第21卷 第6期 控 制 与 决 策 2006年6月
Vol 21 No. 6 Control and Decision Jun. 2006

文章编号: 1001-0920(2006)06-0666-05

# 不确定时滞系统相容指标下的鲁棒容错控制器设计

张 刚, 王执铨
(南京理工大学 自动化系, 南京 210094)

**摘 要**: 研究了一类同时具有非线性不确定特性、干扰输入和时滞特性的线性系统鲁棒容错控制问题. 在更实际、更一般的执行器故障模式下, 利用线性矩阵不等式方法, 分析了与鲁棒稳定性能相容的 $H_\infty$ 扰动衰减性能指标的取值范围; 在指标相容的基础上, 给出了鲁棒 $H_\infty$ 容错控制器存在的充分条件, 以及容错控制器的构造性设计方法. 仿真实例验证了方法的有效性.

**关键词**: 容错控制; 鲁棒控制; 相容性理论; 时滞系统; 执行器故障
**中图分类号**: TP273 **文献标识码**: A

# Robust Fault-tolerant Controller Design for Nonlinear Uncertain Time-delay Systems with Constrains of Consistent Indices

*ZHANG Gang, WANG Zhi-quan*
(Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: ZHANG Gang, E-mail: zhanggang_njust@126.com)

**Abstract**: The problem of robust $H$-infinity fault-tolerant control system design for nonlinear uncertain time-delay systems with actuator failures is addressed. A more practical and general model of actuator failures is adopted. Based on linear matrix inequality approach, the consistency theory on robust stabilization index and $H$-infinity index for nonlinear uncertain time-delay systems is set up. Furthermore, sufficient conditions for the existence of robust $H$-infinity fault-tolerant controller is given in terms of LMIs. A simulation example shows the efficiency and necessity of the design method.

**Key words**: Fault-tolerant control; Robust control; Consistency; Time-delay systems; Actuator failures

## 1 引 言

现代工程系统朝着大规模、复杂化方向发展, 一旦系统发生故障就会造成人员与财产的巨大损失[1]. 因此, 为了提高系统的可靠性, 容错控制技术得到了广泛的重视和发展. 然而, 在容错控制中, 仅保证故障系统的稳定性是不够的, 还需考虑一些性能指标, 如鲁棒性、抗干扰性[2~5]等等. 目前, 对于多性能指标要求的容错控制系统设计问题, 工程论证人员往往是根据经验来选定各单项性能指标的取值范围, 至于所选定的性能指标是否相互矛盾、能否达到, 事先并不清楚, 所以容错控制中相容性理论的建立, 将为工程中合理选定性能指标提供必要的理论依据.

另一方面, 时滞与不确定性在实际工程系统中经常是不可避免的, 因此不确定时滞系统更接近实际系统, 其可靠控制问题也就具有更强的实际背景. 但是, 以往的研究主要集中于以线性形式表达的不确定时滞系统[6~9]. 严格来讲, 实际的控制系统除具有时滞特性外, 都具有非线性特性, 只是为了方便系统的分析与设计, 人们才采用线性化模型. 因此, 将模型中的不确定性部分描述为非线性函数更能反映实际控制系统[10].

本文研究了一类非线性不确定时滞系统的完整

**收稿日期**: 2005-05-06; **修回日期**: 2005-07-21.
**基金项目**: 国家自然科学基金项目(60234010).
**作者简介**: 张刚(1976—), 男, 四川遂宁人, 博士生, 从事故障检测与诊断、容错控制等研究; 王执铨(1939—), 男, 武汉人, 教授, 博士生导师, 从事兵器伺服系统、动态大系统的容错控制等研究.

性设计问题 采用了更一般的执行器故障模型, 它能够完整地包含"完全失效"、"部分失效"以及"正常"3 种典型的执行器工作状态; 利用线性矩阵不等式方法, 分析了鲁棒性能与 $H_\infty$ 扰动衰减性能间的相容性理论; 并在指标相容基础上, 给出了容错控制器的构造性设计方法

## 2 问题描述与引理

考虑下述非线性不确定时滞系统:

$$\dot{x}(t) = A_1x(t) + \Delta f_1(x(t), t) + A_2x(t-d) + \Delta f_2(x(t-d), t) + B_1\omega(t) + B_2u(t) + \Delta g(x(t), t)u(t), \quad (1)$$

$$z(t) = Cx(t), \quad (2)$$

$$x(t) = \varphi(t),\ t \in [-d, 0]. \quad (3)$$

其中: $x \in R^n$ 为状态向量, $u \in R^m$ 为控制输入, $\omega \in R^r$ 为干扰输入, $z \in R^p$ 为被控输出; $A_1, A_2, B_1, B_2, C$ 为具有适当维数的定常矩阵; $\Delta f_1, \Delta f_2$ 和 $\Delta g$ 为具有适当维数的非线性连续可微函数向量或矩阵 对系统中的不确定性作下述假设:

