

文章编号: 1001-0920(2003)04-0460-04

线性多变量离散系统全程滑模变结构控制

米 阳¹, 李文林², 井元伟¹, 刘晓平¹

(1 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004; 2 河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453002)

摘 要: 讨论线性多变量离散不确定系统滑模变结构控制问题。利用全程滑动模态的思想, 通过构造切换函数, 使系统的轨线一开始便落在切换面上, 缩短了到达时间, 增强了系统的鲁棒性; 利用系统的摄动、干扰与采样时间的关系, 改进了控制律的设计, 使结论条件更符合物理意义。仿真实例说明了该方法的有效性。

关键词: 不确定离散时间系统; 变结构控制; 滑动模态

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Global sliding mode control for uncertain discrete time systems

M I Yang¹, L I Wen-lin², J I N G Yuan-wei¹, L I U X iao-ping¹

(1. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxing 453002, China)

Abstract A switching surface for multi-variable uncertain discrete time systems is designed by using global sliding mode method. This approach guarantees that the trajectory of the system arrives at the switching surface at the very beginning. The reaching time is reduced and the system robustness is improved. The research also deduces the design of control law via the relationship among the parameter variation, uncertain disturbance and sampling time, which makes the conclusion more valuable in physics and is easy to design the control law. The simulation results show that the approach is effective.

Key words: Uncertain discrete time systems; Variable structure control; Sliding mode

1 引言

随着变结构系统理论^[1,2]的发展, 离散系统的变结构控制得到了广泛的研究^[3,4]。在变结构控制系统中, 系统的运动可分为两个阶段: 第1阶段是到达运动, 即由到达条件保证系统运动在有限时间内从任意初始状态到达切换面; 第2阶段是系统在控制律的作用下保持滑模运动。变结构控制的优点在于其滑动模态具有鲁棒性, 即系统只有在滑动阶段才具有对参数摄动和外界干扰的不敏感性。缩短到达滑模时间将有效地改善系统的动态性能, 而如何缩短

到达时间则是变结构控制的一个重要的研究方向。

文献[5]提出了全程滑模的思想, 并利用这一思想研究了连续系统的变结构控制。离散系统与连续系统相比有其新的特点。本文针对离散系统的滑模控制, 在文献[5]的基础上研究不确定离散系统。选择切换函数 $s(x)$, 使系统轨线一开始就落在切换面上, 并通过控制律的构造将系统运动保持在切换面附近, 使系统运动始终具有理想滑模的优良性能。

2 系统描述

考虑如下离散不确定系统

收稿日期: 2002-06-18; 修回日期: 2002-08-31。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60274099); 教育部博士点基金资助项目(20020145007)。

作者简介: 米阳(1976—), 女, 河南南阳人, 博士生, 从事复杂系统、变结构控制等研究; 井元伟(1956—), 男, 辽宁西丰人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统、相似性结构分析等研究。

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \\ (A + \Delta A)x(k) + Bu(k) + Df(k) & \\ k = 0, 1, \cdots & \end{aligned} \quad (1)$$

其中: 状态变量 $x(k) \in R^n$, 控制向量 $u(k) \in R^m$, 外界干扰 $f(k) \in R^l$; (A, B) 完全能控, B 列满秩。

假设1 系统的摄动和外干扰有界, 即

$$\|\Delta A\| \leq \psi_a, \quad \|f\| \leq \psi_f \quad (2)$$

其中 ψ_a 和 ψ_f 为已知正常数。

假设2 矩阵 ΔA 和 D 满足匹配条件, 即

$$\text{rank}(\Delta A, B) = \text{rank}(D, B) = \text{rank}(B) \quad (3)$$

3 主要结果

3.1 切换函数构造

选取切换函数

$$s(x, k) = Cx(k) - CE(k)x(0) \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} E(k) &= \begin{bmatrix} E_1(k) & 0 \\ 0 & E_2(k) \end{bmatrix} \\ E_1(k) &= \begin{bmatrix} \beta_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_{n-m}^k \end{bmatrix} \\ E_2(k) &= \begin{bmatrix} \beta_{n-m+1}^k & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

C 的选取参考文献[6], 令 $C = [C_1, C_2]$ 。其中: $C_1 \in R^{(n-m) \times (n-m)}$, $C_2 \in R^{m \times m}$ 为可逆阵; $|\beta_i| < 1, i = 1, \cdots, n$ 。由式(4)易知 $s(x(0)) = 0$, 即系统一开始便处于理想滑动模态区。

