状态估计中选取量测权值的新原则

李碧君[1]，薛禹胜[2]，顾锦汶[2]，韩祯祥[1]
(1. 浙江大学，杭州 310027；2. 电力自动化研究院，南京 210003)

摘要：估计结果的准确性和数值稳定性是状态估计的两个重要方面，通常按量测精度选取量测权值，能使估计结果有较高的准确性，但可能对数值稳定性不利。文中在分析量测权值变化对状态估计数值稳定性影响的基础上，提出了状态估计中选取量测权值的新原则：非关键量测的权值反映量测精度，以量测方差的倒数为其权值；关键量测的权值根据数值稳定性的要求选取，以其他量测权值的平均值为关键量测的权值。这样能较好地协调数值稳定性与估计结果准确性之间的关系。在附录中论述了估计精度与关键量测的权值无关。

关键词：电力系统；状态估计；量测权值；数值稳定性

中图分类号：TM 732

0 引言

数值稳定性好和估计结果的准确性高是电力系统实时状态估计软件充分发挥作用的重要保证。通常，在状态估计中对各量测量按其精度加权，精度高的量测量有较大的权重，使量测估计值接近精度高的量测值，通过让精度高的量测值在状态估计中起较大的作用，来提高估计的精度，依此，一般选取量测误差方差的倒数为量测的权值[1]。实际量测的精度可能有较大区别，节点注入功率为零的虚拟量测的量测误差方差为零；有时实时量测系统不可观测，需要补充伪量测才能进行实时状态估计，伪量测是根据历史数据和其他相关信息而产生的，伪量测的可信度与实际量测和虚拟量测相比要差得多[2,3]。因此，按上述原则选取量测权值，可能使量测权值相差悬殊，这是数值稳定性差的重要原因之一，为解决这一问题，已进行了许多研究[4~6]，但仍不尽人意。

需要求解的方程组的条件数是衡量状态估计数值稳定性优劣的指标，在分析评估算法的数值稳定性的优劣时，一般是比较各种方法求解方程组的条件数，从理论上而言，条件数小的算法数值稳定性优于条件数大的算法；从实际应用来看，迭代次数少的算法数值稳定性优于迭代次数多的方法，两者基本上是一致的。

本文在分析量测权值变化对状态估计数值稳定性的影响的基础上，考虑到关键量测的权值变化不影响状态估计的结果，兼顾状态估计的数值稳定性和估计结果的准确性研究了量测权值的选取问题，提出了状态估计中选取量测权值的新原则，非关键量测的权值反映量测精度，保证估计结果的准确性；关键量测的权值根据数值稳定性的要求选取。依此，在既不增加计算工作量，又不降低估计结果的准确性的前提下，有望改善状态估计的数值稳定性。

1 量测权值变化对数值稳定性的影响

电力系统状态估计中常用加权最小二乘法(weighted least squares，简称为 WLS)迭代求解以下线性最小二乘问题：

$$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}\Delta\boldsymbol{X}^k = \boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\Delta\boldsymbol{Z}^k \tag{1}$$

$$\boldsymbol{X}^{k+1} = \boldsymbol{X}^k + \Delta\boldsymbol{X}^k \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{H}$ 是 $m \times n$ 量测雅可比矩阵，定常迭代时不变；$\boldsymbol{R}^{-1} = \mathrm{diag}(r_1^{-1}, r_2^{-1}, \cdots, r_m^{-1})$，是量测权阵；$\Delta\boldsymbol{Z}^k$ 是量测不匹配矢量；$\Delta\boldsymbol{X}^k$ 是状态变量的增量；$\boldsymbol{X}^k$ 是状态变量的估计值；上标 k 和 $k+1$ 是迭代计数。

用正交变换法求解式(1)时，$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数是评估状态估计数值稳定性的重要依据，条件数愈小数值稳定性愈好。对列满秩的 $m \times n(m \geqslant n)$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，用奇异值定义的条件数为[7]：

$$\mathrm{Cond}(\boldsymbol{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \tag{3}$$

