LICQ方法

该最优解下,只有机组1是边际机组, $N_m = 1$; 线路12发生阻塞, $N_\mu = 1$ 。因此, $N_m < N_\mu + 1$, 根据文献[19]中基于LICQ的判定方法,此时对偶问题多解,存在节点电价多解情况。

3) 完整判定方法

退化判定:沿用前一判定中的统计数据, $N_m < N_\mu + 1$, 符合条件式(4),原问题最优解退化。

对偶问题多解判定:原问题最优解退化,可知符合条件式(14),KKT条件中的方程组部分,即式(6),有多重解。有一组对偶问题最优解。

$$\begin{cases} \lambda = -25 \\ \mu_1 = 15 \\ \hat{\tau}_2 = 0 \\ \check{\tau}_3 = 15 \\ \hat{\xi}_1 = 35, \hat{\xi}_2 = 15, \check{\xi}_3 = 0 \\ \mu_2 = \mu_3 = \hat{\tau}_1 = \check{\tau}_1 = \check{\tau}_2 = \hat{\tau}_3 = \check{\xi}_1 = \check{\xi}_2 = \hat{\xi}_3 = 0 \end{cases} \quad (27)$$

当 $N_{0\mu} = 0, N_{0b} = 2$ 时,矩阵 $\tilde{C}$ 为:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

可得:

$$\text{rank}(\tilde{C}) = 2 = 1 + N_\mu - N_{0\mu} \quad (29)$$

矩阵 $\tilde{C}$ 满列秩,满足条件式(18)的线性系统,即

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ Y_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Y_0 = 0 \right\} \quad (30)$$

其中, $Y_+ = [\mu_1, \check{\tau}_3, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2]^T$, $Y_0 = [\hat{\tau}_2, \check{\xi}_3]^T$, $Y_0 \geq 0$, 且 Y_0 中元素不全为0,线性系统 S_1 有解 $(Y_+^T, Y_0^T) = (3, -1, -2, -2, 1, 2)$, 由此可知对偶问题多解。

节点电价多解判定:计算可得,系统 S_2 中, $\dot{C}$ 和 $\tilde{C}$ 的取值分别见式(31)和式(32)。

$$\dot{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

有解 $\Delta u = [-2, 3]$, $\Delta v = [1, -1, -2, -2, 2]$, 可知此时节点电价多解。

综上可得,该算例中,原问题最优解退化,对偶问题多解,节点电价也是多解的。与前述2种判定方法结果一致。

4.1.2 节点电价唯一(其一)

构造一个简单两节点电气系统结构及各项基本信息如图5所示。

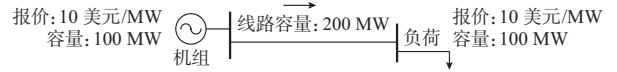


图5 两节点系统的网络拓扑和基本信息
Fig.5 Network topology and basic information of 2-node system

求解优化问题可以得到原问题的最优解 $(P_G, P_D) = (100 \text{ MW}, 100 \text{ MW})$ 。需要指出的是,由于上一算例中已充分展示各判定方法的计算方式,后续将简略展示关键判据,而更多聚焦于判定结果。

1) 单纯形表方法:最优单纯形表中存在基变量为零(P_{G_g} 出力上限约束对应的松弛变量),故判定结果为节点电价多解。

2) LICQ方法: $N_\mu = 0, N_m = 0, N_m < N_\mu + 1$, 故判定结果为节点电价多解。

3) 完整判定方法:① $N_m < N_\mu + 1$, 满足条件式(4),原问题最优解退化;② 满足条件式(18),而线性系统 S_1 无解,对偶问题有唯一解;③ 故判定结果为节点电价唯一。

由于本算例中机组、负荷与线路数量均为1,因而KKT方程组(式(6)和式(7))中的乘子向量均变化为标量形式,可列出相应的KKT条件来进行验证,即

$$\begin{cases} 10 + \lambda + \hat{\tau} = 0 \\ -10 - \lambda + \hat{\xi} = 0 \\ \check{\tau} = \check{\xi} = \mu = 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} \hat{\tau} \geq 0 \\ \check{\xi} \geq 0 \end{cases} \quad (34)$$

式(33)和式(34)中有3个待解变量,2个相关等式。但求解可知,尽管式(33)是多解的,由于式(34)中的非负约束,线性系统式(33)和式(34)最终只有1个解,即对偶问题有唯一解。

综上可得,该算例中,虽然原问题最优解是退化的,但对偶问题仍然只有唯一最优解,而节点电价也是唯一确定的。此时,单纯形表方法与LICQ方法的判定结果均不正确。原因在于这2种方法的判定机理都是存在缺陷的,单纯形表方法本质上只能判断原问题最优解是否退化,而LICQ方法仅能判断KKT方程组(式(33))是否多解,本例中在判断对偶问题是否多解这一步就已失效。

