

文章编号: 1001-0920(2003) 02-0159-05

线性广义时滞系统的 H_∞ 状态反馈控制器

冯俊娥, 程兆林

(山东大学 数学与系统科学学院, 山东 济南 250100)

摘要: 首先利用线性矩阵不等式(LMI)方法, 给出线性广义时滞系统稳定的一个充分条件; 然后讨论线性广义时滞系统的 H_∞ 状态反馈控制, 给出控制器存在的充分条件, 同时给出控制器的设计, 控制器可由线性矩阵不等式解得; 最后举例说明了所提出方法的可行性。

关键词: 广义时滞系统; 线性矩阵不等式; H_∞ 控制

中图分类号: TP13

文献标识码: A

H_∞ state feedback control for linear singular systems with time-delay in state

FENG Jun-e, CHENG Zhao-lin

(School of Mathematics and System Science, Shandong University, Ji nan 250100, China)

Abstract: Using the method of linear matrix inequality (LMI), H_∞ state feedback control problem for linear singular systems with time-delay in state is discussed. A sufficient condition which guarantees the asymptotical stability of the closed-loop system is given. Furthermore, one sufficient condition for the existence of an H_∞ state feedback controller is shown. The controller can be obtained via solving LMIs. Finally, an example is given to illustrate the validity of the proposed method.

Key words: Singular time-delay system; LMI; H_∞ control

1 引言

为适应近代科学技术的发展以及大型工程技术的需要, 人们提出了非传统数学模型描述的广义系统。信息传递等因素致使系统普遍存在滞后现象^[1, 2], 因而人们又提出滞后广义系统^[3, 4]。滞后广义系统的结构相当复杂^[4], 既不同于无滞后的广义系统, 又不同于通常的滞后系统。

H_∞ 控制理论是鲁棒控制理论的一个重要分支, 近年来随着无滞后线性系统 H_∞ 理论的日趋成熟和完善, 滞后线性系统的 H_∞ 控制理论也得到了相应的发展^[5, 6]。但由于广义滞后系统结构的复杂性, 致使对滞后广义系统的 H_∞ 控制问题的研究仍

处于初始阶段^[4]。本文利用线性矩阵不等式方法, 讨论一般的广义时滞系统 H_∞ 控制问题, 给出了问题可解的一个充分条件以及控制器设计。

2 问题描述与预备知识

考虑如下线性广义时滞系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + A\tau x(t-\tau) + Bu(t) + Dw(t) \\ z(t) = Cx(t) + C\tau x(t-\tau) + B_1u(t) + D_1w(t) \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期: 2001-12-10; 修回日期: 2002-03-25。

基金项目: 国家重点基础发展规划基金资助项目(1980020300); 教育部高教博士学科专项科研基金资助项目(98042212); 山东省自然科学基金资助项目(Q99A07)。

作者简介: 冯俊娥(1971—), 女, 山东聊城人, 博士生, 从事时滞系统的研究; 程兆林(1939—), 男, 浙江宁波人, 教授, 博士生导师, 从事多变量控制理论与应用、非线性系统等研究。

其中: $x(t) \in R^n$ 为系统的状态向量, $u(t) \in R^m$ 为控制输入, $w(t) \in R^q$ 为干扰输入, $z(t) \in R^r$ 为控制输出, $\tau > 0$ 为滞后常数, $\mathcal{Q}_t$ 为任一连续的满足相容性条件的初始函数, 各系数矩阵为适维常阵. 特别地, $\text{rank } E = p < n$. 不失一般性, 假设 $C\tau$, B_1 和 D_1 均为零矩阵, 否则可通过状态扩维方式将系统(1)转化为

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A\tau & 0 \\ C\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\tau) \\ \xi(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B_1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} D \\ D_1 \end{bmatrix} w(t)$$
$$z(t) = [C \quad I_s] \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$$

本文的目的是设计无记忆的状态反馈

$$u(t) = Kx(t) \tag{2}$$

其中 $K \in R^{m \times n}$ 为常阵, 使得系统(1)与反馈控制器(2)构成的闭环系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + A\tau x(t-\tau) + B_1w(t) \\ z(t) = Cx(t) \\ x(t) = \mathcal{Q}_t, \quad t \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{3}$$