其中 σ_1 和 σ_n 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的最大和最小奇异值。

系统可观测时，$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 是列满秩矩阵。

1.1 关于奇异值的一个定理

作为文献[7]中定理 6.2.2 的特例有以下定理。

收稿日期：1999-12-31。
国家重点基础研究专项经费资助项目(G19980203)和国家电力公司科技项目(1999SKPJ010-20)。

定理　令 $m\times n$ 实数矩阵 $\boldsymbol{A}$(其中 $m>n$) 的奇异值为:$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n\geqslant 0$,则

$$\sigma_k=\min_{E}\{\|\boldsymbol{E}\|_2:\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\leqslant k-1\}\qquad(4)$$

$$k=1,2,\cdots,n$$

并且存在一满足 $\|\boldsymbol{E}\|_2=\sigma_k$ 的误差矩阵 $\boldsymbol{E}_k$,使得

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_k)=k-1\qquad k=1,2,\cdots,n$$

式(4)可看做是奇异值的定义式。

上述定理表明,奇异值与使得原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩减小 1 的 $\|\boldsymbol{E}_k\|_2$ 是等价的。

因此,可得到计算矩阵 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的最大奇异值 σ_1 和最小奇异值 σ_n 的表达式:

$$\sigma_1=\|\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}\|_2\qquad(5)$$

$$\sigma_n=\min_{E}\{\|\boldsymbol{E}\|_2:\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E})=n-1\}\qquad(6)$$

1.2　关键量测的权值对数值稳定性的影响

一个奇异矩阵的条件数为无穷大,而当条件数虽然不是无穷大,但却很大时,就称该矩阵是接近奇异的[7],反过来,一个矩阵愈接近奇异,其条件数也愈大。关键量测的权值偏离量测权值的平均值减小到一定程度后,再继续减小,可能使加权量测雅可比矩阵 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 愈接近奇异,因而其条件数愈大,不利于状态估计的数值稳定性。

不失一般性,假定量测 m 为关键量测,加权量测雅可比矩阵 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 可表示为:

$$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{m-1}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}_{m-1,n}\\ r_m^{-\frac{1}{2}}h_{m1}\ r_m^{-\frac{1}{2}}h_{m2}\ \cdots\ r_m^{-\frac{1}{2}}h_{mn}\end{bmatrix}\qquad(7)$$

若

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{m-1,n}\\ -r_m^{-\frac{1}{2}}h_{m1}\ -r_m^{-\frac{1}{2}}h_{m2}\ \cdots\ -r_m^{-\frac{1}{2}}h_{mn}\end{bmatrix}\qquad(8)$$

则

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}_n)=n-1\qquad(9)$$

假设量测 m 的权值较正常量测的权值小,当 r_m^{-1} 足够小,使

$$\|\boldsymbol{E}_n\|_2=\min_{E}\{\|\boldsymbol{E}\|_2:\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})=n-1\}\qquad(10)$$

成立时,可得到下式:

$$\sigma_n=\|\boldsymbol{E}_n\|_2=r_m^{-\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{n}h_{mj}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\qquad(11)$$

这时 σ_n 与 $r_m^{-\frac{1}{2}}$ 成比例关系,若关键量测 m 的权值 r_m^{-1} 进一步减小,且其他量测的权值不变,σ_n 将以比例系数 $r_m^{-\frac{1}{2}}$ 减小,此时,σ_1 会有一定变化,但减小幅度比按比例系数 $r_m^{-\frac{1}{2}}$ 减小要小。因此,随着关键量测 m 权值 r_m^{-1} 的减小,$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数 σ_1/σ_n 增大。

上述分析表明,关键量测的权值同其他量测的权值相比过小时不利于状态估计的数值稳定性。下面分析关键量测的权值同其他量测的权值相比很大时对状态估计数值稳定性的影响情况。

