

基于改进的 Benders 分解与透视割平面的机组组合算法

郑海艳¹, 简金宝², 全 然³, 杨林峰⁴

(1. 广西大学 数字与信息科学学院, 广西 南宁 530004; 2. 玉林师范学院 数学与信息科学学院, 广西 玉林 537000;
3. 河南工业大学 理学院, 河南 郑州 450001; 4. 广西大学 计算机与电子信息学院, 广西 南宁 530004)

摘要:经典的 Benders 分解法(BDM)将问题分解为主问题与子问题 2 个简单的形式进行求解, 由于主问题是一个混合整数问题, 其求解是 BDM 中最费时的部分。基于改进的 BDM 与透视割平面(PC), 提出一种求解火电机组组合(UC)问题的新算法。首先结合覆盖不等式提出改进的松弛型 BDM; 然后借助于 PC 和线性化技术建立 UC 问题的近似混合整数线性规划(MILP)模型; 最后利用松弛型 BDM 求解该模型。包含 10~1000 台机组的多个系统 24 时段的测试结果以及与其他方法的比较说明所提算法是有效的。

关键词: 机组组合; 透视割平面; 混合整数线性规划; Benders 分解; 覆盖不等式; 模型; 优化

中图分类号: TM 732

文献标识码: A

DOI: 10.16081/j.issn.1006-6047.2015.01.020

0 引言

在当今节能减排这样一个世界共识下, 电力系统的优化运行显得尤为重要。机组组合 UC(Unit Commitment)是电力系统运行调度一个非常重要的方面, 同时也是一个非常活跃的研究领域。近年来各类 UC 问题相继被提出和研究, 如融入随机性很强的风能发电的含风电场的 UC 问题^[1]、含插电式混合动力汽车的 UC 问题^[2]等, 然而火电机组仍然是最主要的组成部分。经典的 UC 问题是指在一个调度周期内满足系统负荷需求和旋转备用等条件下, 确定机组的启停计划和机组出力, 从而使得发电总费用最小, 其在数学上是一个大规模的混合整数规划问题。由于其可行解集的组合性质, UC 问题是一个 NP (Nondeterministic Polynomial) 难问题, 即在多项式时间内很难求解。到目前为止, 尝试用于求解 UC 问题的方法大致有确定性和启发式两大类。确定性方法主要有动态规划法^[3]、割平面法^[4]、半定规划法^[5]、拉格朗日松弛法^[6]和外逼近法^[7]等; 启发式方法主要有遗传算法^[8]、禁忌搜索^[9]和粒子群算法^[10]等。在上述方法中, 启发式方法可以很好地处理离散变量, 在理论上也具有全局收敛性, 但由于是随机搜索方法, 其计算效率不稳定, 且容易陷入局部最优解。在确定性方法中, 拉格朗日松弛法根据对偶理论将大规模问题分解为多个易于求解的中小规模子问题, 是目前求解大规模 UC 问题最有效和最常用的方法之一。但由于对偶间隙的存在, 该方法难以获得 UC 问题

的全局最优解, 且在迭代过程中容易出现振荡现象。

Benders 分解法 BDM (Benders Decomposition Method)^[(11-12)]是求解组合优化问题的一类经典方法, 其基本思想是将问题分解为相对易于求解的主问题和子问题, 通过逐次交替迭代求解主问题和子问题来达到求解原复杂问题的目的。传统的 BDM 中主问题是一个混合整数线性规划问题, 其求解比较费时, 文献[13]提出一个基于分支割平面的内点型 BDM, 算法中求解的是主问题的线性松弛, 并且证明了由此所产生的松弛型 Benders 割平面是全局性的有效割平面。

为了改进传统 BDM 的计算效率, 本文基于文献[13]的思想, 首先结合覆盖不等式建立一个求解离散变量为 0-1 变量的混合整数规划的改进的松弛型 BDM; 其次, 对于经典的 UC 问题, 本文借助于透视割平面(PC)和线性化技术建立一个新的近似混合整数线性规划 MILP(Mixed Integer Linear Programming)模型; 最后利用本文所建立的改进的松弛型 BDM 求解该近似 MILP 模型。由于改进的松弛型 BDM 的主问题是一个线性规划问题, 且中间加入了大量的覆盖不等式, 整个算法的计算效率大幅提高。10~1000 台机组 24 时段多个系统上的测试结果表明, 相比于传统的 BDM, 本文算法的计算时间大幅减少。另一方面, 将测试结果与其他方法进行比较, 结果进一步说明了本文算法是有效的。此外, 本文算法可顺利推广应用到求解其他类型的 UC 问题中。