满足如下条件: 1) 内稳定; 2) $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$, 其中: $A = A + BK$, $T_{zw}(s)$ 表示从干扰输入 $w(t)$ 到被控输出 $z(t)$ 的传递函数, $\gamma > 0$ 为给定常数. 为此本文给出如下引理:

引理 1^[7] 存在矩阵 $X \in R^{n \times n}$, 使得

$$XE^T = EX^T \geq 0, \quad XA^T + AX^T < 0$$

的充要条件是 (E, A) 是容许的, 即:

- 1) $\det(sE - A) \neq 0, \forall s \in C$;
- 2) $\text{degree}\{\det(sE - A)\} = \text{rank } E$;
- 3) $(sE - A)$ 的有限特征根在开左半平面.

另外, 本文在系统的稳定性定理证明过程中, 还将用到如下滞后广义系统稳定性的定义与引理^[8].

设有滞后广义系统

$$\tilde{A}\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{4}$$

其中: $\tilde{A}$ 为 $n \times n$ 奇异常数矩阵, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\mathcal{Q} \in [-\tau, 0], \tau > 0, f(t, \mathcal{Q}: [0, +\infty) \times C([-\tau, 0], R^n)$ 且连续, $f(t, 0) = 0, \forall t \geq t_0 \geq 0$.

方程(4)的初始条件为

$$x_{t_0} = \psi, \quad \psi \in C([-\tau, 0], R^n) \tag{5}$$

在给出稳定性概念之前, 还需引用如下记号:

- 1) 区间 $T_k = [0, t_k)$, 其中 $0 < t_k \leq +\infty$;
- 2) m 维连续可微向量函数 $q(t, x)$ 在 $[0, +\infty) \times R^n$ 上有定义;
- 3) $S_k(t_0, t_k)$ 为使得方程(4)至少在 $[t_0, t_k)$ 上有连续解的所有相容初始函数的全体;
- 4) $B(0, \delta) = \{\phi \in C([-\tau, 0], R^n); \|\phi\| < \delta, \delta > 0\}$.

定义 1^[8] 若 $\forall t_0 \in T_k, \forall \epsilon > 0$, 总存在 $\delta(t_0, \epsilon) > 0$, 使得 $\forall \psi \in B(0, \delta) \cap S_k(t_0, t_k)$, 方程(4)过初始条件 (t_0, ψ) 的解 $x(t, t_0, \psi)$ 满足 $\|q(t, x(t))\| \leq \epsilon$ 和 $\forall t \in [t_0, t_k)$, 则称方程(4)的零解关于 $\{q(t, x), T_k\}$ 稳定.

特别地, 若 δ 仅与 ϵ 有关, 而与 t_0 无关, 则称方程(4)的零解关于 $\{q(t, x), T_k\}$ 一致稳定.

定义 2^[8] 若方程(4)的零解关于 $\{q(t, x), [0, +\infty)\}$ 是稳定的, 且 $\forall t_0 \in [0, +\infty), \exists \Delta(t_0) > 0, \forall \psi \in B(0, \Delta(t_0)) \cap S_k(t_0, +\infty)$, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t, x(t, t_0, \psi)) = 0$$

则称方程(4)的零解关于 $\{q(t, x), [0, +\infty)\}$ 渐近稳定.

引理 2^[8] 设对方程(4)的任一解 $x(t)$, 存在楔函数 $u(\cdot)$ 和 $v(\cdot)$, 非负非减函数 $w(\cdot)$ 及连续 V 泛函 $V(t, \phi): [0, +\infty) \times C(-\tau, 0], R^n \rightarrow R$, 满足

$$u(\|q(t, x(t))\|) \leq V(t, x_t) \leq v(\|x_t\|)$$

$$D^+ V(t, x_t) \leq -w(\|q(t, x(t))\|)$$

则方程(4)的零解关于 $\{q(t, x), [0, t_k)\}$ 一致稳定, 其中 $t_k \leq +\infty$. 若 $s > 0, w(s) > 0$, 且当 $q(t, x(t))$ 有界时, 它沿方程解的导数 $\dot{q}(t, x(t))$ 有界, 则方程(4)的零解关于 $\{q(t, x), [0, t_k)\}$ 渐近稳定.