从式(5)可看出,当关键量测的权值从量测权值的平均值开始变大时,最大奇异值 σ_1 也变大。从式(6)可看出,关键量测的权值从量测权值的平均值开始变大的过程中,在起始阶段,最小奇异值 σ_n 可能变大,但当关键量测的权值增大到一定程度时,继续增大关键量测的权值,σ_n 不再变化。因此,当关键量测的权值从各量测权值的平均值开始变大时,$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数总体变化趋势是变大,虽然在起始阶段可能不明显,甚至有变小的情况,这意味着关键量测的权值同其他量测的权值相比过大时,状态估计的数值稳定性变差。

综上所述,关键量测的权值同其他量测的权值相比过大或过小都不利于状态估计的数值稳定性,关键量测的权值与其他量测权值的平均值比较接近时状态估计的数值稳定性较好。

1.3　非关键量测的权值对数值稳定性的影响

非关键量测的权值偏离量测权值的平均值减小对状态估计数值稳定性的影响情况比较复杂,减小非关键量测的权值,$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数有可能增大,也可能减小,下面对此进行简单讨论。

由式(6)计算 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的最小奇异值 σ_n,对某一个量测 m,对于 σ_n 的误差阵 $\boldsymbol{E}$ 有以下 2 种可能:

a. $\boldsymbol{E}$ 中对应量测 m 的第 m 行元素不全为零,此时非关键量测 m 的权值 r_m^{-1} 的减小,会使 σ_n 减小。当量测 m 是关键量测集(critical set)中的量测时,这种可能性比较大。关键量测集是指一组由非关键量测构成的集合,去掉其中任一量测后,其他量测都成为关键量测。

b. $\boldsymbol{E}$ 中对应量测 m 的第 m 行元素全为零,此时非关键量测 m 的权值 r_m^{-1} 减小,σ_n 的值不变。

由式(5)计算 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的最大奇异值 σ_1,非关键量测的权值减小时,σ_1 都会变小。在非关键量测的权值变小,最小奇异值 σ_n 变小时,σ_n 的变化率大于 σ_1 的变化率。

由上述分析,量测属于情况 a 时,其权值变小,$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数变大,对状态估计的数值稳定性有不良影响;如果属于情况 b,则 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数变小,有利于状态估计的数值稳定性。

关于非关键量测的权值偏离量测权值平均值增大对状态估计数值稳定性的影响,可用式(5)和式(6)进行分析,得出与关键量测权值偏离量测权值

平均值增大对状态估计数值稳定性的影响相同的结论，即：当非关键量测的权值从各量测权值的平均值开始变大时，$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数总体变化趋势是变大，虽然在起始阶段可能不明显，甚至有变小的情况，这意味着非关键量测的权值同其他量测的权值相比过大时，状态估计的数值稳定性变差。

综上所述，非关键量测的权值与量测权值平均值相比过大时，不利于状态估计的数值稳定性，非关键量测的权值同量测权值平均值相比过小时，可能有利于状态估计的数值稳定性，亦可能不利于状态估计的数值稳定性，即具有不确定性。

2 算例

本文测试 IEEE-14 节点系统的量测配置为：节点 1 有电压幅值量测，关键量测有节点 9，10，12，13 和 14 的注入量测及支路 6-11 和 7-8 的潮流量测，非关键量测有节点 1～节点 4 的注入量测及支路 1-2，5-1，4-7 和 9-7 的潮流量测，有功量测和无功量测成对配置。除非特别说明，量测的权值均为 1.0。从表 1 可知：无论关键量测的权值偏离其他量测权值是减小还是增大，$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数的变化趋势是增大，虽然有的在开始时变化不太明显，但在关键量测的权值大于 10^2 或小于 10^{-3} 时 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数明显大于关键量测的权值为 1.0 时 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数，多数关键量测的权值大于 10^2 或小于 10^{-2} 时 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数就有明显变化，说明关键量测的权值同其他量测的权值相比过小或过大都对数值稳定性不利。从表 2 可知：在非关键量测的权值大于 10^2 时 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数明显增大，有的非关键量测的权值小于 10^{-1} 时 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数明显增大，如支路 4-7 和 9-7 的潮流量测；有的非关键量测的权值小于其他量测的权值时 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数有所变小，如节点 4 的注入量测；有的非关键量测的权值小于其他量测的权值时 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数没有明显变化，如支路1-2的潮流量测。可见非关键量测的权值同其他量测的权值相比过大时会使状态估计的数值稳定性变差，而非关键量测的权值同其他量测的权值相比较小时对状态估计数值稳定性影响的优劣具有不确定性。