利用以上构造的切换函数定义如下超平面带

$$S_0^\Delta = \{x \in R^n | s^T s < \Delta^2\} \quad (6)$$

其中 Δ 可视为切换带的宽度。

3.2 控制律设计

本文用趋近律^[6]来构造控制 u_0 。趋近律一般表示为

$$\begin{aligned} s(k+1) - s(k) = & \\ -\epsilon T \text{sgn } s(k) - qTs(k) & \end{aligned} \quad (7)$$

其中: ϵ 和 q 均为对角阵, 对角元分别为 ϵ_i 和 q_i ; T 为采样周期, $0 < Tq_i < 1, \epsilon_i, q_i > 0$ 。

将方程(1)代入式(4), 解得控制

$$\begin{aligned} u(k) = & \\ -(CB)^{-1}C\Delta Ax(k) - (CB)^{-1}CDf(k) - & \\ (CB)^{-1}[C(A - I)x(k) - C(E(k+1) - & \\ E(k))x(0) + \epsilon T \text{sgn } s(k) + qTs(k)] & \end{aligned} \quad (8)$$

由于 u 中含有不确定项, 所以在实际中不能实现。为

构造可行的 u , 现给出如下假设:

假设3 由假设1知 ΔA 和 $f(k)$ 有界, 不妨设其上下界的估计值已知, 令

$$\begin{cases} F_1^+ = \sup_{\|\Delta A\| \leq \psi_a} C\Delta Ax(k) \\ F_2^+ = \sup_{\|f(k)\| \leq \psi_f} CDf(k) \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} F_1^- = \inf_{\|\Delta A\| \leq \psi_a} C\Delta Ax(k) \\ F_2^- = \inf_{\|f(k)\| \leq \psi_f} CDf(k) \end{cases} \quad (10)$$

由此可得如下定理:

定理1 选择控制

$$u(k) = \begin{cases} u_{eq} + u^+, & s(k) > 0 \\ u_{eq} + u^-, & s(k) < 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -(CB)^{-1}[C(A - I)x(k) + \\ & C(E(k) - E(k+1))x(0)] \\ u^+ &= (CB)^{-1}[-\epsilon T \text{sgn } s(k) - \\ & qTs(k) - F_1^+ - F_2^+] \\ u^- &= (CB)^{-1}[-\epsilon T \text{sgn } s(k) - \\ & qTs(k) - F_1^- - F_2^-] \end{aligned}$$

则系统(1)满足到达条件。

证明参见文献[6]。

注1 由定理1可估计出 $\Delta s(k)$ 的一个界。当 $s(k) > 0$ 时, 有 $s(k+1) - s(k) \geq -\Delta - \|s(k)\|$; 当 $s(k) < 0$ 时, 有 $s(k+1) - s(k) \leq \Delta + \|s(k)\|$ 。两种情况皆有 $\|s(k+1)\| < \max\{\|s(k)\|, \Delta\}$, 所以某个时刻后系统的运动必将进入并保持在切换带 S_0^Δ 内。

3.3 稳定性分析

为了证明系统的稳定性, 现给出一个定义:

定义1 若 $x(k)$ 有界且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k)\| \leq \Delta$, 则

称 $x(k)$ 为 Δ 渐近稳定的。

定理2 选择式(2)构造的切换函数 $s(x(k))$ 和定理1构造的控制律, 可保证系统(1)具有渐近稳定的理想滑动模态和 Δ 渐近稳定的实际滑动模态。

证明 首先证明系统(1)的理想滑动模态是稳定的。系统(1)的简约型为

$$x_1(k+1) = A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} x_2(k+1) = & \\ A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + & \\ B_2u(k) + B_2\tilde{A}x(k) + B_2\tilde{D}f(k) & \end{aligned} \quad (13)$$

设 x_1^* 代表理想滑动模态运动轨线, 则系统的理想滑动模态方程为

$$x_1^*(k+1) = A_{11}x_1^*(k) + A_{12}x_2^*(k) \quad (14)$$

$$C_1x_1^*(k) + C_2x_2^*(k) - CE(k)x(0) = 0 \quad (15)$$

由式(15)得

$$x_2^*(k) = -C_2^{-1}C_1x_1^*(k) + C_2^{-1}CE(k)x(0) \quad (16)$$

将式(16)代入(14),可使滑动方程化为如下 $n-m$ 维方程

$$x_1^*(k+1) = (A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1)x_1^*(k) + A_{12}C_2^{-1}CE(k)x(0) \quad (17)$$