3 主要结果

首先利用引理 2 给出闭环系统(3)内稳定的一个充分条件:

定理 1 若存在矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 和正定阵 $Q \in R^{n \times n}$ 满足

$$\begin{cases} EP^T = PE^T \geq 0 \\ \hat{A}P^T + P\hat{A}^T + A\tau P^T Q^{-1}PA\tau^T + Q < 0 \end{cases} \tag{6}$$

则闭环系统(3)是内稳定的.

证明 与文献[8]中定理 8.7 证明方法类似.

由引理 1 知, 存在非奇异矩阵 M 和 N , 使得闭环系统(3)等价于系统

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= A_{11}y_1(t) + A_{12}y_1(t-\tau) + A_{12}y_2(t-\tau) \\ &\quad + A_{22}y_2(t-\tau) \end{aligned} \tag{7a}$$

$$0 = y_2(t) + A_{21}y_1(t-\tau) + A_{22}y_2(t-\tau) \tag{7b}$$

$$y(t) = N^{-1} \mathcal{Q}t = \mathcal{Q}t = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}(t) \\ \mathcal{Q}(t) \end{bmatrix} \quad t \in [-\tau, 0] \quad (7c)$$

记

$$\begin{cases} E = MEN = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{A} = \hat{M} \hat{A} N = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} \\ \bar{A}_\tau = M A_\tau N = \begin{bmatrix} A_{\tau 11} & A_{\tau 12} \\ A_{\tau 21} & A_{\tau 22} \end{bmatrix} \\ x(t) = N \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8)$$

注意到式(6)成立是 r. s. e 下的不变量, 因此对于系统(7), 存在矩阵 $\bar{P} \in R^{n \times n}$ 及正定矩阵 $\bar{Q} \in R^{n \times n}$, 满足

$$\bar{E} \bar{P}^T = \bar{P} \bar{E}^T \geq 0 \quad (9a)$$

$$\bar{A} \bar{P}^T + \bar{P} \bar{A}^T + \bar{A} \bar{P}^T \bar{Q}^{-1} \bar{P} \bar{A}^T + \bar{Q} < 0 \quad (9b)$$

显然满足上式的矩阵 $\bar{P}$ 形如 $\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}$, 且 $P_{11} >$

$0, \bar{P} \bar{E}^T = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 且 $\bar{P}$ 可逆。定义

$$q(t, y(t)) = y_1^T y_1$$

$$V(t, \mathcal{Q}) =$$

$$\Phi(0) P_{11}^{-1} \mathcal{Q}(0) +$$

$$\int_{-\tau}^0 [\Phi(s) \mathcal{Q}(s)] P^{-1} \bar{Q} P^{-T} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}(s) \\ \mathcal{Q}(s) \end{bmatrix} ds$$

$\forall \mathcal{Q} \in S_k(0, +\infty)$, 系统(7)过 $(0, \mathcal{Q})$ 的解记为 $y(t)$, 则

$$V(t, y_t) =$$

$$y_1^T(t) P_{11}^{-1} y_1(t) +$$

$$\int_{-\tau}^t [y_1^T(s) y_2^T(s)] \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} ds \quad (10)$$

且

$$\lambda_{11}^{-1} q(t, y(t)) \leq V(t, y_t) \leq$$

$$y_1^T(t) P_{11}^{-1} y_1(t) + \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y_t^T \cdot \tau \leq$$

$$(\bar{P}_{11}^{-1} + \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} \cdot \tau) y_t^T \cdot \tau$$

其中 λ_{11}^{-1} 表示 $\bar{P}_{11}^{-1}$ 的最小特征值, 又式(10)可写为

$$V(t, y_t) =$$

$$y^T(t) P^{-1} E y(t) +$$

$$\int_{-\tau}^t [y_1^T(s) y_2^T(s)] \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} ds \quad (11)$$