3 选取量测权值的新原则

上述理论分析和算例都表明：关键量测的权值和非关键量测的权值与其他量测权值相比过大对状态估计的数值稳定性不利；关键量测的权值偏离其他量测权值的平均值而减小，减小到一定程度后，对状态估计的数值稳定性有不良影响；非关键量测的权值偏离其他量测权值的平均值而减小，对状态估计的数值稳定性影响的优劣具有不确定性。因此，若从数值稳定性的角度选取量测的权值，所有量测的权值相差不大时比较好。为提高状态估计的精度，应让精度高的量测值在状态估计中起较大的作用，使量测估计值接近精度高的量测值。因此，若按估计结果准确性的需要选取量测的权值，应按量测量的精度确定其权值。所以，根据数值稳定性确定选取量测权值的原则可能不利于估计结果的准确性，反过来，根据估计结果的准确性确定选取量测权值的原则也可能不利于数值稳定性。

表 1 IEEE-14 节点系统关键量测的权值和 $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数

Table 1 Weight of critical measurement and condition number of $\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ of IEEE-14 bus system

量测	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1.0	10	10^2	10^3	10^4	10^5
P_9	6 305.63	1 994.69	632.94	206.93	84.78	61.71	115.01	354.94	1 119.67	3 539.78	11 193.48
P_{10}	4 336.64	1 372.33	437.00	147.75	72.58	61.71	86.28	256.11	804.88	2 543.70	8 042.41
P_{12}	1 579.23	500.11	160.65	68.33	62.09	61.71	61.67	170.23	537.76	1 700.37	5 377.07
P_{13}	1 228.18	388.53	123.42	62.13	61.73	61.71	70.55	221.89	701.30	2 217.59	7 012.61
P_{14}	4 003.72	1 266.64	402.29	133.32	67.51	61.71	61.24	99.92	307.75	970.88	3 069.42
$P_{6\text{-}11}$	3 956.84	1 251.81	397.71	132.23	67.61	61.71	61.21	86.06	270.52	854.95	2 703.44
$P_{7\text{-}8}$	2 833.00	895.96	283.59	90.83	61.86	61.71	61.73	98.33	308.22	973.94	3 079.66
Q_9	6 881.12	2 176.60	690.25	224.35	88.45	61.02	111.77	344.61	1 086.98	3 436.44	10 866.71
Q_{10}	4 783.98	1 513.70	481.44	160.91	74.63	61.02	80.74	238.01	737.55	2 362.32	7 470.32
Q_{12}	2 484.34	786.10	250.16	86.62	62.15	61.02	60.92	100.41	317.33	1 003.43	3 173.13
Q_{13}	1 537.77	486.39	154.18	61.84	61.05	61.02	61.01	166.02	524.79	1 659.46	5 247.90
Q_{14}	4 482.06	1 417.83	449.88	147.47	68.75	61.02	60.40	87.75	268.83	847.97	2 680.27
$Q_{6\text{-}11}$	4 513.41	1 427.77	453.18	148.97	69.50	61.02	60.31	75.06	236.14	746.36	2 360.07
$Q_{7\text{-}8}$	2 602.65	823.10	260.53	83.50	61.10	61.02	61.07	105.81	331.75	1 048.31	3 314.78