4.1.3 节点电价唯一(其二)

调整算例4.1.1节中三节点算例的部分参数,如表3所示,线路容量约束如表4所示。可以得到一种对偶问题多解,但节点电价仍是唯一的特殊情况。

表3 调整后的机组/负荷基本参数
Table 3 Basic parameters of units/loads after adjusted

内容	编号	机组容量/ MW	负荷需求/ MW	报价/(美元· MW ⁻¹)
机组	1	1 000		15
	2	300		20
	3	500		35
负荷	1		640	60
	2		250	40
	3		200	25

表4 线路容量约束
Table 4 Constraints of line capacity

线路编号	首末端节点	容量约束/MW	线路编号
1	1-2	500	1
2	1-3	340	2
3	2-3	160	3

求解优化问题可得最优解($P_{G1}, P_{G2}, P_{G3}, P_{D1}, P_{D2}, P_{D3}$)=(600 MW, 180 MW, 0, 640 MW, 200 MW, 0)。

1)单纯形表方法:最优单纯形表中存在基变量为零(线路23潮流约束对应的松弛变量),故判定结果为节点电价多解。

2)LICQ方法: $N_m=3, N_\mu=3, N_m < N_\mu + 1$,故判定结果为节点电价多解。

3)完整判定方法:① $N_m < N_\mu + 1$,满足条件式(4),原问题最优解退化;②不满足条件式(18),对偶问题多解;③满足条件式(26),线性系统 S_2 无解,故判定结果为节点电价唯一。

通过KKT条件可以计算出唯一的节点电价数值为:

$$\begin{cases} \rho_1 = -\lambda = 40 \\ \rho_2 = -\lambda - \frac{2}{3}\mu_1 - \frac{1}{3}\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_3 = 15 \\ \rho_3 = -\lambda - \frac{1}{3}\mu_1 - \frac{2}{3}\mu_2 + \frac{1}{3}\mu_3 = 20 \end{cases} \quad (35)$$

综上可得,该算例中,尽管原问题最优解是退化的,对偶问题也存在多解,而节点电价仍是唯一确定的。此时,单纯形表方法与LICQ方法的判定结果均不正确。该算例中,LICQ方法虽然准确判断出对偶问题多解,但仍无法正确判定节点电价是否多解,进一步体现出该方法判定机理的不足。

4.2 有效性与适应性验证

为了验证所提方法的普遍有效性与适应性,本文对文献[20]中的算例进行了计算。表5中为8种不同场景的关键参数设置,其中除了场景7外,其余场景参数设置与文献[20]完全一致。场景7基于MATPOWER中算例“case24_ieee_rts”的原始参数^[26],相应报价信息则仍与场景6相同。场景8的参数设置与MATPOWER中算例“case2383wp”原始参数保持一致^[27]。各场景计算结果如表6所示,与文献[19-20]相互对比可知节点电价多解判定正确有效。各场景下的计算时间均能满足较短的调度间隔,可适应实时电力市场要求(计算环境:处理器为i5-8250U,内存为8 GB,操作系统为Windows 10,计算软件为MATLAB 2016a)。

表5 各场景参数设置
Table 5 Parameter settings of each scenario

场景	测试系统	参数
1	2-node	$\bar{F}_1 = 100$ MW
2	2-node	$\bar{F}_1 = 200$ MW
3	3-node	$\bar{F}_1 = 2\,000$ MW
4	3-node	$\bar{F}_1 = 500$ MW
5	3-node	$\bar{F}_1 = 500$ MW $\bar{P}_{D1} = 640$ MW $\bar{P}_{G12} = 98.44$ MW
6	24-node	$\bar{P}_{G13} = \bar{P}_{G14} = 98.43$ MW $\lambda_{G12} = \lambda_{G13} = \lambda_{G14} = 38.5$ 美元/MW
7	24-node	$\bar{P}_{G12} = \bar{P}_{G13} = \bar{P}_{G14} = 197$ MW, $\lambda_{G12} = \lambda_{G13} = \lambda_{G14} = 38.5$ 美元/MW
8	2383-node	λ_{G1} 至 λ_{G161} 取值为38.5 美元/MW, λ_{G162} 至 λ_{G323} 取值为39 美元/MW, $\lambda_D = 40$ 美元/MW

表6 各场景电价多解情况
Table 6 Multiple solutions of electricity price for each scenario

场景	测试系统	N_m	N_n	是否退化	对偶是否多解	电价是否多解	计算时间/s
1	2-node	0	1	Y	Y	Y	0.490 0
2	2-node	0	0	Y	Y	Y	0.500 0
3	3-node	1	0	N	N	N	0.500 0
4	3-node	1	1	Y	Y	Y	0.490 0
5	3-node	2	1	N	N	N	0.006 7
6	24-node	0	0	Y	Y	Y	0.754 3
7	24-bus	1	1	Y	Y	Y	0.702 2
8	2383-node	2	1	N	N	N	0.067 2