则

$$V(t, y_t) \Big|_{(7)} =$$

$$\begin{aligned} & y^T(t) P^{-1} E y(t) + y^T(t) E^T P^{-T} y(t) + \\ & y^T(t) P^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t) - \\ & y^T(t - \tau) \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t - \tau) = \\ & 2y^T(t) P^{-1} \bar{A} y(t) + y^T(t) P^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t) + \\ & 2y^T(t) P^{-1} \bar{A} y(t - \tau) - \\ & y^T(t - \tau) \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t - \tau) = \\ & 2y^T(t) P^{-1} \bar{A} y(t) + y^T(t) P^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t) = \\ & y^T(t) P^{-1} \bar{A} \bar{P}^T \bar{Q}^{-1} \bar{P} \bar{A}^T P^{-T} y(t) - \\ & (\bar{A}^T \bar{P}^{-T} y(t) - \\ & P^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t - \tau))^T \cdot P^T \bar{Q}^{-1} P \cdot \\ & (\bar{A}^T P^{-T} y(t) - P^{-1} \bar{Q} \bar{P}^{-T} y(t - \tau)) \leq \\ & y^T(t) P^{-1} (\bar{A} P^T + P \bar{A}^T + \\ & \bar{A} P^T \bar{Q}^{-1} P \bar{A}^T + \bar{Q}) P^{-T} y(t) = \\ & - y^T(t) W y(t) \leq - \lambda_W y^T(t) y(t) = \\ & - \lambda_W (y_1^T(t) y_1(t) + y_2^T(t) y_2(t)) \leq \\ & - \lambda_W y_1^T(t) y_1(t) \end{aligned}$$

这里 λ_W 表示 W 的最小特征值, 而 $W = -P^{-1}(\bar{A} P^T + P \bar{A}^T + \bar{A} P^T \bar{Q}^{-1} P \bar{A}^T + \bar{Q}) P^{-T}$ 。所以由引理2知, 系统(7)的零解关于 $q(t, y) = y_1^T(t) y_1(t)$ 一致稳定, 从而有: $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta(\epsilon) \in (0, \epsilon)$, 使得对 $\forall \mathcal{Q} \in S_k(0, +\infty) \cap B(0, \delta)$, 系统(7)过 $(0, \mathcal{Q})$ 的解满足 $y_1^T(t) y_1(t) \leq \epsilon^2$, 即 $q(t, y(t))$ 在 $[0, +\infty)$ 上有上界。设其界为 $M^2, M > 0$, 则对 $\forall t \in [0, +\infty)$, 有 $y_1(t) \leq M$ 。不失一般性, 可设对 $\forall t \in [-\tau, +\infty)$, 有 $y_1(t) \leq M$ 成立。

下证 $\forall t \in [0, +\infty)$, $|q(t, y(t))|$ 有上界。为此, 首先证 $\rho(A_{\tau 22}) < 1$, 这里 $\rho(\cdot)$ 表示矩阵的谱半径。

由 Schur 补知, 式(9b)成立当且仅当有

$$\begin{bmatrix} \bar{A} \bar{P}^T + P \bar{A}^T + \bar{Q} & \bar{A} \bar{P}^T \\ P \bar{A}^T & -\bar{Q} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (12)$$

成立, 令 $\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}$, 将 $\bar{P}, \bar{Q}$ 和式(8)代入(12), 得

$$\begin{bmatrix} P_{22} + P_{22}^T + Q_{22} & A_{\tau 22} P_{22}^T \\ P_{22} A_{\tau 22}^T & -Q_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

由于 $\bar{P}$ 可逆, 从而 P_{22} 可逆。上式两边左乘 $T = \text{diag}\{P_{22}^{-1}, P_{22}^{-1}\}$, 右乘 T^T , 则有

$$\begin{bmatrix} P_{22}^{-1} + P_{22}^{-T} + Q_{22} & P_{22}^{-1} A_{\tau 22} \\ A_{\tau 22}^T P_{22}^{-T} & -Q_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