记 $\bar{A} = A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1$, $\bar{I} = A_{12}C_2^{-1}CE(k)x(0)$ 。由切换函数中 C 的构造,知 $|\lambda(\bar{A})| < 1$, 且 $\bar{A} - I$ 可逆。方程(17)两边同时加 $(\bar{A} - I)^{-1}\bar{I}$, 得

$$x_1^*(k+1) + (\bar{A} - I)^{-1}\bar{I} = \bar{A}[x_1^*(k) + (\bar{A} - I)^{-1}\bar{I}] \quad (18)$$

由切换函数的构造知 $\bar{A}$ 有期望的稳定极点, 所以

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_1^*(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} -(\bar{A} - I)^{-1}\bar{I} = \lim_{k \rightarrow \infty} -(\bar{A} - I)^{-1}A_{12}C_2^{-1}CE(k)x(0) \quad (19)$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时, $E(k) \rightarrow 0$, 所以 $x_1^*(k) \rightarrow 0$, 理想滑动模态是渐近稳定的。

然后证明实际滑动模态是 Δ 渐近稳定的。由前面推导知理想滑动模态方程为

$$x_1^*(k+1) = (A_{11} - A_{12}C_2^{-1}C_1)x_1^*(k) + A_{12}C_2^{-1}CE(k)x(0) \quad (20)$$

由

$$s(k) = C_1x_1(k) + C_2x_2(k) + CE(k)x(0) \quad (21)$$

可知理想切换流型附近的运动为

$$x_1(k+1) = \bar{A}x_1(k) + A_{12}C_2^{-1}s(k) + A_{12}C_2^{-1}CE(k)x(0) \quad (22)$$

记 $e(k) = x_1(k) - x_1^*(k)$, 则误差方程为

$$e(k+1) = \bar{A}e(k) + A_{12}C_2^{-1}s(k) \quad (23)$$

解该误差方程, 得

$$e(k) = \bar{A}^k e(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{A}^{k-i-1} A_{12}C_2^{-1}s(i) \quad (24)$$

所以

$$e(k+1) = \bar{A}^{k+1} e(0) + \sum_{i=0}^k \bar{A}^{k-i} A_{12}C_2^{-1}s(i) \quad (25)$$

由 $\bar{A}$, C_1 和 C_2 的选取知

$$\bar{A} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-m} \end{bmatrix} P^{-1}$$

其中 P 为可逆阵。不妨取 $\bar{\lambda} = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_{n-m}|\} < 1$, 则

$$e(k+1) = P \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-m}^{k+1} \end{bmatrix} P^{-1} e(0) + \sum_{i=0}^k P \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-i} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-m}^{k-i} \end{bmatrix} P^{-1} A_{12}C_2^{-1}s(i)$$

由此得

$$\begin{aligned} \|e(k+1)\| &\leq \|P\| \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-m}^{k+1} \end{bmatrix} P^{-1} \|e(0)\| + \\ &\sum_{i=0}^k \|P\| \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-i} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-m}^{k-i} \end{bmatrix} P^{-1} \|A_{12}C_2^{-1}\| \|s(i)\| \\ \|e(k+1)\| &\leq \|P\| \|P^{-1}\| \|e(0)\| \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-m}^{k+1} \end{bmatrix} + \\ &\|s(i)\| \|P\| \|P^{-1}\| \|A_{12}C_2^{-1}\| \times \\ &\left\| \sum_{i=0}^k \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-i} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n-m}^{k-i} \end{bmatrix} \right\| \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \|e(k+1)\| &\leq \|P\| \|P^{-1}\| \|e(0)\| |\bar{\lambda}^{k+1}| + \\ &\Delta \|P\| \|P^{-1}\| \|A_{12}C_2^{-1}\| \left\| \sum_{i=0}^k \bar{\lambda}^{k-i} \right\| \end{aligned}$$

记 $M_1 = \|P\| \|P^{-1}\| \|e(0)\|$, $M_2 = \Delta \|P\| \|P^{-1}\| \|A_{12}C_2^{-1}\|$ 。因为

$$\sum_{i=0}^k \bar{\lambda}^{k-i} < \frac{1}{1-\bar{\lambda}}$$

所以

$$\|e(k+1)\| \leq M_1 |\bar{\lambda}^{k+1}| + \frac{M_2}{1-\bar{\lambda}} \Delta$$

当 k 充分大时, $|\bar{\lambda}^{k+1}| \rightarrow 0$ 。于是有

$$\|e(k+1)\| \leq \frac{M_2}{1-\bar{\lambda}} \Delta$$

记 $M_3 = \frac{2M_2}{1-\lambda^*}$, 则得 $\|e(k+1)\| \leq M_3\Delta$ 。因为

$x_1(k) = x_1(k) - x_1^*(k) + x_1^*(k)$, 所以

$$\begin{aligned} \|x_1(k)\| &\leq \\ \|x_1(k) - x_1^*(k)\| + \|x_1^*(k)\| &= \\ \|e(k)\| + \|x_1^*\| &\leq M_3\Delta + \|x_1^*\| \end{aligned}$$