注：表中数值是当关键量测的权值在 10^{-5}～10^5 时，$\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}$ 的条件数。

表 2　IEEE-14 节点系统非关键量测的权值和 $R^{-\frac{1}{2}}H$ 的条件数

Table 2　Weight of non-critical measurement and condition number of $R^{-\frac{1}{2}}H$ of IEEE-14 bus system

量测	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1.0	10	10^{2}	10^{3}	10^{4}	10^{5}
P_1	62.10	62.10	62.10	62.08	61.90	61.71	81.51	215.05	666.52	2 103.44	6 650.27
P_2	64.18	64.18	64.14	63.82	62.24	61.71	135.79	419.76	1 324.39	4 187.14	13 240.62
P_3	62.08	62.08	62.06	61.93	61.66	61.71	67.29	165.53	513.49	1 620.82	5 124.53
P_4	60.01	59.88	58.74	54.34	51.51	61.71	188.51	594.82	1 880.58	5 946.79	18 805.36
$P_{1\text{-}2}$	61.80	61.80	61.80	61.79	61.76	61.71	79.35	206.67	638.71	2 015.08	6 370.72
$P_{5\text{-}1}$	61.67	61.67	61.67	61.67	61.67	61.71	62.11	70.23	174.85	544.79	1 720.36
$P_{4\text{-}7}$	396.62	395.11	380.86	291.99	133.97	61.71	50.64	72.89	202.09	631.26	1 993.80
$P_{9\text{-}7}$	2 417.50	2 069.00	1 079.84	377.87	128.86	61.71	51.12	128.75	398.06	1 255.94	3 970.72
Q_1	61.37	61.37	61.37	61.35	61.19	61.02	79.62	209.84	650.38	2 052.53	6 489.36
Q_2	63.05	63.04	63.01	62.75	61.44	61.02	132.71	410.28	1 294.48	4 092.58	12 941.68
Q_3	61.41	61.40	61.39	61.27	61.00	61.02	65.82	160.56	497.85	1 571.35	4 968.15
Q_4	57.99	57.87	56.84	52.84	50.25	61.02	186.66	588.97	1 862.08	5 888.29	18 620.32
$Q_{1\text{-}2}$	61.09	61.09	61.09	61.09	61.06	61.02	77.41	201.34	622.15	1 962.80	6 205.47
$Q_{5\text{-}1}$	60.97	60.97	60.97	60.97	60.98	61.02	61.44	70.14	177.53	553.75	1 748.85
$Q_{4\text{-}7}$	356.30	355.00	342.74	265.19	124.19	61.02	53.06	82.52	234.30	733.38	2 316.80
$Q_{9\text{-}7}$	2 337.07	2 025.17	1 084.38	382.61	130.08	61.02	52.03	135.48	419.91	1 325.22	4 189.87

注：表中数值是当非关键量测的权值在 10^{-5}～10^{5} 时，$R^{-\frac{1}{2}}H$ 的条件数。

关键量测的特点是量测残差恒为零与其量测权值无关，据此，我们将在附录中证明：关键量测的权值不影响状态估计的结果、状态变量估计误差的方差和量测估计误差的方差。应该说明的是这是基于状态估计目标函数与关键量测的权值无关这一客观事实得到的，没有考虑由于关键量测的权值不同，引起的数值稳定性的不同和计算过程中舍入误差的差异，这些都会造成因关键量测的权值不同而使估计结果有区别。实际上，关键量测的权值不同，不但可能使估计结果有差异，求解的迭代次数不同，而且关键量测的权值取某些值时可能导致不收敛，而取其他值时却能得到理想的估计结果。