其中 $Q_{22} = P_{22}^{-1} Q_{22} P_{22}^{-T} > 0$ 。上式两边左乘 $S = [-A_{\tau 22}^T, I]$, 右乘 S^T , 则有 $A_{\tau 22}^T Q_{22} A_{\tau 22} - Q_{22} < 0$ 。于是有 $\rho(A_{\tau 22}) < 1$, 所以存在正整数 N_0 , 当 $n \geq N_0$ 时,

$A_{\tau 22} < 1$ 。由系统(7)知

$$\begin{aligned} \dot{q}(t, y(t)) &= \\ 2 y^T(t) [A_{11} y_1(t) + A_{\tau 11} y_1(t - \tau) + \\ A_{\tau 12} y_2(t - \tau)] &\leq \\ 2 [A_{11} M^2 + A_{\tau 11} M^2 + \\ A_{\tau 12} M y_2(t - \tau)] & \end{aligned}$$

又对 $\forall t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, 由系统(7)有

$$\begin{aligned} -y_2(t) &= \\ A_{\tau 21} y_1(t - \tau) + A_{\tau 22} y_2(t - \tau) &= \\ A_{\tau 21} y_1(t - \tau) - A_{\tau 22} (A_{\tau 21} y_1(t - 2\tau) + \\ A_{\tau 22} y_2(t - 2\tau)) &= \\ A_{\tau 21} y_1(t - \tau) - A_{\tau 22} [A_{\tau 21} y_1(t - 2\tau) - \\ - A_{\tau 22} (A_{\tau 21} y_1(t - 3\tau) + A_{\tau 22} y_2(t - 3\tau))] & \end{aligned}$$

于是有

$$y_2(t) \leq \beta + A_{\tau 22} \beta + \dots + A_{\tau 22}^k \beta$$

其中 $\beta = \max\{A_{\tau 21} M, \max\{Q(\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}\}$, 所以

$$\begin{aligned} y_2(t) &\leq \\ \beta + A_{\tau 22} \beta + \dots + A_{\tau 22}^{N_0} \beta + \\ \dots + A_{\tau 22}^k \beta &\leq \\ M\beta + A_{\tau 22}^{N_0} (\beta + A_{\tau 22} \beta + \\ \dots + A_{\tau 22}^{k-N_0} \beta) &\leq \\ M\beta + A_{\tau 22}^{N_0} M\beta + A_{\tau 22}^{N_0} (\beta + \\ \dots + A_{\tau 22}^{k-2N_0} \beta) &\leq \dots \leq \\ \frac{M\beta}{1 - A_{\tau 22}^{N_0}} & \end{aligned}$$

其中 $M = \sum_{j=0}^{N_0-1} A_{\tau 22}^j$, 即 $y_2(t)$ 有界, 从而

$|q(t, y(t))|$ 有界。由引理2知, 系统(7)的零解关于 $\{y^T(t) y_1(t), [0, +\infty)\}$ 一致稳定且渐近稳定。

由于系统(7)的零解关于 $\{y^T(t) y_1(t), [0, +\infty)\}$ 一致稳定, 故 $\forall \epsilon > 0$, 取 $\delta \in (0, \epsilon)$, 使得 $\forall \varphi$

$B(0, \delta) \cap S_k(0, +\infty)$, $q(t, y(t)) = y^T(t) y_1(t) < \epsilon^2$ 。由上面证得 $y_2(t) \leq \bar{M}\beta$, 其中: $\bar{M} = M/(1 - A_{\tau 22}^{N_0})$, $\beta_1 = \max\{A_{\tau 21} \epsilon, \epsilon\}$, 故系统(7)的零解关于 $\{y(t), [0, +\infty)\}$ 一致稳定。

因为 $y_2(t) = -A_{\tau 21} y_1(t - \tau) - A_{\tau 22} y_2(t - \tau)$, 则:

若 $A_{\tau 22} = 0$, 由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = 0$, 则