因为理想滑模渐近稳定, 即 $x_1^* \rightarrow 0$, 所以当 k 充分大时, 有 $\|x_1(k)\| \leq 2M_3\Delta$ 。进而有 $x_2(k) = C_2^{-1}(s(k) - C_1x_1(k))$, 所以

$$\|x_2(k)\| \leq \|C_2^{-1}\| \Delta + \|C_2^{-1}C_1\| \|x_1(k)\|$$

从而当 k 充分大时, 有

$$\|x(k)\| \leq \|x_1(k)\| + \|x_2(k)\| \leq M_4\Delta$$

其中

$$M_4 = 2M_3 + \|C_2^{-1}\| + 2\|C_2^{-1}C_1\|M_3$$

记区域 $N = \{x \mid \|x\| \leq M_4\Delta\}$ 。则当 k 充分大时, $x(k) \in N \cap S^{\Delta}$, 即实际滑模是 Δ 渐近稳定的。□

4 系统仿真

考虑如下不确定离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \\ (A + \Delta A)x(k) + Bu(k) + Df(k) \end{aligned}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad \Delta A = 0$$

$$B = [0 \ 1]^T, \quad D = [0 \ 1]^T$$

$f(k)$ 是不确定项。

取常规切换函数 $s_1(x(k)) = Cx(k)$ 和本文设计的切换函数 $s_2(x(k)) = Cx(k) - CE(k)x(0)$, 利用极点配置选择 $C = [1 \ 1]$, 使滑动方程具有期望的极点 $1/2$, 并设

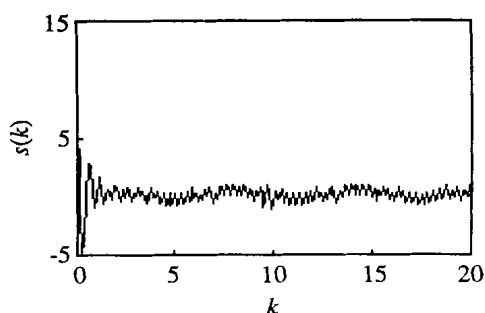
$$E(k) = \begin{bmatrix} 1/2^k & 0 \\ 0 & 1/2^k \end{bmatrix}$$

$$\epsilon T = 0.25, \quad qT = 0.5$$

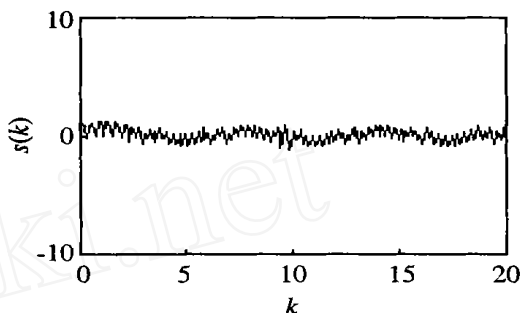
仿真结果如图1所示。其中: 图1(a)和图1(b)是当系统含有正弦不确定项时, 利用传统方法和本文方法得到的系统切换函数变化曲线; 图1(c)和图1(d)是系统含有余弦不确定项时, 利用传统方法和本文方法得到的系统切换函数变化曲线。由图可以看出, 与常规方法相比, 本文设计的方法使系统运动一开始便落在滑动模态上, 缩短了到达时间, 增强了系统的鲁棒性。

5 结 语

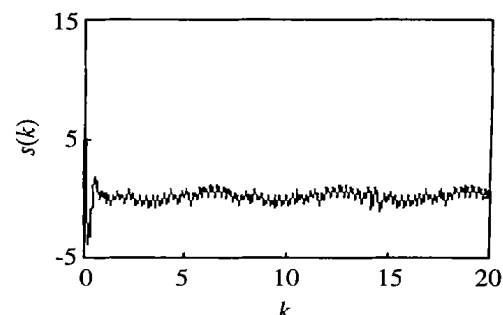
本文利用全程滑动模态的思想, 通过对不确定离散系统构造切换函数, 使得系统一开始便能到达滑模面, 缩短了到达过程, 充分利用了变结构系统只有在滑动模态才具有的鲁棒性的优势, 并将切换函