非线性不确定函数 $\Delta f_1, \Delta f_2$ 和 $\Delta g$ 具有如下形式:

$$\Delta f_1(x(t), t) = E_1\delta_f(x(t), t), \quad (4)$$

$$\Delta f_2(x(t-d), t) = E_2\delta_f(x(t-d), t), \quad (5)$$

$$\Delta g(x(t), t) = E_g\delta_g(x(t), t). \quad (6)$$

其中: $E_1, E_2$ 和 $E_g$ 为已知定常矩阵, $\delta_f(\cdot, \cdot)$ 和 $\delta_g(\cdot, \cdot)$ 为未知非线性连续可微函数向量, 满足增益有界条件:

$$\|\delta_f(x(t), t)\| \le \|W_f x(t)\|,\quad \forall x \in R^n, \forall t \in R; \quad (7)$$

$$\|\delta_g(x(t), t)u\| \le \|W_g u\|,\quad \forall x \in R^n, \forall t \in R. \quad (8)$$

这里: $W_f$ 和 $W_g$ 为加权矩阵, $\|\cdot\|$ 表示 Euclidean 范数 事实上, 由式(7) 可知

$$\|\delta_f(x(t-d), t)\| \le \|W_f x(t-d)\|, \quad (9)$$

$$\delta_f(0, t) = 0,\ \forall t \in R. \quad (10)$$

因此, $x(t) = 0$ 是自由系统的一个平衡点

对于控制输入 $u_i(t), i = 1, 2, \cdots, m$, 定义其故障后的输出信号为 $u_i^f$. 本文将采用如下的执行器故障模型:

$$u_i^f = \bar{\alpha}_i u_i + \varphi_i(u_i),\ i = 1, 2, \cdots, m. \quad (11)$$

其中: $\bar{\alpha}_i > 0$, 并且不确定函数 $\varphi_i(u_i)$ 满足

$$\varphi_i^2(u_i) \le \underline{\alpha}_i^2 u_i^2,\ i = 1, 2, \cdots, m. \quad (12)$$

此外, 故障信号参数对$(\underline{\alpha}_i\ \bar{\alpha}_i)$ 满足

$$0 \le \underline{\alpha}_i \le \bar{\alpha}_i \le 1,\ \underline{\alpha}_i + \bar{\alpha}_i \le 1.$$

**注 1** 本文采用的执行器故障模型在文献[11] 的基础上进行了适当的修改 显然, 当 $\underline{\alpha}_i = 0, \bar{\alpha}_i = 1$ 时, 第 $i$ 个执行器正常; 当 $\underline{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i$ 时, 故障模型包含了执行器 $i$ 完全失效情况; 而当 $\bar{\alpha}_i > \underline{\alpha}_i$ 时, 其描述了执行器 $i$ 部分失效 因此, 相对于仅考虑了正常和完全失效两种情况的故障模型而言, 本文所采用的故障模型更具有一般性, 也更符合实际情况

记

$$u^f = [u_1^f, u_2^f, \cdots, u_m^f]^{\mathrm T}, \quad (13)$$

$$\bar{\alpha} = \mathrm{diag}[\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \cdots, \bar{\alpha}_m], \quad (14)$$

$$\underline{\alpha} = \mathrm{diag}[\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2, \cdots, \underline{\alpha}_m], \quad (15)$$

$$\varphi(u) = [\varphi_1(u_1), \varphi_2(u_2), \cdots, \varphi_m(u_m)]^{\mathrm T}. \quad (16)$$

在上述的执行器故障模型下, 故障闭环系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = A_1x(t) + \Delta f_1(x(t), t) + A_2x(t-d) + \Delta f_2(x(t-d), t) + B_2(\bar{\alpha}u + \varphi(u)) + \Delta g(x(t), t)(\bar{\alpha}u + \varphi(u)) + B_1\omega(t). \quad (17)$$

下面, 先给出不确定时滞故障系统(17) 的鲁棒稳定性能与 $H_\infty$ 扰动衰减性能间的相容性概念:

**定义 1** 对于不确定时滞故障系统(17), 给定常数 $\gamma > 0$, 如存在定常状态反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$, 使闭环系统(17) 同时满足下述条件:

1) 对任意容许的不确定性以及预先指定的执行器子集合中任意的执行器故障, 系统保持鲁棒渐近稳定;

2) 系统对外界扰动输入具有一定的抑制性能, 其 $H_\infty$ 性能指标是有界的, 满足 $\|H(s)\|_\infty < \gamma$

则称故障系统的鲁棒性能与 $H_\infty$ 性能指标相容

在上述的相容性概念下, 本文的设计目标可描述如下: 对于不确定时滞故障系统(17) 设计定常状态反馈控制器 $u(t) = Kx(t)$, 给出存在鲁棒容错控制器的充分条件; 若存在满足条件 1) 的控制器, 研究与之相容的 $H_\infty$ 性能指标的取值范围; 当系统鲁棒稳定性能与 $H_\infty$ 扰动衰减性能指标 $\gamma$ 相容时, 给出鲁棒 $H_\infty$ 容错控制器的构造性设计方法

本文将以LMI的形式给出同时满足条件 1) 和 2) 的鲁棒 $H_\infty$ 容错控制器的设计方法 下面先引入几个引理:

**引理 1**[4] 设 $X, Y, Z$ 为任意具有相同维数的向量或矩阵, $\epsilon, \beta$ 为任意正常数, 则下述不等式成立

$$2X^{\mathrm T}Y \le \epsilon^{-1}X^{\mathrm T}X + \epsilon Y^{\mathrm T}Y,$$

$$Z^{\mathrm T}Y + Y^{\mathrm T}Z \le \beta Z^{\mathrm T}Z + \beta^{-1}Y^{\mathrm T}Y.$$

**引理 2** 在执行器故障模式(11) 和(12) 下, 对任意正定对称矩阵 $P = P^{\mathrm T} > 0$ 及标量 $\epsilon > 0$, 如果有 $P^{-1} - \epsilon I > 0$, 则

$$(\bar{\alpha}u+\varphi(u))^{\mathrm T}P(\bar{\alpha}u+\varphi(u))\le$$
$$(\bar{\alpha}u)^{\mathrm T}(P^{-1}-\epsilon I)^{-1}(\bar{\alpha}u)+\epsilon^{-1}\varphi^{\mathrm T}(u)\varphi(u).$$

**证明** 定义

$$\Psi=\{(\bar{\alpha}u)^{\mathrm T}P(\epsilon^{-1}I-P)^{-\frac{1}{2}}-\varphi^{\mathrm T}(u)(\epsilon^{-1}I-P)^{\frac{1}{2}}\},$$

则 $\Psi\Psi^{\mathrm T}\ge 0$. 直接计算

$$\begin{aligned}\Psi\Psi^{\mathrm T}=&(\bar{\alpha}u)^{\mathrm T}P(\epsilon^{-1}I-P)^{-1}P(\bar{\alpha}u)-\\&(\bar{\alpha}u)^{\mathrm T}P\varphi(u)-\varphi^{\mathrm T}(u)P(\bar{\alpha}u)+\\&\varphi^{\mathrm T}(u)(\epsilon^{-1}I-P)\varphi(u)=\\&(\bar{\alpha}u)^{\mathrm T}P(\epsilon^{-1}I-P)^{-1}P(\bar{\alpha}u)+\\&(\bar{\alpha}u)^{\mathrm T}P(\bar{\alpha}u)+\epsilon^{-1}\varphi^{\mathrm T}(u)\varphi(u)-\\&(\bar{\alpha}u+\varphi(u))^{\mathrm T}P(\bar{\alpha}u+\varphi(u)).\end{aligned}$$

利用矩阵逆定理[12] 可知

$$(P^{-1}-\epsilon I)^{-1}=P(\epsilon^{-1}I-P)^{-1}P+P,$$

从而有

$$\begin{aligned}&\Psi\Psi^{\mathrm T}=\\&(\bar{\alpha}u)^{\mathrm T}(P^{-1}-\epsilon I)^{-1}(\bar{\alpha}u)+\epsilon^{-1}\varphi^{\mathrm T}(u)\varphi(u)-\\&(\bar{\alpha}u+\varphi(u))^{\mathrm T}P(\bar{\alpha}u+\varphi(u))\ge 0.\end{aligned}$$

引理得证. □

## 3 主要结果

首先, 考虑不确定性时滞故障系统(17) 的鲁棒稳定性问题, 即 $w(t)=0$.

