一类不确定组合大系统的鲁棒分散控制*

徐兆棣　　张嗣瀛
(沈阳师范学院数学计算机系　110031)　(东北大学信息科学与工程学院)

摘　要　研究一类互联项与弧立子系统均含范数有界不确定性的非线性组合大系统的状态反馈鲁棒分散镇定问题。设计出线性状态反馈鲁棒分散控制器, 使闭环系统在其平衡点处按指数渐近稳定, 且鲁棒控制器具有全息结构。最后给出一个数值例子, 验证了所给结果的有效性。

关键词　组合大系统, 鲁棒控制, 状态反馈
分类号　TP 273

Robust Decentralized Control of a Class of Uncertain Interconnected Systems

Xu Zhaodi　　*Zhang Siying*
(Shenyang Normal University)　(Northeastern University)

Abstract　The problem of decentralized state feedback robust control is investigated for a class of uncertain nonlinear interconnected system, in which the uncertainties may appear not only in interconnection but also in isolated subsystem. Each uncertainty is subject to an upper bound on its norm. A type of linear controller with holographic structure is developed. The proposed controllers can ensure that all closed-loop state trajectories exponentially converge to zero. The simulation results show that the method is very effective.

Key words　interconnected systems, robust control, state feedback

1 引　　言

由于组合大系统的分散控制不需要各子系统之间信息的交换, 各子系统只须根据各自的信息制定控制策略, 从而便于对各子系统中出现的干扰迅速做出反应, 有利于实现快速决策和实时控制。相对集中控制而言, 分散控制更易于工程实现, 且分散控制的控制器相对比较简单。正是由于这些优点, 组合大系统的分散控制一直受到控制界的重视。一般而言, 组合大系统的分散控制需对各个子系统设计依赖于子系统本身性质的不同控制器。但如果组合大系统具有某些特殊性质, 使得对其实施分散控制时能对所有子系统设计结构完全相同的控制器, 则会大大减少控制器设计的工作量。特别是当组合大系统所包含的子系统个数较多时效果更明显。我们称这种控制为组合大系统的全息控制[1]。

另一方面, 由于实际系统不可避免地含有各种不确定性, 因此不确定控制系统鲁棒控制的研究有着广泛的实际背景, 并已取得了一些成果[2~5]。然而对于非线性组合大系统而言, 由于其非线性性和结构上的复杂性, 使得其鲁棒性研究非常困难。但对具有某种特殊结构的组合大系统, 利用其特殊结构进行特殊研究, 不失为一种有效的研究途径[6]。此外, 指数稳定性一般会使受控系统状态有较快的时间响应, 并能提高受控系统的鲁棒性[7]。因此, 受控系统指数稳定性的研究具有重要的实际意义。

本文研究一类不确定非线性组合大系统的状态反馈鲁棒镇定问题。文中给出的控制器不仅具有全息结构而且设计简单, 并能使受控系统具有指数稳定性。

* 国家自然科学基金项目(69774005)和教育部博士点基金项目(97014508)
1999-03-17 收稿, 1999-07-07 修回

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2 系统描述及预备知识

考虑下述不确定非线性组合大系统

$$\dot{x}_i = A x_i + B u_i + f_i(x_i, t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} [H_{ij}(x_j) + h_{ij}(x_j, t)]$$
$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{1}$$

其中, $x_i \in \Omega_i \subset R^n$, $u_i \in R^m$, 分别是第 i 个子系统的状态向量和控制输入向量; A, B 是具有相应维数的常值矩阵, 分别为第 i 个子系统的状态矩阵和输入增益矩阵; $H_{ij}(x_j)$ 是已知向量场, 表示第 j 个子系统对第 i 个子系统的关联作用; $f_i(x_i, t)$, $h_{ij}(x_j, t)$ 是未知向量场, 前者表示第 i 个子系统结构上的不确定性, 后者表示第 j 个子系统对第 i 个子系统关联作用的不确定性。不失一般性, 假设 $H_{ij}(0) = 0$, $f_i(0, t) = h_{ij}(0, t) = 0$。