1 BDM 与覆盖不等式

1.1 BDM 简介^[13]

BDM 是一种分解方法, 其思想是将复杂问题分解为 2 个相对简单的形式, 即主问题与子问题, 初始主问题是原问题的一个松弛, 仅包含部分约束和变

收稿日期: 2013-11-29; 修回日期: 2014-11-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71061002, 71201049); 广西自然科学基金资助项目(2014GXNSFFA118001); 广西研究生教育创新计划资助项目(2007105930808D05)

Project supported by the National Natural Science Foundation of China (71061002, 71201049), the Natural Science Foundation of Guangxi Province (2014GXNSFFA118001) and the Innovation Project of Guangxi Graduate Education (2007105930808D05)

量,而在子问题中,主问题中已经考虑过的变量的值可以固定下来。以如下形式的 MILP 问题为例:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_1^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}_1 \\ & \mathbf{A}_2^T \mathbf{y} + \mathbf{G}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}_2 \\ & \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0 \text{ 且为整数} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{d} \in \mathbf{R}^q, \mathbf{c}_1 \in \mathbf{R}^l, \mathbf{c}_2 \in \mathbf{R}^m$ 均是列向量; $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{G}$ 分别是 $q \times l, q \times m, n \times m$ 维矩阵。问题(1)可写成:

$$\min_{\mathbf{y} \in Y} \{ \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{y}} + \min_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{b}^T \mathbf{x} | \mathbf{G}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}_2 - \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x} \geq 0 \} \} \quad (2)$$

其中, $Y = \{ \mathbf{y} | \mathbf{A}_1^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}_1, \mathbf{y} \geq 0 \text{ 且为整数} \}$ 。式(2)中的内层优化问题

$$\min \{ \mathbf{b}^T \mathbf{x} | \mathbf{G}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}_2 - \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{x} \geq 0 \} \quad (3)$$

常称为原始子问题,其相应的对偶子问题为:

$$\begin{aligned} \max \quad & (\mathbf{c}_2 - \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{y}})^T \boldsymbol{\lambda} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{b} \\ & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

注意到对偶子问题(4)的可行解集与整数变量 $\mathbf{y}$ 无关,且根据对偶理论(2)可表示为:

$$\min_{\bar{\mathbf{y}} \in Y} \{ \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{y}} + \max \{ (\mathbf{c}_2 - \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{y}})^T \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \} \}$$

记 $\Gamma = \{ \boldsymbol{\lambda} | \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \}$ 为对偶子问题(4)的可行解集。不妨假设 Γ 非空,记 $\mathbf{H}^p, \mathbf{H}^r$ 分别是 Γ 的极点集和极方向集。若对偶子问题(4)有解,则至少存在一个极点 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^p$ 与解相对应;相反若问题(4)无解,则存在极方向 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}^r$ 使得 $(\mathbf{c}_2 - \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{y}})^T \boldsymbol{\mu} > 0$, 这种情形将导致一个不可行的原始子问题,必须避免该情况发生,这可通过选取 $\bar{\mathbf{y}}$ 使得 $(\mathbf{c}_2 - \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{y}})^T \boldsymbol{\mu} \leq 0$ 来满足要求,从而将问题(2)转化为:

$$\min_{\bar{\mathbf{y}} \in Y} \{ \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{y}} + \max \{ (\mathbf{c}_2 - \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{y}})^T \boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^p \} \}$$

$$\text{s.t.} \quad (\mathbf{c}_2 - \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{y}})^T \boldsymbol{\mu} \leq 0, \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}^r$$

引入一个辅助变量 θ , 将上述问题进一步表示为:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{y}} + \theta \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}_1^T \bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{c}_1 \\ & (\mathbf{c}_2 - \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{y}})^T \boldsymbol{\lambda} \leq \theta \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}^p \quad (\text{I}) \\ & (\mathbf{c}_2 - \mathbf{A}_2^T \bar{\mathbf{y}})^T \boldsymbol{\mu} \leq 0 \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{H}^r \quad (\text{II}) \\ & \bar{\mathbf{y}} \geq 0 \text{ 且为整数} \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)称为 Benders 主问题,约束(I)、(II)分别称为 Benders 最优性割平面与可行性割平面。在 Benders 算法的具体实施过程中,通常是从 $\mathbf{H}^p$ 与 $\mathbf{H}^r$ 均为空集开始,然后在迭代过程中不断更新这 2 个集合。算法中 Benders 最优性割平面是通过求解原子问题(3)或对偶子问题(4)产生,而 Benders 可行性割平面可通过求解另一可行性子问题来产生。若 $\mathbf{y}$ 为 0-1 变量,文献[19]提出了可显式计算产生的组合 Benders 割平面,即下述整数型割平面:

$$\sum_{j \in S_{\text{one}}} y_j - \sum_{j \in S_{\text{zero}}} y_j \leq |S_{\text{one}}| - 1 \quad (6)$$