**定理 1** 考虑不确定性时滞故障系统(17), 若对所有可能的执行器故障, 存在对称正定对称矩阵 $X$, 矩阵 $Y$, 以及标量 $\epsilon,\eta,\zeta>0$, 满足下面关于 $(X,Y,\epsilon,\eta,\zeta)$ 的线性矩阵不等式系统:

$$\begin{bmatrix}XA_1^{\mathrm T}+A_1X+\epsilon B_sB_s^{\mathrm T} & XC_s^{\mathrm T} & Y^{\mathrm T}\bar{\alpha} & Y^{\mathrm T}\bar{\alpha} & Y^{\mathrm T}\underline{\alpha} & Y^{\mathrm T}\underline{\alpha}\\ * & -\epsilon I & 0 & 0 & 0 & 0\\ * & * & (\eta-\epsilon)I & 0 & 0 & 0\\ * & * & * & \zeta I-\epsilon T^{-1} & 0 & 0\\ * & * & * & * & -\eta I & 0\\ * & * & * & * & * & -\zeta I\end{bmatrix}<0,\tag{18}$$

则不确定时滞故障系统(17) 鲁棒渐近稳定; 若 $(X^*,Y^*,\epsilon^*,\eta^*,\zeta^*)$ 为上述LMI的一组解, 则相应的鲁棒容错状态反馈增益为 $K=Y^*X^{*-1}$. 式中

$$B_s=[E_1\ \ E_2\ \ A_2\ \ B_2\ \ I],$$
$$C_s^{\mathrm T}=[\sqrt{2}W_f^{\mathrm T}\ \ I],\ T=W_g^{\mathrm T}E_g^{\mathrm T}E_gW_g.$$

**证明** 定义Lyapunov 函数

$$\begin{aligned}V(x,t)=&x^{\mathrm T}(t)Px(t)+\\&\int_{-d}\epsilon^{-1}\{(\|W_fx(\tau,\varphi)\|^2-\\&\|\delta_f(x(\tau,\varphi))\|^2)+x^{\mathrm T}(\tau)Qx(\tau)\}\mathrm d t\end{aligned}\tag{19}$$

计算 $V(x,t)$ 沿系统(17) 轨线的导数, 可得

$$\begin{aligned}\mathring{V}(x,t)=&\\&x^{\mathrm T}(t)(A_1^{\mathrm T}P+PA_1)x(t)+2x^{\mathrm T}(t)PB_sD_s+\\&\epsilon^{-1}(\|W_fx(t)\|^2-\|\delta_f(x(t))\|^2)-\\&\epsilon^{-1}(\|W_fx(t-d)\|^2-\|\delta_f(x(t-d))\|^2)+\\&\epsilon^{-1}x^{\mathrm T}(t)Qx(t)-\epsilon^{-1}x^{\mathrm T}(t-d)Qx(t-d).\end{aligned}\tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned}D_s=[&\delta_f^{\mathrm T}(x(t),t),\ \delta_f^{\mathrm T}(x(t-d),t),\\&x^{\mathrm T}(t-d),\ u_f^{\mathrm T},\ (\Delta g(x(t),t)u_f)^{\mathrm T}]^{\mathrm T}.\end{aligned}$$

由引理 1, 有

$$\begin{aligned}&2PB_sD_s\le\\&\epsilon PB_sB_s^{\mathrm T}P+\epsilon^{-1}\|\delta_f(x(t))\|^2+\\&\epsilon^{-1}\|\delta_f(x(t-d))\|^2+\epsilon^{-1}\|x(t-d)\|^2+\\&\epsilon^{-1}\|u_f\|^2+\epsilon^{-1}\|\Delta g(x(t),t)u_f\|^2.\end{aligned}\tag{21}$$

令 $Q=Q_f^{\mathrm T}W_f+I$, 利用式(7) 和(9), 并将式(21) 代入(20), 可得

$$\begin{aligned}\mathring{V}(x,t)\le&x^{\mathrm T}(t)(A_1^{\mathrm T}P+\\&PA_1+\epsilon PB_sB_s^{\mathrm T}P+\\&\epsilon^{-1}C_s^{\mathrm T}C_s)x(t)+\epsilon^{-1}\|u_f\|^2+\\&\epsilon^{-1}\|\Delta g(x(t),t)u_f\|^2.\end{aligned}\tag{22}$$

由引理 2, 有

$$\begin{aligned}&\epsilon^{-1}\|u_f\|^2=\\&\epsilon^{-1}\{(\bar{\alpha}Kx(t)+\varphi(u))^{\mathrm T}(\bar{\alpha}Kx(t)+\varphi(u))\}\le\\&\epsilon^{-1}\Big(\frac{1}{1-\eta'}x^{\mathrm T}(t)K^{\mathrm T}\bar{\alpha}^{\mathrm T}\bar{\alpha}Kx(t)+\\&\frac{1}{\eta'}x^{\mathrm T}(t)K^{\mathrm T}\underline{\alpha}^{\mathrm T}\underline{\alpha}Kx(t)\Big).\end{aligned}\tag{23}$$