定义 1 系统

$$\dot{x}_i = A x_i + B u_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2}$$
$$\dot{x}_i = A x_i + B u_i + f_i(x_i, t), \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{3}$$

分别称为系统(1) 的标称系统和孤立子系统。

为以下讨论方便, 做如下约定:

$\lambda_m(\cdot)$ 表示矩阵"$\cdot$"的最小特征值; $\lambda_M(\cdot)$ 表示矩阵"$\cdot$"的最大奇异值; $\|\cdot\|$ 表示矩阵"$\cdot$"的欧氏范数; I 表示具有相应维数的单位矩阵; $\sum_{i} = \sum_{i=1}^{N}$, $\sum_{j\neq i} = \sum_{j=1, j\neq i}^{N}$。

定义 2[1] 如果存在状态反馈控制器

$$u_i = \Phi(x_i, t), \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{4}$$

使之分别与系统(1) 及其孤立子系统(3) 构成的闭环系统都是渐近稳定的, 则称控制器(4) 为系统(1) 的结构全息状态反馈控制器, 简称全息控制器。

对系统(1) 做如下假定:

假定 1 系统(1) 的标称系统(2) 是完全可控的。

假定 2 存在已知常数 α_i, α_{ij}, 使得

$$\|f_i(x_i, t)\| \leq \alpha_i \|x_i\|, \ \|h_{ij}(x_j, t)\| \leq \alpha_{ij} \|x_j\|$$
$$i, j = 1, 2, \cdots, N, \quad i \neq j \tag{5}$$

注 1 假定 2 表明, 不确定性对系统的影响与相应的子系统状态相比不能太大(即范数为同一数量级)。

由假定 1 可知, 对任意正定矩阵 Q 及常数 σ, $\alpha > 0$, Riccati 方程

$$P(A + \alpha I) + (A + \alpha I)^{\mathrm{T}} P - \sigma P B B^{\mathrm{T}} P + Q = 0 \tag{6}$$

有唯一对称正定解矩阵 P。

对互联项 $H_{ij}(x_j)$, 由 $H_{ij}(0) = 0$ 知[8], 存在 Ω_j 上的光滑函数矩阵 $R_{ij}(x_j)$, 使得

$$H_{ij}(x_j) = R_{ij}(x_j) x_j$$
$$i, j = 1, 2, \cdots, N, \ i \neq j \tag{7}$$

3 主要结果

定理 1 如果系统(1) 满足假定 1 和假定 2, 且 $W(x) + W^{\mathrm{T}}(x)$ 为区域 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_N$ 上的正定函数矩阵, 则系统(1) 在区域 Ω 上可经线性全息控制器

$$u_i = -\frac{\sigma}{2} B^{\mathrm{T}} P x_i \tag{8}$$

按指数鲁棒分散镇定。其中, σ 是由设计者选择的正常数, P 由(6) 式确定, $x = [x_1^{\mathrm{T}} \ x_2^{\mathrm{T}} \ \cdots \ x_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, 函数矩阵 $W(x) = (\omega_j(x_j))_{N\times N}$ 由下式确定。

$$\omega_j(x_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda_m(Q) - \lambda_M(P)\alpha_i, & i = j \\ -\lambda_M(P)(\lambda_M(R_{ij}(x_j)) + \alpha_{ij}), & i \neq j \end{cases}$$

证明 考虑由控制器(8) 与系统(1) 构成的闭环系统

$$\dot{x}_i = A x_i - \frac{\sigma}{2} B B^{\mathrm{T}} P x_i + f_i(x_i, t) + \sum_{j\neq i} [H_{ij}(x_j) + h_{ij}(x_j, t)]$$
$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{9}$$