其中, $\mathbf{y} = (y_j)$; $S_{\text{one}} = \{ j : y_j = 1 \}$; $S_{\text{zero}} = \{ j : y_j = 0 \}$; $|S_{\text{one}}|$ 表示集合 S_{one} 中元素的个数。当子问题无解时,式(6)可用来代替 Benders 可行性割平面(II)。此外,由于主问题(5)通常是原复杂问题的一个松弛,所以求解主问题(5)可得到原复杂问题(1)目标函数值的一个下界,而当对偶子问题(4)有解时,易得问题(1)的一个可行解,进而与之相对应的目标函数值可作为一个上界。在迭代过程中不断修正原复杂问题(1)的目标函数值的上下界,即上界不断缩小,下界不断增大,最终逼近原复杂问题(1)的最优值。

1.2 覆盖不等式^[4]

对于整数规划问题所有的可行解而言均成立的不等式称为有效不等式,进一步若其对于整数规划松弛问题的可行解而言,并不是处处成立,则称其为割平面。下面介绍一类非常有用的有效不等式——覆盖不等式,其能非常有效地割除连续松弛问题最优解中整数变量的非整数值。以如下 0-1 背包问题为例:

$$\max \left\{ \sum_{j \in \Omega} w_j y_j \mid \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_\Omega \right\} \quad (7)$$

其中, $\Omega = \{ 1, 2, \dots, n \}$; $\mathbf{Y}_\Omega = \left\{ \mathbf{x} \mid \sum_{j \in \Omega} a_j y_j \leq \xi, \mathbf{y} \in \mathbf{B}_n \right\}$, $\mathbf{B}_n$ 为 n 维 0-1 整数向量集合, $a_j (j \in \Omega)$, ξ 均为正整数。对于 0-1 背包约束 $\sum_{j \in \Omega} a_j y_j \leq \xi$, 若存在集合 $C \subseteq \Omega$, 使得 $\sum_{j \in C} a_j > \xi$, 则称 C 为一个覆盖, 且称

$$\sum_{j \in C} y_j \leq |C| - 1 \quad (8)$$

为可行集 $\mathbf{Y}_\Omega$ 的一个覆盖不等式, 其中 $|C|$ 表示集合 C 中元素的个数。

定理 1^[4]: 设 $C \subseteq \Omega$ 为 0-1 背包约束的一个覆盖, 则覆盖不等式(8)为 0-1 背包问题(7)可行解集 $\mathbf{Y}_\Omega$ 的一个有效不等式, 同时是一个割平面。

2 UC 问题的数学模型

为方便起见, 先引进一些记号: N 为机组总数, 机组标号 $i = 1, 2, \dots, N$; T 为时段总数, 时段标号 $t = 1, 2, \dots, T$; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 为机组 i 的发电费用参数; $C_{\text{hot}, i}, C_{\text{cold}, i}$ 分别为机组 i 的热启动费用与冷启动费用; $T_{\text{off}, i}, T_{\text{on}, i}$ 分别为机组 i 的最小停机时间与最小运行时间; $T_{i, t}$ 为机组 i 在第 t 时段已连续运行时间(为正值)或连续停机时间(为负值); $T_{\text{cold}, i}$ 为机组 i 的冷启动时间; $P_{D, t}$ 为系统第 t 时段的总负荷; $P_i, \bar{P}_i$ 分别为机组 i 的最小和最大出力; $P_{\text{up}, i}, P_{\text{start}, i}, P_{\text{down}, i}, P_{\text{shut}, i}$ 分别为机组 i 的功率上升速度限制、启动功率速度限制、功率下降速度限制及停机功率速度限制; R_t 为系统第 t 时段

的总备用。0-1 整数变量 $u_{i,t}$ 为机组 i 在第 t 时段的状态,值为 1 表示机组 i 处于运行状态,值为 0 表示机组 i 处于停机状态;连续变量 $P_{i,t}$ 为机组 i 在第 t 时段的出力。经典 UC 问题的目标函数为发电总费用 F_C 最小,即:

$$\begin{aligned} \min F_C &= \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N [u_{i,t} f_i(P_{i,t}) + u_{i,t}(1-u_{i,t-1})C_{i,t}] \\ f_i(P_{i,t}) &= \alpha_i + \beta_i P_{i,t} + \gamma_i (P_{i,t})^2 \\ C_{i,t} &= \begin{cases} C_{\text{hot},i} & \underline{T}_{\text{off},i} \leq -T_{i,t} \leq \underline{T}_{\text{off},i} + T_{\text{cold},i} \\ C_{\text{cold},i} & -T_{i,t} > \underline{T}_{\text{off},i} + T_{\text{cold},i} \end{cases} \end{aligned}$$