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0.$$

若 $A_{\tau 22} \neq 0$, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $\forall \varphi \in B(0, \delta_0)$

$\cap S_k(0, +\infty)$, 有 $y(t) < 1$ 。若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0$ 不成立, 由于 $y_2(t) \leq 1, \forall t \in [0, +\infty)$, 故存在一序列 $\{t_n\}$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $t_n \rightarrow +\infty$, 使得 $y_2(t_n) \rightarrow \alpha_0, \alpha_0 \neq 0$ 。由于系统(7)的零解关于 $\{y^T y_1, [0, +\infty)\}$ 渐近稳定, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} y_2(t_n) &= \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} - (A_{\tau 21} y_1(t_n - \tau) + A_{\tau 22} y_2(t_n - \tau)) &= \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{\tau 22} y_2(t_n - \tau) & \end{aligned}$$

又由于序列 $\{y_2(t_n - \tau)\}$ 有界, 故 $\{y_2(t_n - \tau)\}$ 有收敛子列, 不妨设为其本身, 即存在 α , 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_2(t_n - \tau) = \alpha_1$$

故 $\alpha_0 = -A_{\tau 22} \alpha_1$ 。重复该过程, 可假定对 $\forall k$, 存在 α_k , 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_2(t_n - k\tau) = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

故 $\alpha_0 \leq A_{\tau 22}^k \alpha_k$ 。因为当 $k \geq N_0$ 时, $A_{\tau 22}^k < 1$, 又 $\{\alpha_k\}$ 有界, 所以有 $\alpha = 0$ 与 $\alpha \neq 0$ 矛盾, 故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = 0$ 。因此系统(7)的零解关于 $\{y, [0, +\infty)\}$ 渐近稳定, 从而闭环系统(3)的零解渐近稳定。□

推论1 若存在矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 和正定矩阵 $\tilde{Q} \in R^{n \times n}$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{P}E = E^T \tilde{P}^T \geq 0 \\ \tilde{P}\hat{A} + \hat{A}^T \tilde{P}^T + \tilde{Q} + \tilde{P}A\tau\tilde{Q}^{-1}A^T\tilde{P}^T < 0 \end{cases} \quad (15)$$

则系统(3)零解渐近稳定。

注1 当 $E = I_n$ 时, 推论1即为文献[9]中的定理1。

注2 当 $A\tau = 0$ 时, 由文献[7]知, 推论1的条件恰为相应的无滞后广义系统容许的充要条件。

下面给出系统(3)内稳定且满足 H_∞ 范数界, 即 $T_{zw}(s)_\infty \leq \gamma$ 的一个充分条件。

定理2 若存在矩阵 $P \in R^{n \times n}$ 和正定阵 $Q \in R^{n \times n}$ 满足

$$\begin{cases} PE = E^T P^T \geq 0 \\ P\hat{A} + \hat{A}^T P^T + Q + PA\tau Q^{-1}A^T P^T + \\ \gamma^2 PDD^T P^T + C^T C < 0 \end{cases} \quad (16)$$

则闭环系统(3)内稳定且 $T_{zw}(s)_\infty \leq \gamma$ 。

证明 由定理1知系统(3)内稳定。下证

$$T_{zw}(s)_\infty = \frac{z(t)_2}{w(t)_2} \leq \gamma$$

为了证明 $\gamma = w(t)_2$ 为 $z(t)_2$ 的上界, 本文引入

$$J = \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt$$

$$\dot{V}(x(t), t) dt$$

其中

$$V(x(t), t) = x^T(t) P E x(t) + \int_{-\tau}^t x^T(s) Q x(s) ds$$

与讨论正常系统一样, 当讨论系统的传递函数时, 设系统(3)的初始函数 $\varphi(t)$ 满足 $\varphi(0) = 0$ 。因此有 $V(x(0), 0) = 0$, 则

$$J = \int_0^\infty [z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t)] dt + V(x(\infty), \infty)$$