构造正定函数 $V(x) = \sum_i x_i^{\mathrm{T}} P x_i$, 则 $V(x)$ 沿系统(9) 轨迹的导数为

$$\dot{V}\big|_{(9)} = \sum_i 2x_i^{\mathrm{T}} P \left\{ \left[A - \frac{\sigma}{2} B B^{\mathrm{T}} P \right] x_i + f_i(x_i, t) + \sum_{j\neq i} [H_{ij}(x_j) + h_{ij}(x_j, t)] \right\} \tag{10}$$

由定理条件可得

$$\sum_i 2x_i^{\mathrm{T}} P \left(A - \frac{\sigma}{2} B B^{\mathrm{T}} P \right) x_i = -\sum_i x_i^{\mathrm{T}} (2\alpha P + Q) x_i \leq -2\alpha V - \sum_i \lambda_m(Q) \|x_i\|^2 \tag{11}$$

$$\sum_i 2x_i^{\mathrm{T}} P f_i(x_i, t) \leq \sum_i 2\lambda_M(P)\alpha_i \|x_i\|^2 \tag{12}$$

$$\sum_i 2x_i^{\mathrm{T}} P \sum_{j\neq i} [H_{ij}(x_j) + h_{ij}(x_j, t)] \leq$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sum_{i}\sum_{j\neq i}\lambda_M(P)[\lambda_M(R_{ij})+\alpha_{ij}]\|x_i\|\|x_j\| \quad (13)$$

将(11)—(13)代入(10), 令 $Y=(\|x_1\|\ \cdots\ \|x_N\|)^{\mathrm{T}}$, 则由$W(x)+W^{\mathrm{T}}(x)$的正定性, 在$\Omega$上有

$$\dot{V}\big|_{(9)}\leq -2\alpha V - Y^{\mathrm{T}}(W(x)+W^{\mathrm{T}}(x))Y\leq -2\alpha V \quad (14)$$

由此可知, 系统(1)在区域Ω上经状态反馈(8)以速率α按指数渐近稳定。

类似可证控制器(8)与系统(1)的各孤立子系统(3)构成的闭环系统也都是按指数渐近稳定的。即(8)是系统(1)的结构全息状态反馈控制器。(证毕)

利用文献[1]中的记号, 类似于[1]中的推论3.1, 可得如下推论:

推论 1　若系统(1)满足假定1和假定2, 且:

1) $\forall x_j\in\Omega_j$, 存在常值矩阵L_{ij}使$|R_{ij}(x_j)|\leq L_{ij}$, $i,j=1,2,\cdots,N$, $i\neq j$;

2) $W+W^{\mathrm{T}}$为正定矩阵。

则系统(1)在区域$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_N$上, 可经线性全息控制器(8)按指数鲁棒分散镇定。其中$W=(\omega_{ij})_{N\times N}$是由

$$\omega_{ij}=\begin{cases}\frac{1}{2}\lambda_m(Q)-\lambda_M(P)\alpha_i, & i=j\\ -\lambda_M(P)(\lambda_M(L_{ij})+\alpha_j), & i\neq j\end{cases}$$

确定的常值矩阵。

注 2[1]　定理1与推论1的主要区别在于, 前者中$W(x)$是一个与系统状态有关的函数矩阵, 而后者中W是一个常值矩阵。后者与前者相比应用更容易, 但其结果相对较保守。

4　例　　子

考虑下面的不确定非线性组合系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{11}\\ \dot{x}_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u_1+f_1+\begin{bmatrix}0.2x_{21}\cos(x_{21}+x_{22})\\ 0.3x_{22}\sin(x_{21}+x_{22})\end{bmatrix}+h_{12}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{21}\\ \dot{x}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{21}\\ x_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u_2+f_2+\begin{bmatrix}0.35x_{11}e^{-|x_{11}|}\\ 0.4x_{12}e^{-|x_{12}|}\end{bmatrix}+h_{21}$$

容易验证其标称系统是完全可控的。取

$$R_{12}=\begin{bmatrix}0.2\cos(x_{21}+x_{22}) & 0\\ 0 & 0.3\sin(x_{21}+x_{22})\end{bmatrix}$$

$$R_{21}=\begin{bmatrix}0.35e^{-|x_{11}|} & 0\\ 0 & 0.4e^{-|x_{12}|}\end{bmatrix}$$