基于以上分析，兼顾估计结果的准确性和数值稳定性，本文提出选取量测权值的新原则：

a. 非关键量测的权值根据其量测精度确定，使量测估计值接近精度高的量测值，从而使估计结果有较高的准确性。如果出现数值稳定性问题时，可适当减小大量测权的值。

b. 关键量测，不论是实际量测，还是虚拟量测，或者是伪量测，也不管其量测精度如何，取接近非关键量测中去掉那些权值特大和特小的量测后量测权值的平均值的数值，作为关键量测的权值，使状态估计的数值稳定性较好。

4　结语

估计结果的准确性和数值稳定性对实时状态估计都很重要，通常以量测精度选取量测权值，使估计结果有较高的准确性，但可能引起量测权值相差悬殊，本文的研究再次证实了这对状态估计的数值稳定性有不利的影响。关键量测的残差为零而与其权值无关，为改善状态估计的数值稳定性，改变关键量测的权值，不会降低估计结果的准确性。利用本文提出的选取量测权值的新原则，非关键量测的权值体现量测精度，根据数值稳定性的需要选取关键量测的权值，能较好地实现状态估计数值稳定性与估计结果准确性之间的协调。

参 考 文 献

1　于尔铿(Yu Erkeng). 电力系统状态估计(Power System State Estimation). 北京：水利电力出版社(Beijing: Hydraulic Power Publishing Company)，1985

2　Gouvea P S，A Simoes Costa A J. Critical Pseudo-Measurement Placement in Power System State Estimation. In ：12th Power Systems Computation Conference. Dresden：1996

3　高中文，周苏荃，刘有斌，等(Gao Zhongwen，Zhou Suquan，Liu Youbin，et al). 基于运行模式的不良数据检测及产生伪量测值的方法(The Methods of Bad Data Detection and Pseudo-Measurement Supply Based on Power System Operation Pattern). 电力系统自动化(Automation of Electric Power Systems)，1995，19(6)

4　李碧君，薛禹胜，顾锦汶，等(Li Bijun，Xue Yusheng，Gu Jinwen，et al). 电力系统状态估计问题的研究现状和展望(Status Quo and Prospect of Power System State Estimation). 电力系统自动化(Automation of Electric Power Systems)，1998，22(11)

5　Monticelli A，Murari C A F，Wu F F. A Hybrid State Estimator：Solving Normal Equations by Orthogonal

Transformations. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, 1985, PAS-104(12)
6 Amerongen Van R A M. On the Exact Incorporation of Virtual Measurements in Orthogonal-Transformation Based State Estimation Procedures. Electrical Power & Energy Systems, 1991, 13(3)
7 张贤达(Zhang Xianda). 信号处理中的线性代数(Linear Algebra in Signal Processing). 北京:科学出版社(Beijing: Science Press), 1997

附 录 A

关键量测的权值对估计结果精度的影响

在给定网络结线、支路参数和量测系统的条件下,电力系统状态估计的量测方程可写为:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v} \tag{A1}$$

其中 $\boldsymbol{z}$ 是量测矢量;$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 是非线性量测矢量函数;$\boldsymbol{v}$ 是误差矢量;$\boldsymbol{x}$ 是状态变量。

状态估计变量 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是使目标函数:

$$J(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}[\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})] \tag{A2}$$

达到最小的 $\boldsymbol{x}$。

以下用下标 C 对应关键量测,NC 对应非关键量测。关键量测的残差为零,所以求解出的状态变量估计值 $\boldsymbol{x}$,总是使

$$\boldsymbol{z}_{\mathrm{C}} - \boldsymbol{h}_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{A3}$$

因此,目标函数成为:

$$J(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{z}_{\mathrm{NC}} - \boldsymbol{h}_{\mathrm{NC}}(\boldsymbol{x})]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{NC}}^{-1}[\boldsymbol{z}_{\mathrm{NC}} - \boldsymbol{h}_{\mathrm{NC}}(\boldsymbol{x})] \tag{A4}$$

从上式可见状态估计的目标函数与关键量测的权阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{C}}^{-1}$ 无关。