其中, $f_i(P_{i,t})$ 为机组 i 在第 t 时段的发电费用,常用二次函数表示; $C_{i,t}$ 为机组 i 在第 t 时段的启动费用。

UC 问题的约束条件如下。

a. 功率平衡约束:

$$\sum_{i=1}^N P_{i,t} - P_{D,t} = 0$$

b. 机组出力约束:

$$u_{i,t} \underline{P}_i \leq P_{i,t} \leq u_{i,t} \bar{P}_i$$

c. 爬坡约束:

$$\begin{aligned} P_{i,t} - P_{i,t-1} &\leq u_{i,t-1} P_{\text{up},i} + (u_{i,t} - u_{i,t-1}) P_{\text{start},i} + (1 - u_{i,t}) \bar{P}_i \\ P_{i,t-1} - P_{i,t} &\leq u_{i,t} P_{\text{down},i} + (u_{i,t-1} - u_{i,t}) P_{\text{shut},i} + (1 - u_{i,t-1}) \bar{P}_i \end{aligned}$$

d. 旋转备用约束:

$$\sum_{i=1}^N u_{i,t} \bar{P}_i \geq P_{D,t} + R_t$$

e. 最小启停时间约束:

$$\begin{cases} (u_{i,t-1} - u_{i,t})(T_{i,t-1} - \underline{T}_{\text{on},i}) \geq 0 \\ (u_{i,t} - u_{i,t-1})(-T_{i,t-1} - \underline{T}_{\text{off},i}) \geq 0 \end{cases}$$

3 基于改进的松弛型 BDM 与透视割平面求解 UC 问题

3.1 改进的松弛型 BDM

传统 BDM 中的主问题是一个 MILP 问题,求解比较费时,其求解时间占用整个算法的绝大部分,为改进传统 BDM 的计算效率,文献[13]提出一个基于分支割平面的内点型 BDM。基于文献[13]的松弛思想,本文结合覆盖不等式建立一个求解 0-1 MILP 问题改进的松弛型 BDM。下面给出改进的松弛型 BDM 的基本步骤。

(1) 初始化:给定初始上界 U_B 与下界 L_B 、允许误差 ε , $H^p = \emptyset$, $H^R = \emptyset$ 。

(2) 当 $L_B < U_B - \varepsilon$ 时,执行下列步骤。

步骤 1:求解主问题(5)的线性松弛得到 $\bar{y}$,同时利用式(5)的目标函数值修正下界 L_B 。

步骤 2:利用 $\bar{y}$ 产生相应的覆盖不等式。

步骤 3:利用 $\bar{y}$ 形成相应的子问题(4)并求解。若子问题有解,则产生松弛型 Benders 最优性割平面

(I),同时更新 H^p ,若子问题的解进一步满足整数要求,则修正上界 U_B ;若子问题无解,则利用式(6)计算组合 Benders 割平面。

步骤 4:将所产生的覆盖不等式以及 Benders 割平面加入到主问题(5)中,返回步骤 1。

引理 1^[13] 改进的松弛型 BDM 步骤 3 中所产生的 Benders 割平面是全局性的有效割平面。

3.2 UC 问题的近似 MILP 模型

在文献[15]中,Frangioni 与 Gentile 针对一类凸的具有特定结构的 0-1 混合整数规划提出一类特殊的有效不等式——透视割平面。文献[16]将其进行了推广,通过引进 0-1 变量将一类更具一般性的混合整数非线性规划问题进行透视变形。为简单起见,同时结合 UC 问题的特点,以如下形式的混合整数规划为例简单介绍透视割平面:

$$\min_{(p,u) \in D} f(p,u) = \gamma p^2 + \beta p + \alpha u \quad (9)$$

其中, $D = [0,0] \cup [p_{\min}, p_{\max}] \times \{1\}$, 常数 $p_{\min} \leq p_{\max}$; γ, β, α 为常数系数。问题(9)最好的凸松弛就是计算 $f(p,u)$ 在 D 上的凸包络,即求解定义在其最小上图像上的闭凸函数。记 $f(p,u)$ 的闭凸包为 $h(p,u)$,即:

$$h(p,u) = \begin{cases} 0 & u=0 \text{ 且 } p=0 \\ \frac{\gamma p^2}{u} + \beta p + \alpha u & u p_{\min} \leq p \leq u p_{\max}, u \in (0,1] \\ +\infty & \text{其他} \end{cases}$$