因而只需证明 $J \leq 0$ 即可。

$$\begin{aligned} J = & \int_0^\infty [z^T(t) z(t) - \gamma^2 w^T(t) w(t) + \\ & \dot{V}(x(t), t)] dt \leq \\ & \int_0^\infty [x^T(t) (C^T C + P \hat{A} + \hat{A}^T P^T + \\ & Q + P A \tau Q^{-1} A^T P^T) x(t) + \\ & x^T(t) P D w(t) + w^T(t) D^T P^T x(t) - \\ & \gamma^2 w^T(t) w(t)] dt \leq \\ & \int_0^\infty [x^T(t) (P \hat{A} + \hat{A}^T P^T + Q + \\ & P A \tau Q^{-1} A^T P^T + C^T C + \\ & \gamma^{-2} P D D^T P^T) x(t) - \gamma^2 (D^T P^T x(t) - \\ & \gamma^2 w(t))^T (D^T P^T x(t) - \gamma^2 w(t))] dt \leq \\ & \int_0^\infty x^T(t) (P \hat{A} + \hat{A}^T P^T + Q + \\ & P A \tau Q^{-1} A^T P^T + \\ & C^T C + \gamma^{-2} P D D^T P^T) x(t) dt \end{aligned}$$

由式(16)知, $J \leq 0$ 。□

注3 当 $E = I_n$ 时, 定理2即为文献[9]中的定理2。

注4 与注2类似, 当 $A\tau = 0$ 时, 定理2的条件(16)恰为相应的无滞后广义系统容许且满足 H_∞ 范数界的充要条件。

由定理2与Schur补得系统(1)的 H_∞ 状态反馈控制器的设计:

定理3 若存在矩阵 $P \in R^{n \times n}$, $K \in R^{n \times n}$ 和正定矩阵 $Q \in R^{n \times n}$ 满足如下LMI不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega & \bar{P}^T C^T & \bar{P}^T \\ C P & -I & 0 \\ \bar{P} & 0 & -Q \end{bmatrix} < 0$$

其中 $\Omega = A P + P^T A^T + B K + K^T B^T + \gamma^{-2} D D^T + A \tau Q A^T$, 则系统(1)的 H_∞ 控制问题有解, 即系统(3)

内稳定, 且满足 H_∞ 范数界 $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$ 。此时控制器 $u(t) = K x(t)$, 其中 $K = \overline{K} P^{-1}$ 。

证明 由式(16)知 P 可逆, 因而只需将式(16)中的两个不等式同时左乘 P^{-1} , 右乘 P^{-T} , 且令 $\bar{P} = P^{-T}$, $\bar{K} = K P$, $\bar{Q} = Q^{-1}$ 。□

例1 设计系统(1)的 H_∞ 状态反馈控制器(2)。系统(1)的各系数矩阵为

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$C = [0.2 \quad 0.1], \quad A\tau = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

当 $\gamma = 0.5$ 时, 由 Matlab 的 LMI 工具箱, 求得控制器(2)为

$$u(t) = [1.200 \quad 3 \quad 0.583 \quad 6] x(t)$$

参考文献(References):

- [1] Hale J K. *Theory of Functional Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [2] 刘永清, 唐功友. 大型动力系统的理论与应用——卷三: 滞后、稳定与控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1992.
- [3] Campbell S L. *Singular Systems of Differential Equations* [M]. San Francisco: Pitman, 1980.
- [4] 刘永清, 谢湘生. 大型动力系统的理论与应用——卷八: 滞后广义系统的稳定、镇定与控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.
- [5] Wen T, Yaling C. H_∞ -optimal control for descriptor systems[A]. *Proc of 12th IFAC World Congress* [C]. Sydney, 1993. 2: 201-204.
- [6] Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, et al. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach [J]. *Automatica*, 1997, 33(1): 669-673.
- [7] Dai L. *Singular Control Systems Lecture Notes in Control and Information Sciences* [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [8] 刘永清, 王伟, 李远清. 大型动力系统的理论与应用——卷七: 滞后广义系统解的基本理论与应用[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1997.
- [9] Joon Hwa Lee, Sang Woo Kim, Wook Hyun Kwon. Memoryless H_∞ controllers for state delayed systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(1): 159-162.