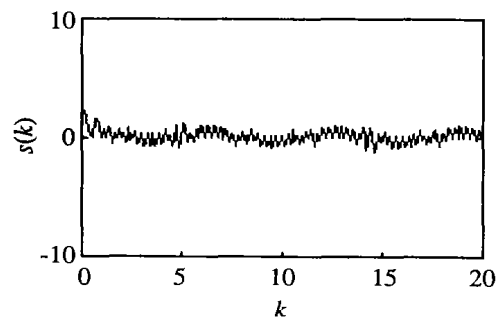
(a) 传统方法切换函数的变化



(b) 本文方法切换函数的变化



(c) 传统方法切换函数的变化



(d) 本文方法切换函数的变化

图1 切换函数 $s(k)$ 变化曲线

数和滑动模态带的构造与控制器的设计有机结合, 充分发挥了系统自身的优势, 可抑制不确定性和离散化后对系统产生的负面影响, 保证系统的渐近稳定性。

(下转第467页)

下推论:

推论 2 如果存在矩阵 K 及正定矩阵 $P > 0$, 使得如下 Riccati 矩阵不等式成立

$$(A + A_1 + B_2 K)^T P (A + A_1 + B_2 K) - P < 0 \quad (11)$$

则采用无记忆状态反馈控制 (2) 时, 线性离散时滞系统 (1) 是渐近稳定的。

注 3 由推论 2 可以看出, 当时滞参数 $d = 0$ 时, 所得结论与无时滞线性系统是一致的; 而对于一般的滞后无关型控制器设计方案来说, 则得不到类似的结论。

4 结 语

本文基于适当的 Lyapunov 泛函, 对于存在状态时滞的线性离散时滞系统, 给出了滞后相关型 H_∞ 状态反馈控制器设计方案, 仅需求解一个相应的线性矩阵不等式即可求得满足设计要求的控制器, 且无需调整任何参数。当滞后常数较小时 (与系统参数相比较而言) 具有较小的保守性。

参考文献 (References):

- [1] V ladin ir B Ko manovskii, Jean Pierre Richard Stability of some linear system s w ith delays[J] *IEEE T rans A utom atic Control*, 1999, 44(5): 984-989

- [2] Bohyung L ee, Jang Gyu L ee Robust stability and stabilization of linear delayed system s w ith structured uncertainty[J] *A utom atica*, 1999, 35(6): 1149-1154
- [3] Cheng Chu w ang Decentralized robust H_∞ control of uncertain delay large-scale system s[J] *A cta A utom atica Sinica*, 2001, 27(3): 361-366
- [4] Jong Hae K im, Hong Bae Park H_∞ state feedback control for generalized continuous /discrete time-delay system [J] *A utom atica*, 1999, 35: 1443-1451
- [5] Xu Shengyuan, L am James, Yang Chengwu Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time system s w ith state delay [J] *System s & Control L etters*, 2001, 43: 77-84
- [6] Yu L i, Feng Hao Guaranteed cost control of discrete-time uncertain time-delay system s[J] *A cta A utom atica Sinica*, 2001, 27(3): 392-396
- [7] Cao Yongyan, Sun Youxian Cheng Chu w ang Delay-dependent robust stabilization of uncertain system s w ith multiple state delays[J] *IEEE T rans A utom atic Control*, 1998, 43(11): 1608-1612
- [8] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, et al *L inear M atrix Inequalities in System and Control Theory* [M] Philadelphia: S I A M , 1994

(上接第 463 页)

参考文献 (References):

- [1] U tkin V I Variable structure system s w ith sliding modes [J] *IEEE T rans A utom atic Control*, 1977, 22(20): 212-222
- [2] Furuta K. Sliding mode control of variable structure control system s [J] *System Control L etters*, 1990, 14(2): 145-152
- [3] 高为炳 离散时间系统的变结构控制[J] *自动化学报*, 1995, 21(2): 154-161
(Cao W B. Variable structure control of discrete-time system s[J] *A cta A utom atica Sinica*, 1995, 21(2): 154-161.)
- [4] 姚琼荟, 黄继起, 吴汉松 变结构控制系统[M] 重庆: 重庆大学出版社, 1997.

- [5] 张科, 周凤岐 不确定性多变量系统的全程滑模变结构控制方案设计[J] *控制理论与应用*, 1999, 16(2): 221-224
(Zhang K, Zhou F Q. Design of global sliding mode variable structure control for uncertain multivariable linear system s [J] *Control Theory and Applications*, 1999, 16(2): 221-224.)
- [6] 高为炳 变结构控制的理论及设计方法[M] 北京: 科学出版社, 1998
- [7] 高为炳, 程勉 变结构控制的品质控制[J] *控制与决策*, 1989, 4(4): 1-6
(Gao W B, Cheng M. Quality of variable structure control system s[J] *Control and Decision*, 1989, 4(4): 1-6.)