显然 $h(p,u)$ 与透视函数 $g(p,u) = u f(p,u)$ 相关,且当 $(p,u) \in D$ 时,由 $0 < u \leq 1$ 知 $h(p,u) \geq f(p,u)$ 。所以对于连续松弛方法而言,作为目标函数 $h(p,u)$ 比 $f(p,u)$ 更好,但是 $h(p,u)$ 最大的一个缺陷就是非线性程度高,且在 $(0,0)$ 处不可微。根据文献[15]中的定理 1 可知函数 $h(p,u)$ 的上图像是由满足以下 2 个条件的 (z,p,u) 组成:

a. $u p_{\min} \leq p \leq u p_{\max}, 0 \leq u \leq 1$;

b. 对于所有的 $\bar{p} \in [p_{\min}, p_{\max}]$ 有式(10)成立,且称不等式(10)为透视割平面。

$$z \geq (2\gamma \bar{p} + \beta)p + (\alpha - \gamma \bar{p}^2)u \quad (10)$$

结合机组出力约束 $u_{i,t} \underline{P}_i \leq P_{i,t} \leq u_{i,t} \bar{P}_i$ 以及 $u_{i,t} \in \{0,1\}$ 易知 $u_{i,t} P_{i,t} = P_{i,t}$ 。当暂时不计启动费用时,UC 问题的目标函数可写成:

$$\min F_C = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N [\alpha_i u_{i,t} + \beta_i P_{i,t} + \gamma_i (P_{i,t})^2]$$

令 $z_{i,t} = \alpha_i u_{i,t} + \beta_i P_{i,t} + \gamma_i (P_{i,t})^2$,借助于透视割平面可在 UC 问题中增加如下约束:

$$z_{i,t} \geq (2\gamma_i \bar{p}_i^h + \beta_i) p_{i,t} + [\alpha_i - \gamma_i (\bar{p}_i^h)^2] u_{i,t} \quad h=1,2,\dots,k$$

其中, $\bar{p}_1^h, \dots, \bar{p}_k^h \in [\underline{P}_i, \bar{P}_i]$ 为任意给定的点。另一方面,由于最小启停时间约束是非线性的,采用文献[6]中

的线性化技术,将其等价转化为如下线性约束:

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=t}^{\theta(\underline{T}_{on,i},t)} u_{i,\tau} &\geq (u_{i,t}-u_{i,t-1})\eta(\underline{T}_{on,i},t)+\delta(t-1)\theta_{i,0} \\ \sum_{\tau=t}^{\theta(\underline{T}_{off,i},t)} (1-u_{i,\tau}) &\geq (u_{i,t-1}-u_{i,t})\eta(\underline{T}_{off,i},t)+\delta(t-1)\eta_{i,0} \\ \theta(\omega,t) &= \min\{t+\omega-1,T\} \\ \eta(\omega,t) &= \min\{\omega,T-t+1\} \\ \theta_{i,0} &= u_{i,1}u_{i,0}\max\{0,\underline{T}_{on,i}-T_{i,0}\} \\ \eta_{i,0} &= (1-u_{i,1})(1-u_{i,0})\max\{0,\underline{T}_{off,i}+T_{i,0}\} \end{aligned}$$

其中, $\omega=\underline{T}_{on,i}, \underline{T}_{off,i}; \delta(t-1)$ 为单位冲激函数; $u_{i,0} \in \{0,1\}$ 、 $T_{i,0}$ 均为常量。

基于以上分析,将 UC 问题近似写成如下 MILP 模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N z_{i,t} \\ \text{s.t.} \quad & E_p P = c_p \\ & A_u U + A_p P \leq c_{up} \\ & D_u U \leq c_u \\ & B_u U + B_p P + B_z Z \leq c_{upz} \\ & U = (u_{i,t}), \quad u_{i,t} \in \{0,1\} \\ & P = (P_{i,t}), \quad Z = (z_{i,t}) \end{aligned} \tag{11}$$

其中, $E_p, A_u, A_p, D_u, B_u, B_p, B_z$ 为相应系数矩阵; $c_p, c_{up}, c_u, c_{upz}$ 为常数向量。

3.3 MILP 模型的求解

由于 UC 问题中的旋转备用与最小启停时间约束仅含整数变量,且根据 0-1 变量值的互补性,很容易将其写成 0-1 背包约束的形式,从而可以利用文献[4]中的启发式方法产生相应的覆盖不等式。利用透视割平面以及线性化技术将 UC 问题近似表示为 MILP 模型后,利用 3.1 节所建立的改进的松弛型 BDM 进行求解。松弛型 BDM 在求解 UC 问题的过程中整个问题被分解成主问题与子问题两部分,其中主问题仅涉及到与机组启停状态相关的变量和一个简单的连续变量,即:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0+\theta \\ \text{s.t.} \quad & D_u U \leq c_u \end{aligned}$$

割平面

$$U=(u_{i,t}), \quad u_{i,t} \in \{0,1\}, \quad \theta \in \mathbf{R}$$

利用主问题所得到的 U , 形成如下原始子问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N z_{i,t} \\ \text{s.t.} \quad & E_p P = c_p \\ & A_p P \leq c_{up} - A_u U \\ & B_p P + B_z Z \leq c_{upz} - B_u U \\ & P = (P_{i,t}), \quad Z = (z_{i,t}) \end{aligned}$$