则$|R_{12}|\leq L_{12}$, $|R_{21}|\leq L_{21}$, 其中

$$L_{12}=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.3\end{bmatrix},\quad L_{21}=\begin{bmatrix}0.35 & 0\\ 0 & 0.4\end{bmatrix}$$

若不确定项满足条件

$$\|f_1\|\leq\frac{1}{3}\|x_1\|,\quad \|f_2\|\leq\frac{1}{3}\|x_2\|$$

$$\|h_{12}\|\leq 0.25\|x_2\|,\quad \|h_{21}\|\leq 0.25\|x_1\|$$

其中, $x_1=[x_{11}\ \ x_{12}]^{\mathrm{T}}$, $x_2=[x_{21}\ \ x_{22}]^{\mathrm{T}}$。取$\alpha=1$, $\sigma=4$, $Q=2I$, 可得

$$P=\begin{bmatrix}0.5475 & 0.1753\\ 0.1753 & 0.4891\end{bmatrix},\quad \lambda_M(P)=0.696$$

$$W=\begin{bmatrix}0.7680 & -0.3828\\ -0.4524 & 0.7680\end{bmatrix}$$

显然, 推论1的条件全部得到满足。保证闭环系统按指数渐近稳定的全息状态反馈控制器为

$$u_i=-0.7466x_{i1}-0.6277x_{i2},\quad i=1,2$$

取 $f_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}x_{11}\sin x_{11}\\ x_{12}\cos x_{12}\end{bmatrix}$, $f_2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}x_{21}\sin x_{21}\\ x_{22}\cos x_{22}\end{bmatrix}$

$$h_{12}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}x_{21}e^{-|x_{21}|}\\ x_{22}e^{-|x_{22}|}\end{bmatrix},\quad h_{21}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}x_{11}e^{-|x_{11}|}\\ x_{12}e^{-|x_{12}|}\end{bmatrix}$$

初始值$[x_{11}(0)\ \ x_{12}(0)\ \ x_{21}(0)\ \ x_{22}(0)]=[5\ \ -2\ \ -3\ \ 4]$。对系统进行数值仿真, 其结果如图1和图2所示。

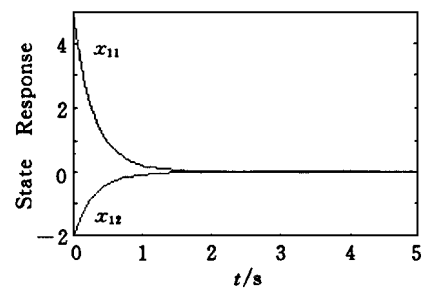

图 1　第 1 个子系统的状态响应曲线

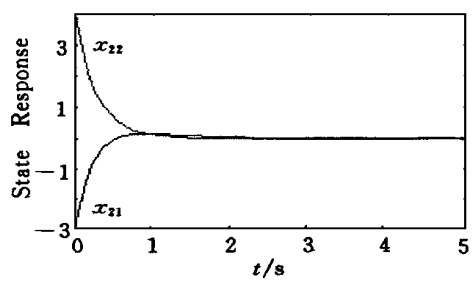

图 2　第 2 个子系统的状态响应曲线

(下转第 357 页)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

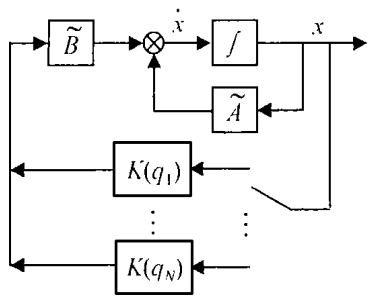

图 1　实现自治系统的仿真模型

2 2 3　深入研究切换系统的定性分析

采用这种描述形式, 同时赋予一定条件, 可深入进行切换系统的定性分析。例如, 假设限制 $Q \in [0, \epsilon]$, ϵ 为一非负极小常数。此时, 可将 $\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{N} A^{[i]} q(t)^i x(t)$ 分解为 $A^{[0]} x(t)$ 和 $\sum_{i=1}^{N} A^{[i]} q(t)^i x(t)$ 两部分。由于 $q(t)$ 的取值很小, 若结构系数矩阵满足某些较好的条件, 系统的性能基本则由 $A^{[0]}$ 决定。这为切换系统的定性研究提供了一个新的思路。