令 $\eta=\epsilon\eta'$, 且 $\epsilon-\eta>0$ 有

$$\begin{aligned}\epsilon^{-1}\|u_f\|^2\le&\frac{1}{\epsilon-\eta}x^{\mathrm T}(t)K^{\mathrm T}\bar{\alpha}^{\mathrm T}\bar{\alpha}Kx(t)+\\&\frac{1}{\eta}x^{\mathrm T}(t)K^{\mathrm T}\underline{\alpha}^{\mathrm T}\underline{\alpha}Kx(t).\end{aligned}\tag{24}$$

同样的处理过程有

$$\begin{aligned}&\epsilon^{-1}\|\Delta g(x(t),t)u_f\|^2\le\epsilon^{-1}u_f^{\mathrm T}Tu_f\le\\&x^{\mathrm T}(t)K^{\mathrm T}\bar{\alpha}^{\mathrm T}(\epsilon T^{-1}-\zeta I)^{-1}\bar{\alpha}Kx(t)+\\&\zeta^{-1}x^{\mathrm T}(t)K^{\mathrm T}\underline{\alpha}^{\mathrm T}\underline{\alpha}Kx(t).\end{aligned}\tag{25}$$

其中 $\zeta=\epsilon\zeta'$ 且 $\epsilon T^{-1}-\zeta I>0$. 将式(24) 和(25) 代入(22), 可得

$$\mathring{V}(x,t)\le x^{\mathrm T}(t)\Xi(P,K,\epsilon,\eta,\zeta)x(t).\tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Xi(P,K,\epsilon,\eta,\zeta)=\\&A_1^{\mathrm T}P+PA_1+\epsilon PB_sB_s^{\mathrm T}P+\epsilon^{-1}C_s^{\mathrm T}C_s+\\&(\epsilon-\eta)^{-1}K^{\mathrm T}\bar{\alpha}^{\mathrm T}\bar{\alpha}K+\eta^{-1}K^{\mathrm T}\underline{\alpha}^2K+\\&\zeta^{-1}K^{\mathrm T}\underline{\alpha}^2K+K^{\mathrm T}\bar{\alpha}(\epsilon T^{-1}-\zeta I)^{-1}\bar{\alpha}K.\end{aligned}\tag{27}$$

若 $\Xi(P,K,\epsilon,\eta,\zeta)<0$, 则对于任意满足式(4) ～ 式(6) 的非线性不确定时滞故障系统(17) 鲁棒渐近稳定. 利用 Schur 定理, $\Xi(P,K,\epsilon,\eta,\zeta)<0$ 等价于

$$
\begin{bmatrix}
A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1 + \epsilon PB_sB_s^{\mathrm{T}}P & C_s^{\mathrm{T}} & K^{\mathrm{T}}\overline{\alpha} & K^{\mathrm{T}}\overline{\alpha} & K^{\mathrm{T}}\underline{\alpha} & K^{\mathrm{T}}\underline{\alpha} \\
* & -\epsilon I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & (\eta-\epsilon)I & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & \zeta I-\epsilon T^{-1} & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\eta I & 0 \\
* & * & * & * & * & -\zeta I
\end{bmatrix} < 0, \tag{28}
$$

式(28) 为关于未知变量$(P, K, \epsilon, \eta, \zeta)$ 的非线性矩阵不等式, 直接求解$(P, K, \epsilon, \eta, \zeta)$非常困难. 对式(28) 分别左乘和右乘矩阵 $\mathrm{diag}[P^{-1}\ \ I\ \ I\ \ I\ \ I\ \ I]$, 并引入新的矩阵变量 $X = P^{-1}, Y = KP^{-1}$, 即可得线性矩阵不等式(18). 至此定理得证. □

**定理 2** 　考虑非线性不确定时滞故障系统(17), 若存在对称正定矩阵 $X$, 矩阵 $Y$, 以及标量 $\epsilon, \eta, \zeta, \gamma^2$, 满足下面关于$(X, Y, \epsilon, \eta, \zeta, \gamma^2)$ 的线性矩阵不等式系统:

$$
\begin{bmatrix}
XA_1^{\mathrm{T}} + A_1X + \epsilon B_sB_s^{\mathrm{T}} & XC_s^{\mathrm{T}} & Y^{\mathrm{T}}\overline{\alpha} & Y^{\mathrm{T}}\overline{\alpha} & Y^{\mathrm{T}}\underline{\alpha} & Y^{\mathrm{T}}\underline{\alpha} & XC^{\mathrm{T}} & B_1 \\
* & -\epsilon I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & (\eta-\epsilon)I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & \zeta I-\epsilon T^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & -\eta I & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & -\zeta I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & -I & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & -\gamma^2
\end{bmatrix} < 0, \tag{29}
$$