求解该子问题或其对偶子问题可得到相应的松弛型 Benders 最优性割平面,而当子问题无解时则利用

式(6)产生相应的整数型割平面。当精度满足算法终止时,整数要求并不满足,则可采用文献[4]中的方法,进行一些启发式调整。图 1 给出具体的算法流程图。

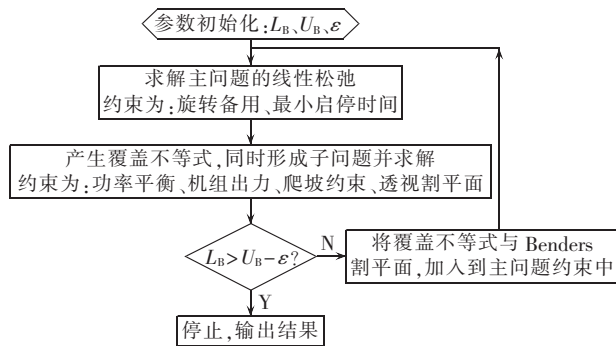


图 1 算法流程图

Fig.1 Flowchart of algorithm

4 数值仿真

为说明所提算法的有效性,在 10~1000 台机组 24 时段等多个系统上进行测试,其中 10 台机组的发电机参数及各时段负荷数据见文献[6]。20~1000 台机组的相关数据是通过复制 10 机组 24 时段系统的基本参数得到。旋转备用取系统总负荷的 10%。运行环境为 AMD Athlon Dual Core Processor 4400+ 2.3 GHz, 1 GB RAM, 并在 MATLAB 2009a 环境下调用 CPLEX 11^[17] 求解主问题与子问题。

算法中各参数的取值如下: 允许误差 $\varepsilon=0.005$; 初始上、下界分别为 $U_B=\infty, L_B=0$ 。此外,在形成透视割平面时取 $k=4, \Delta p_i = (\bar{P}_i - \underline{P}_i)/k, \bar{p}_i^k = \underline{P}_i + \Delta p_i k$ 。

为了说明改进的松弛型 BDM 比传统的 BDM 计算效率高,对于不计爬坡约束情形,分别将这 2 种算法对 10~1000 台机组进行测试。2 种算法的迭代次数均为 2 次,其他测试结果具体见表 1,其中 BDM 表示用传统的 Benders 分解求解 UC 问题新的近似

表 1 10~1000 台机组系统 24 时段的测试结果 (无爬坡约束)

Table 1 Test results of 24-period, 10~1000-unit systems (without ramp-rate constraint)

机组台数	CPU 时间/s		发电总费用/\$	
	BDM	RBDM	BDM	RBDM
10	1.4	0.5	563 948	563 948
20	3.0	1.2	1 123 642	1 123 642
40	7.7	3.0	2 243 240	2 243 787
60	13.2	4.8	3 363 760	3 363 760
80	19.4	6.3	4 481 551	4 481 813
100	19.2	7.1	5 604 611	5 603 450
200	25.6	8.9	11 201 251	11 203 816
300	33.0	10.2	16 795 679	16 798 775
500	69.4	20.4	27 991 792	27 992 594
800	172.5	49.9	44 785 289	44 777 827
1 000	186.4	55.2	55 975 394	55 985 302

注:加粗的部分为较少的计算时间。

MILP 模型,RBDM 则表示用改进的松弛型 Benders 分解进行求解。从表 1 可以看出,2 种算法所计算得到的发电总费用基本相近,但计算时间方面,RBDM 却少了许多,RBDM 的计算时间不到 BDM 的一半。

另一方面,由于广义 Benders 分解(GBD)可直接用于求解混合整数非线性规划问题,文献[14]直接利用 GBD 求解 UC 问题。为了与文献[14]中的计算结果进行比较,下面对于 40~100 台机组不计爬坡约束,并且采用相同的允许误差进行测试,比较结果见表 2,表中“—”表示文中没有给出结果。通过表 2 可以看出,除了误差为 0.004 时 40 台机组与 100 台机组的测试结果比 GBD 方法稍差外,本文所提算法的其他计算结果均优于文献[14]中 GBD 方法的计算结果。此外,在求解不同规模 UC 问题时文献[14]中 GBD 方法的迭代次数为 3~5 次,而本文算法则均为 2 次,说明本文算法具有良好的稳定性。

表 2 40~100 台机组系统 24 时段 2 种算法的结果比较
Table 2 Comparison of test results between two algorithms for 24-period,40~100-unit systems