3　结　　语

本文针对线性切换系统提出了一个新的数学模型, 所得结果只是较初步的, 还有很多问题值得深入研究。比如, 插值点的选定, 如何确定最佳插值点, 以便简化系统结构; 得到矩阵结构系数以后, 如何进一步进行系统的性能分析等等。这有待于另文介绍。

参 考 文 献

1　R L Grossman, A Nerode, A P Ravn *et al*. Hybrid systems: Lecture notes in computer science. New York: Springer- Verlag, 1993

2　P Antsaklis, V Kohn, A Nerode *et al*. Hybrid systems Ⅱ: Lecture notes in computer science. New York: Springer- Verlag, 1995

3　R Alur, T Henzinger, E Sontag. Hybrid systems Ⅲ: Lecture notes in computer science. New York: Springer - Verlag, 1996

4　P Antsaklis, W Kohn, M Lemmon *et al*. Hybrid systems: Lecture notes in computer science. New York: Springer- Verlag, 1998

作 者 简 介

谢广明　男, 1972 年生。1996 年于清华大学应用数学系获应用数学专业和自动控制理论与应用专业双学士学位, 同年保送清华大学自动化系攻读博士学位。主要研究方向为混合动态系统, 切换系统的建模、分析与控制等。

郑大钟　见本刊 1997 年第 12 卷第 2 期第 108 页。

(上接第 347 页)

5　结　　语

本文针对一类不确定非线性组合大系统, 研究了系统可用结构全息状态反馈控制器分散镇定的问题, 设计出一种线性全息控制器可使系统按指数渐近稳定。最后的数值仿真例子验证了所给结果的有效性。需要指出的是, 本文讨论的是组合大系统具有结构相同的子系统, 但其结果很容易推广到子系统满足一定条件(如相应的矩阵具有相同维数)而不完全相同的不确定组合大系统的分散镇定, 此时的线性分散控制器已不再具有全息性质。

参 考 文 献

1　Yan X G, Wang J J, Lu X Y *et al*. Decentralized output feedback robust stabilization for a class of nonlinear interconnected systems with similarity. IEEE Trans on Autom Contr, 1998, 43(2): 294_ 299

2　Wu H, Mizukami K. Exponential stability of a class of nonlinear dynamical systems with uncertainties. Syst Contr Lett, 1993, 21(3): 307_ 313

3　Chen Y H, Leitmann G. Robustness of uncertain systems in the absence of matching condition. Int J Contr, 1987, 45(5): 1527_ 1542

4　Emelyanovm S V. Discontinuous output feedback stabilizing in uncertain MIMO plant. Int J Contr, 1992, 55(1): 83_ 107

5　Qu Z. Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties. Syst Contr Lett, 1992, 18(4): 301_ 307

6　张嗣瀛. 复杂控制系统的对称性及相似结构. 控制理论与应用, 1994, 11(2): 231—237

7　Callier F, Desoer C A. Linear system theory. New York: Springer, 1991

8　Banks S P, Aliurani S K. Lie algebra and the stability of nonlinear systems. Int J Contr, 1994, 60(2): 315_ 329

作 者 简 介

徐兆棣　男, 1955 年生。沈阳师范学院数学计算机系副教授, 东北大学在读博士生。研究方向为复杂控制系统的结构性研究及鲁棒控制。

张嗣瀛　男, 1925 年生。东北大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 中国科学院院士。主要研究方向为对策论及复杂控制系统结构分析。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net