注:表中Y表示是,N表示否。

5 结语

实时市场中电价多解造成的出清困难引发了对快速判定的需求,结合市场出清问题的数理特征,本文对节点电价多解情况的判定机理进行了深入研究。分析中对退化、对偶问题多解与节点电价多解三者之间关系的明确反映出当前对于电价多解问题的代称或描述都是不准确的,如对偶问题多解、“退化价格”与“对偶退化”等。基于所得判定机理,本文提出了节点电价多解情况的完整判定流程。该判定流程具有很好的理论价值与一定的实用价值,为在实时市场中准确有效地确定节点电价的多解情况提供了理论依据。后续研究中将致力于结合判定方法与定价方法,以形成电价多解问题的应用级综合解决方案。

衷心感谢国家能源智能电网(上海)研发中心对本文研究工作的支持。

参考文献

- [1] PJM. Manual11: energy & ancillary services market operations [EB/OL]. [2018-03-22]. <http://www.pjm.com/library/manuals.aspx>.
- [2] CAISO. Business practice manual for market operations [EB/OL]. [2018-03-22]. <http://www.caiso.com/rules/Pages/BusinessPracticeManuals/Default.aspx>.
- [3] ISO-NE. ISO New England manual for market operations manual M-11 [EB/OL]. [2018-03-22]. <http://www.iso-ne.com/library>.
- [4] 罗钢,马辉,陈晔,等.南方(以广东起步)电力现货市场模拟运行分析[J].南方电网技术,2018,12(12):49-54.
LUO Gang, MA Hui, CHEN Ye, et al. Analysis of simulation operation of electricity spot market in Southern China (starting from Guangdong province) [J]. Southern Power System Technology, 2018, 12(12): 49-54.
- [5] 南方能源监管局,广东省经济和信息化委,广东省发展改革委.关于征求南方(以广东起步)电力现货市场系列规则意见的通知 [EB/OL]. [2019-07-15]. <http://nfj.nea.gov.cn/adminContent/initViewContent.do?pk=402881e56579be6301658d7123c2001a>. Southern Energy Administration, Department of Industry and Information Technology of Guangdong Province, Guangdong Provincial Development and Reform Commission. Notice on soliciting opinions on the series of rules for the spot electricity market in the south (starting from Guangdong) [EB/OL]. [2019-07-15]. <http://nfj.nea.gov.cn/adminContent/initViewContent.do?pk=402881e56579be6301658d7123c2001a>.
- [6] 山东能源监管办,山东省发展改革委,山东省能源局.关于征求《山东省电力现货市场交易规则》《山东省电力中长期市场交易规则》(征求意见稿)意见的通知 [EB/OL]. [2019-07-15]. <http://www.cnea.gov.cn/new/2019-6/201961215330.htm>. Shandong Energy Supervision Office of National Energy Administration, Shandong Provincial Development and Reform Commission, Energy Administration of Shandong province. Notice on soliciting opinions on "Shandong spot electricity market trading rules" and "Shandong province power medium and long-term market trading rules" (draft for comment) [EB/OL]. [2019-07-15]. <http://www.cnea.gov.cn/new/2019-6/201961215330.htm>.
- [7] 陈宝林.最优化理论与算法[M].北京:清华大学出版社,2005.
CHEN Baolin. Optimization theory and algorithm [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2012.
- [8] AKGÜL M. A note on shadow prices in linear programming [J]. Journal of the Operational Research Society, 1984, 35(5): 425-431.
- [9] GAL T. Shadow prices and sensitivity analysis in linear programming under degeneracy [J]. Operations-Research-Spektrum, 1986, 8(2): 59-71.
- [10] HOGAN W W. Multiple market-clearing prices, electricity market design and price manipulation [J]. The Electricity Journal, 2012, 25(4): 18-32.
- [11] MADRIGAL M, QUINTANA V H. Degeneracy and duality gap on optimization-based electricity auctions [C]// International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies (DRPT 2000), April 4-7, 2000, London, UK: 332-337.
- [12] 冯冬涵,甘德强,钟金,等.电力市场出清电价的非惟一性及定价新方法[J].电力系统自动化,2006,30(12):27-32.
FENG Donghan, GAN Deqiang, ZHONG Jin, et al. Pricing when market optimization has multiple dual solutions [J]. Automation of Electric Power Systems, 2006, 30(12): 27-32.
- [13] FENG D H, XU Z, ZHONG J, et al. Spot pricing when Lagrange multipliers are not unique [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(1): 314-322.
- [14] ALGUACIL N, ARROYO J M, GARCIA-BERTRAND R. Optimization-based approach for price multiplicity in network-constrained electricity markets [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2013, 28(4): 4264-4273.
- [15] 周全,冯冬涵,方陈,等.对偶问题多解情况下一种基于激励的节点电价确定方法[J].电力系统自动化,2014,38(13):38-44.
ZHOU Quan, FENG Donghan, FANG Chen, et al. An incentive-based nodal pricing method under multiple dual solutions [J]. Automation of Electric Power Systems, 2014,