误差	算法	发电总费用/¥			
		40 台	60 台	80 台	100 台
0.005	GBD	—	—	—	5605417
	RBDM	2243787	3363760	4481813	5603450
0.004	GBD	2243646	3363876	4485443	5603496
	RBDM	2243787	3363760	4481813	5603859
0.003	GBD	—	—	—	5602638
	RBDM	2243787	3363760	4481813	5602584

注:加粗部分为表中最好结果。

为了进一步检验本文所提算法的有效性,对于 10~100 台机组不计爬坡约束情形,再将计算得到的发电总费用和文献[6]与文献[18]的方法进行比较,其中文献[6]是采用拉格朗日松弛法求解 UC 问题,而文献[18]是把 UC 问题近似表示为 MILP 模型,然后直接调用 CPLEX 进行求解。在相同的条件下将计算结果进行比较,具体见表 3。通过表 3 可以看出,本文算法的计算结果均优于另外 2 种方法的计算结果。

表 3 10~100 机组系统 24 时段不同算法的结果比较
Table 3 Comparison of test results among different algorithms for 24-period,10~100-unit systems

机组台数	发电总费用/¥		
	DPLR ^[6]	MILP ^[18]	RBDM
10	565508	565029	563948
20	1126720	1124881	1123642
40	2249792	2245874	2243787
60	3371188	3365298	3363760
80	4494487	4485835	4481813
100	5615893	5605018	5603450

注:加粗部分为表中最好结果。

对于计及爬坡约束情形,类似于文献[4],取机组爬坡约束功率限制分别为 $P_{up,i}=P_{down,i}=20\% \bar{P}_i$,且

不计启动和停机功率速度限制,令 $P_{start,i}=P_{shut,i}=\bar{P}_i$ 。用传统的 BDM 和本文所提出的 RBDM 这 2 种方法对 10~100 台机组进行测试,测试结果也是 2 种算法都经过 2 次迭代收敛,计算所得的发电费用基本相近,而 RBDM 的计算时间却大幅减少,具体结果如表 4 所示。

表 4 10~100 机组系统 24 时段结果
(计及爬坡约束)
Table 4 Test results of 24-period,10~100-unit systems(with ramp-rate constraint)

机组台数	CPU 时间/s		发电总费用/¥	
	BDM	RBDM	BDM	RBDM
10	1.3	0.6	564987	564987
20	5.2	2.0	1126863	1126752
40	25.0	8.0	2250379	2249900
60	73.3	19.9	3372236	3372236
80	147.7	31.6	4496570	4497137
100	164.9	61.1	5618383	5618445

注:加粗的部分为较少的计算时间。

5 结语

本文基于改进的松弛型 BDM 与透视割平面,提出一种求解 UC 问题的新算法。该算法通过借助覆盖不等式建立一个改进的松弛型 BDM,算法中大量覆盖不等式的加入与线性松弛大幅减少了计算时间。10~1000 台机组 24 时段多个系统的数值仿真结果也证实了本文算法能在较快的时间内获得高质量的次优解。该算法为各类 UC 问题的有效求解提供了一条新的途径。

参考文献:

[1] 艾欣,刘晓,孙翠英. 含风电场电力系统机组组合的模糊决策机会约束决策模型[J]. 电网技术,2011,35(12):202-207.
AI Xin,LIU Xiao,SUN Cuiying. A fuzzy chance constrained decision model for unit commitment of power grid containing large-scale wind farm[J]. Power System Technology,2011,35(12):202-207.
[2] 李高望,钱斌,石东源,等. 含插电式混合动力汽车的机组组合问题[J]. 电网技术,2013,37(1):32-38.
LI Gaowang,QIAN Bin,SHI Dongyuan,et al. Unit commitment problem considering plug-in hybrid electric vehicle[J]. Power System Technology,2013,37(1):32-38.
[3] 王承民,郭志忠,于尔铿. 确定机组组合的一种改进的动态规划方法[J]. 电网技术,2001,25(5):20-24.
WANG Chengmin,GUO Zhizhong,YU Erkeng. An improved dynamic programming unit commitment[J]. Power System Technology,2001,25(5):20-24.
[4] 全然,简金宝,韦化,等. 基于特殊有效不等式求解机组组合问题的内点割平面法[J]. 中国电机工程学报,2011,31(19):51-59.
QUAN Ran,JIAN Jinbao,WEI Hua,et al. An interior-point cutting plane method for unit commitment based on special valid inequalities[J]. Proceedings of the CSEE,2011,31(19):51-59.
[5] 张宁宇,高山,赵欣. 一种求解机组组合问题的内点半定规划 GPU 并行算法[J]. 电力自动化设备,2013,33(7):126-131.