令 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的某一近似值,$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$,$\Delta\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_0)$,$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})$ 是量测矢量的雅可比矩阵。式(A2)可写为:

$$J(\boldsymbol{x}) = [\Delta\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}[\Delta\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)] \tag{A5}$$

由于关键量测的特点,求解得到的 $\Delta\boldsymbol{x}$ 总使下式成立:

$$\Delta\boldsymbol{z}_{\mathrm{C}} - \boldsymbol{H}_{\mathrm{C}}(\boldsymbol{x}_0)\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{A6}$$

所以,式(A5)成为:

$$J(\boldsymbol{x}) = [\Delta\boldsymbol{z}_{\mathrm{NC}} - \boldsymbol{H}_{\mathrm{NC}}(\boldsymbol{x}_0)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{NC}}^{-1}[\Delta\boldsymbol{z}_{\mathrm{NC}} - \boldsymbol{H}_{\mathrm{NC}}(\boldsymbol{x}_0)] \tag{A7}$$

因此,为使 $J(\boldsymbol{x})$ 极小,应有:

$$\Delta\hat{\boldsymbol{x}} = \sum(\boldsymbol{x}_0)_{\mathrm{NC}}\boldsymbol{H}_{\mathrm{NC}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{R}_{\mathrm{NC}}^{-1}\Delta\boldsymbol{z}_{\mathrm{NC}} \tag{A8}$$

其中 $\sum(\boldsymbol{x}_0)_{\mathrm{NC}} = [\boldsymbol{H}_{\mathrm{NC}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{R}_{\mathrm{NC}}^{-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{NC}}(\boldsymbol{x}_0)]^{-1}$

同时,$\Delta\hat{\boldsymbol{x}}$ 应使式(A6)成立。

由此可见状态变量的估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 与关键量测的权阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{C}}^{-1}$ 无关。

因为 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 与 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{C}}^{-1}$ 无关,量测估计值 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 与 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{C}}^{-1}$ 亦无关。所以,状态估计误差方差阵和量测估计误差方差阵与 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{C}}^{-1}$ 无关。

综上所述,关键量测的权值变化不影响状态估计的目标函数、状态变量估计的结果、状态变量估计的精度和量测估计值的精度。

李碧君,男,博士,工程师,主要研究方向为电力系统状态估计和电力系统安全、稳定分析与控制。

薛禹胜,男,博士生导师,中国工程院院士,总工程师,主要从事电力系统自动化方面的研究工作。

顾锦汶,男,教授,副总工程师,主要从事电力系统运行与控制方面的研究。

A NEW CRITERION OF DETERMINING MEASUREMENT WEIGHTS IN POWER SYSTEM STATE ESTIMATION

Li Bijun[1], *Xue Yusheng*[2], *Gu Jinwen*[2], *Han Zhenxiang*[1]
(1. Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)
(2. Nanjing Automation Research Institute, Nanjing 210003, China)

Abstract: Numerical stability and veracity of estimation are important aspects in power system state estimation. Conventionally, the measurement weight is determined according to its veracity. This method is beneficial to veracity of estimation, but may be harmful to numerical stability. This paper analyzes the situation that changes of measurement weights affect the numerical stability. In order that changing weights of critical measurements doesn't reduce accuracy of estimation to improve numerical stability, the paper puts forward a new criterion of determining measurement weights. In the light of the new criterion, weight of non-critical measurement is determined on the basis of measurement accuracy, and, weight of critical measurement is determined to improve numerical stability. Weight of non-critical measurement is the reciprocal of its variance. Weight of critical measurement is the average of weights of other measurements. As a result it can coordinate the relationship between veracity of estimation and numerical stability. It is demonstrated in the appendix that veracity of estimation has nothing to do with weights of critical measurements.

This project is supported by National Key Basic Research Special Fund of China (No. G19980203) and State Power Corporation of China (1999SKPJ010-20).

Keywords: power systems; state estimation; measurement weight; numerical stability