- 38(13): 38-44.
- [16] CAISO. Pricing enhancements: issue paper and straw proposal [EB/OL]. [2018-03-22]. http://www.caiso.com/Documents/IssuePaper_StrawProposal-PricingEnhancementsJul7_2014.pdf.
- [17] ZHANG L, FENG D H, LEI J Y, et al. Congestion surplus minimization pricing solutions when Lagrange multipliers are not unique[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2014, 29(5): 2023-2032.
- [18] HOBBS B F. Finding unique prices under degeneracy [EB/OL]. [2018-03-22]. http://www.caiso.com/Documents/PricingEnhancementDiscussion-MSC_Presentation-Hobbs.pdf.
- [19] 丁阳之, 冯冬涵, 张良, 等. 节点电价多解情况的判定方法[J]. 中国电机工程学报, 2017, 37(3): 760-767.
DING Yangzhi, FENG Donghan, ZHANG Liang, et al. Identification method for nodal price multiplicity in electricity markets[J]. Proceedings of the CSEE, 2017, 37(3): 760-767.
- [20] FENG D H, LIU C, LIU Z Y, et al. Constraint qualification based detection method for nodal price multiplicity [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2017, 32(6): 4968-4969.
- [21] CORNÉLUSSE B. How the European day-ahead electricity market works [EB/OL]. [2019-07-25]. <http://www.montefiore.ulg.ac.be/~cornelusse/material/CoursEM20170331.pdf>.
- [22] GAN Deqiang, FENG Donghan, XIE Jun. Electricity markets and power system economics[M]. Boca Raton: CRC Press, 2013.
- [23] LITVINOV E. Design and operation of the locational marginal prices-based electricity markets [J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2010, 4(2): 315.
- [24] MANGASARIAN O L. Optimal simplex tableau characterization of unique and bounded solutions of linear programs [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1981, 35(1): 123-128.
- [25] MANGASARIAN O L. Uniqueness of solution in linear programming[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1979, 25: 151-162.
- [26] SUBCOMMITTEE U. The IEEE reliability test system-1996 [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1999, 14(3): 1010-1020.
- [27] ZIMMERMAN R D, MURILLO-SANCHEZ C E, THOMAS R J. MATPOWER: steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education [J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2011, 26(1): 12-19.

刘畅(1995—),男,硕士研究生,主要研究方向:电力市场。E-mail:liuchang301@sjtu.edu.cn

冯冬涵(1981—),男,通信作者,教授,博士生导师,主要研究方向:电力市场。E-mail:seed@sjtu.edu.cn

方陈(1983—),男,博士,高级工程师,博士生导师,主要研究方向:能源互联网多能互补规划与运行、分布式能源、储能、电动汽车、微电网规划与运行等。E-mail:fangc02@139.com

(编辑 鲁尔姣)

Judgment Mechanism of Multiple Solutions for Electricity Price in Real-time Market

LIU Chang^{1,2}, FENG Donghan^{1,2}, FANG Chen³

(1. School of Electronic Information and Electrical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. Key Laboratory of Control of Power Transmission and Conversion, Ministry of Education, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

3. Electric Power Research Institute of State Grid Shanghai Municipal Electric Power Company, Shanghai 200437, China)

Abstract: The emergence of multiple solutions for electricity price will bring difficulties to the clearing of the real-time market. It is necessary to theoretically study the occurrence conditions of happening and establish high efficient judgment method to improve real-time pricing efficiency. In this paper, the judgment mechanism of multiple solutions for electricity price is deeply analyzed and studied. Based on the physical and mathematical characteristics of market clearing problems, a clear and strict relationship between degeneracy, dual problem and multiple solutions of nodal electricity price is proposed. According to the obtained judgment mechanism, a complete and effective judgment process of the multiple solutions for electricity price is established. Finally, the comparison of the judgment methods and the validity and adaptability verification are carried out by the case study.

This work is supported by National Natural Science Foundation of China (No. 51677115), Shanghai Pujiang Program (No. 17PJJD018) and Morningstar Excellent Young Faculty Program of the Shanghai Jiao Tong University.

Key words: nodal electricity price; degeneracy; multiple dual solutions; multiple solutions of electricity price; judgment process