则故障闭环系统存在同时满足条件 1) 和 2) 的状态反馈控制器; 若 $(X^*, Y^*, \epsilon^*, \eta^*, \zeta^*, \gamma^{2*})$ 为上述 LMI 的一组解, 则相应的状态反馈增益为 $K = Y^*X^{*-1}$.

**证明** 　显然, 线性矩阵不等式(29) 隐含线性矩阵不等式(18), 由定理 1, 当 $w(t) = 0$ 时, 非线性不确定时滞故障系统(17) 的平衡点 $x(t) = 0$ 是渐近稳定的, 满足鲁棒稳定性能指标 1). 对于 $H_\infty$ 扰动衰减性能指标 2), 定义辅助函数

$$
J = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) + \int_{t-d}^{t}\epsilon^{-1}x^{\mathrm{T}}(\tau)(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x(\tau)\mathrm{d}\tau\Big) + \|z(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2. \tag{30}
$$

利用引理 1、引理 2、式(7)～ 式(9), 直接计算可得

$$
\begin{aligned}
J = {} & x^{\mathrm{T}}(t)(A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1)x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)PB_sD_s + \\
& 2x^{\mathrm{T}}(t)PB_1w(t) + \|z(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2 + \\
& \epsilon^{-1}x^{\mathrm{T}}(t)(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x(t) - \epsilon^{-1}x^{\mathrm{T}}(t-d)(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x(t-d) \le x^{\mathrm{T}}(t)\Omega x(t).
\end{aligned} \tag{31}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Omega = {} & A_1^{\mathrm{T}}P + PA_1 + C^{\mathrm{T}}C + \epsilon^{-1}C_s^{\mathrm{T}}C_s + \\
& \gamma^{-2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + \epsilon PB_sB_s^{\mathrm{T}}P + \\
& (\epsilon-\eta)^{-1}K^{\mathrm{T}}\overline{\alpha}^2K + \eta^{-1}K^{\mathrm{T}}\underline{\alpha}^2K + \\
& K^{\mathrm{T}}\overline{\alpha}(\epsilon T^{-1} - \zeta I)^{-1}\overline{\alpha}K + \zeta^{-1}K^{\mathrm{T}}\underline{\alpha}^2K.
\end{aligned} \tag{32}
$$

若 $\Omega < 0$, 可知 $J < 0$. 假设系统的初始状态为零, 对给定的 $T > 0$, 对式(30) 从 0 到 $T$ 积分, 得

$$
\int_0^T(\|z(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2)\mathrm{d}t + x^{\mathrm{T}}(T)Px(T) + \epsilon^{-1}\Gamma < 0. \tag{33}
$$

其中

$$
\Gamma = \int_{-d}^{0}x^{\mathrm{T}}(\tau)(W_f^{\mathrm{T}}W_f + I)x(\tau)\mathrm{d}\tau \ge 0.
$$

此时, 对任意的满足式(4)～ 式(6) 的非线性不确定性系统, $\|z(t)\|^2 < \gamma^2\|w(t)\|^2$. 引入新的矩阵变量 $X = P^{-1}, Y = KP^{-1}$, 利用 Schur 定理, 可将矩阵不等式(32) 转化线性矩阵不等式(29). 至此定理得证. □

下面分析与故障系统鲁棒稳定性能相容的 $H_\infty$ 性能指标的取值范围.

**定理 3** 　若关于变量$(X, Y, \epsilon, \eta, \zeta)$ 的线性矩阵不等式(18) 具有可行解, 则关于$(X, Y, \epsilon, \eta, \zeta, \gamma^2)$ 的线性矩阵不等式(29) 也具有可行解.