- ZHANG Ningyu,GAO Shan,ZHAO Xin. GPU parallel algorithm of interior point SDP for unit commitment[J]. Electric Power Automation Equipment,2013,33(7):126-131.
- [6] ONGSAKUL W,PETCHARAKS N. Unit commitment by enhanced adaptive Lagrangian relaxation[J]. IEEE Transactions on Power Systems,2004,19(1):620-628.
- [7] 全然,简金宝,郑海艳. 基于外逼近方法的中期机组组合问题[J]. 电力系统自动化,2009,33(11):24-28.
- QUAN Ran,JIAN Jinbao,ZHENG Haiyan. Medium term unit commitment based on outer approximation method[J]. Automation of Electric Power Systems,2009,33(11):24-28.
- [8] KAZARLIS S,BAKIRTZIS A,PETRIDIS V. A genetic algorithm solution to the unit commitment problem[J]. IEEE Transactions on Power Systems,1996,11(1):83-92.
- [9] MANTAWY A H,ABDEL M Y L,SELIM S Z. Unit commitment by tabu search[J]. IEE Proceedings-Generation,Transmission and Distribution,1998,145(1):56-64.
- [10] 陈海良,郭瑞鹏. 基于改进离散粒子群算法的电力系统机组组合问题[J]. 电网技术,2011,35(2):94-99.
- CHEN Hailiang,GUO Ruipeng. Unit commitment based on improved discrete particle swarm optimization[J]. Power System Technology,2011,35(2):94-99.
- [11] BENDERS J F. Partitioning procedures for solving mixed integer variables programming problems[J]. Numerische Mathematik,1962,4(1):238-252.
- [12] GEOFFRION A M. Generalized benders decomposition [J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1972,10(4):237-260.
- [13] JOE N S,SAMIR E. An interior-point Benders based branch-and-cut algorithm for mixed integer programs[J]. Annals Operations Research,2013,210(1):33-55.
- [14] SOMAYEH R,TAHER N,FARHAD F. A new approach based Benders decomposition for unit commitment problem[J]. World Applied Sciences Journal,2009,6(12):1665-1672.
- [15] FRANGIONI A,GENTILE C. Perspective cuts for a class of convex 0-1 mixed integer programs[J]. Mathematical Programming,2006,106(2):225-236.
- [16] OKTAY G,JEFF L. Perspective reformulation of mixed integer nonlinear with indicator variables[J]. Mathematical Programming,2010,120(1-2):183-205.
- [17] KENNETH H,ANDERS O G,MARCUS M E. User's guide for TOMLAB/CPLEX v11 [EB/OL]. (2008-02-08). <http://tomopt.com/tomlab/download/manuals.php>.
- [18] FRANGIONI A,GENTILE C,LACALANDRA F. Tighter approximated MILP formulations for unit commitment problems [J]. IEEE Transactions on Power Systems,2009,24(1):105-113.
- [19] CODATO G,FISCHETTI M. Combinatorial Benders' cuts for mixed-integer linear programming[J]. Operations Research,2006,54(4):756-766.

作者简介:



郑海艳

郑海艳(1977—),女,湖南邵东人,讲师,博士研究生,研究方向为最优化理论与方法及其在电力系统中的应用(E-mail: zhenghaiyan166@126.com);

简金宝(1964—),男,广西东兰人,教授,博士生导师,通讯作者,研究方向为最优化理论与方法及其在电力系统中的应用(E-mail: jianjb@gxu.edu.cn);

全然(1977—),男,河南南阳人,讲师,博士,研究方向为内点法和混合整数规划法及其在动态最优潮流中的应用;

杨林峰(1979—),男,湖北武汉人,副教授,博士,研究方向为内点和混合整数规划法及其在动态最优潮流中的应用。

Unit commitment algorithm based on improved Benders decomposition and perspective cut

ZHENG Haiyan¹,JIAN Jinbao²,QUAN Ran³,YANG Linfeng⁴

(1. College of Mathematics and Information Science,Guangxi University,Nanning 530004,China;

2. College of Mathematics and Information Science,Yulin Normal University,Yulin 537000,China;

3. College of Science,Henan University of Technology,Zhengzhou 450001,China;

4. College of Computer Electronics and Information,Guangxi University,Nanning 530004,China)

Abstract: Classical BDM(Benders Decomposition Method) decomposes a problem into master problem and sub-problem in simple form and solves them. As the master problem is a mixed integer problem,to solve it is the most time-consuming part of BDM. In order to solve the UC(Unit Commitment) problem of thermal power,an algorithm based on improved BDM and PC(Perspective Cut) is proposed. Combined with the cover inequality,an improved relaxed BDM is proposed and,based on PC and linearization technique,an approximate MILP(Mixed Integer Linear Programming) model is established. The UC problem is then solved by the relaxed BDM. The test results of 24-period,10~1 000-unit systems and the comparison between two methods prove the proposed algorithm effective.

Key words: unit commitment; perspective cut; mixed integer linear programming; Benders decomposition; cover inequality; models; optimization