**证明** 　由定理 1 的证明过程可知 LMI(18) 具有可行解的充要条件是不等式(27) 有解. 当 LMI(18) 可行, 设$(P, K, \epsilon, \eta, \zeta)$ 为不等式(27) 的一组解, 则必存在足够大的正常数 $\lambda_0$, 使得当 $\lambda > \lambda_0$ 时有

$$
\Xi(P, K, \epsilon, \eta, \zeta) + \lambda^{-1}C^{\mathrm{T}}C < 0,
$$

等价于

$$
\Xi(P_1, K, \epsilon_1, \eta_1, \zeta_1) + C^{\mathrm{T}}C < 0,
$$

其中

$$
P_1 = \lambda P,\ \ \epsilon_1 = \epsilon\lambda^{-1},\ \ \eta_1 = \eta\lambda^{-1},\ \ \zeta_1 = \zeta\lambda^{-1}.
$$

则对于满足上式的 $P_1$, 必存在充分大的正数 $\gamma$, 使得

$$
\Xi(P_1, K, \epsilon_1, \eta_1, \zeta_1) + C^{\mathrm{T}}C + \gamma^{-2}P_1B_1B_1^{\mathrm{T}}P_1 < 0.
$$

由此可见, 当不等式(27) 具有可行解$(P, K, \epsilon, \eta, \zeta)$, 则不等式(32) 必然可行. 由定理 2 可知, LMI(29) 具有可行解的充要条件是关于$(P, K, \epsilon, \eta,$

$\zeta,\gamma^2)$ 的不等式(32) 可行. 定理得证. □

可利用 Matlab 中的求解器 feasp 来求解 LMI(18) 的可行性问题. 若以上 LMI 有解, 则由定理 3 可知, 关于变量 $(X, Y, \epsilon, \eta, \zeta, \gamma^2)$ 以 LMI(29) 为约束, $\min(\gamma^2)$ 为目标函数的极小值问题有意义. 利用求解器 mincx 求解, 记 $(X_{\min}, Y_{\min}, \epsilon_{\min}, \eta_{\min}, \zeta_{\min}, \gamma^2_{\min})$ 是极小值点, 相应的反馈增益为 $K_{\min} = Y_{\min}X^{-1}_{\min}$.

**定理 4** 考虑非线性不确定时滞故障系统(17), 若存在状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$, 使故障闭环系统满足约束条件 1), 即关于 $(X, Y, \epsilon, \eta, \zeta)$ 的 LMI(18) 有解, 则当 $\gamma \geq \gamma_{\min}$ 时, 系统的鲁棒稳定性能和 $H_\infty$ 性能指标 $\gamma$ 相容.

**证明** 令 $\Omega = (X, Y, \epsilon, \eta, \zeta, \gamma^2)$ 为满足 LMI(29) 的解空间. 由 $K_{\min}$ 定义知, LMI(29) 存在一个解系列 $(X_i, Y_i, \epsilon_i, \eta_i, \zeta_i, \gamma^2_i)$, $i = 1, 2, \cdots$, 使由此生成的状态反馈增益 $K_i = Y_iX_i^{-1}$ 收敛于 $K_{\min}$. 而 $\|H(s)\|_\infty$ 显然是反馈增益 $K$ 的连续函数, 因而当 $\gamma \geq \gamma_{\min}$ 时, 由极限的保号性可得, 存在充分大的整数 $N$, 使得 $K_N$ 相应的 $\|H(s)\|_\infty \leq \gamma$. 而 $K_N$ 是 LMI(29) 的一个解 $(X_N, Y_N, \epsilon_N, \eta_N, \zeta_N, \gamma^2_N)$ 生成的, 因而反馈增益 $K_N$ 使闭环系统同时满足鲁棒稳定性能和 $H_\infty$ 扰动衰减性能.

由定理 3 和定理 4 可知, 若存在状态反馈控制律 $u(t) = Kx(t)$, 使不确定时滞系统鲁棒渐近稳定, 即 LMI(18) 有解, 则对于给定的 $H_\infty$ 性能指标 $\gamma \geq \gamma_{\min}$, LMI(29) 总有可行解. 假定 $(X^*, Y^*, \epsilon^*, \eta^*, \zeta^*)$ 是 LMI(29) 的一个可行解, 则 $K^* = Y^*X^{*-1}$ 为同时满足条件 1) 和 2) 的状态反馈容错控制增益.

为便于实际操作, 给出同时满足鲁棒稳定性能和 $H_\infty$ 扰动衰减性能指标的容错控制系统设计步骤如下:

1) 对于所有可能的执行器失效, 用 Matlab-LMI 求解器 feasp 验证关于矩阵变量 $(X, Y, \epsilon, \eta, \zeta)$ 的 LMI(18) 的可行性, 从而判别故障系统(17) 是否存在满足条件 1) 的容错控制律.

2) 若上述 LMI 可行, 用 Matlab-LMI 求解器 mincx 求解以 $(X, Y, \epsilon, \eta, \zeta, \gamma^2)$ 为变量, LMI(29) 为约束, $\min(\gamma^2)$ 为目标函数的极小值问题, 得到 $\gamma_{\min}$. 从而可知对于设计中所给的 $H_\infty$ 性能指标 $\gamma \geq \gamma_{\min}$, 与系统的鲁棒稳定性能指标相容.

3) 对于给定的 $H_\infty$ 性能指标 $\gamma \geq \gamma_{\min}$, 求解关于变量 $(X, Y, \epsilon, \eta, \zeta, \gamma^2)$ 的 LMI(29), 利用上述 LMI 的可行解构造同时满足条件 1) 和 2) 的鲁棒 $H_\infty$ 容错控制律.

## 4 仿真例子

考虑如下非线性不确定时滞系统:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, C = [0.1 \quad 1], W_g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E_1 = E_2 = E_g = W_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\delta_f = \begin{bmatrix} \sin x_1(t) \\ \sin x_2(t) \end{bmatrix}, \delta_g = \begin{bmatrix} \cos x_1(t) \\ \cos x_2(t) \end{bmatrix}.$$

定义执行器故障模型为

$$\underline{\alpha} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, \overline{\alpha} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

容易验证 $\delta_f$ 和 $\delta_g$ 满足增益有界条件. 由定理 1 计算可知, 存在满足条件 1) 的容错控制器, 并可求得 $\gamma^2_{\min} = 0.054\,9$. 由定理 4, 当 $\gamma \geq \gamma_{\min}$ 时存在同时满足条件 1) 和 2) 的容错控制器, 若取 $\gamma = 1$, 可得

$$K = \begin{bmatrix} -1.279\,7 & -0.243\,9 \\ -0.243\,9 & -1.342\,5 \end{bmatrix}.$$

## 5 结 语

本文研究了一类非线性不确定时滞系统的完整性控制问题. 给出了相容指标下的鲁棒 $H_\infty$ 容错控制器存在的充分条件, 以及容错控制器的构造性设计方法. 所给结论保证了对于任意容许的不确定性以及执行器的故障, 相应的闭环系统鲁棒渐近稳定, 且对扰动输入具有一定的衰减性能. 数值例子验证了本文所给结果的有效性.

## 参考文献(References)


[1] Jovan D B, Raman K M. A Decentralized Scheme for Accommodation of Multiple Simultaneous Actuator Failures[A]. *Proc of the American Control Conference* [C]. Anchorage: IEEE, 2002: 5098-5103.

[2] Robert J V, Jure V M, William R P. Design of Reliable Control System[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(3): 290-304.

[3] Qu Z H, Curtis M I. Robust Control of a Class of Nonlinear Uncertain Systems Fault Tolerant Against Sensor Failures and Subsequent Self-recovery[A]. *Proc of the 40th IEEE Conf on Decision and Control* [C]. Oriando, 2001: 1472-1478.

[4] Wang Z D, Huang B, Unbehauen H. Robust Reliable Control for a Class of Uncertain Nonlinear State-delayed Systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(5): 955-963.

[5] Qu Z H, Curtis M I, Jub Y F, et al. Robust Fault-tolerant Self-recovering Control of Nonlinear Uncertain Systems[J]. *Automatica*, 2003, 39(8): 1763-1771.


(下转第 692 页)

优值、均值、最大值、达优率如表 1 所示. 种群规模 pop-size = 200, 迭代次数 max-gen = 1 000.

表1 仿真结果

| 问题规模 | 算法 | 达优率 % | 最优值 | 均值 | 最大值 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3/10 | GA/FD | 96 | 1 831.80 | 1 831.80 | 1 833.80 |
| | GA | 43 | 1 831.80 | 1 836.80 | 1 837.30 |
| 6/20 | GA/FD | 91 | 3 691.20 | 3 692.90 | 3 696.30 |
| | GA | 30 | 3 691.20 | 3 693.90 | 3 711.30 |

## 5 结 语

本文提出了一种采用模糊决策规则的遗传算法(即模糊优化方法)求解MLRP 问题. 首先利用遗传算法对初始种群搜索选择优化路径; 然后根据模糊决策规则计算其各个调度相应的指标; 最后对已挑选出来的染色体中某些位基因进行改良, 从而产生新的遗传种群. 由于模糊优化求解比单纯的遗传算法具有更强的收敛性, 此方法对于求解物流配送路径优化问题更具实际意义. 计算机仿真实验证明了该算法的有效性.

### 参考文献(References)

[1] Hokey M, Vaidyanathan J, Rajesh S. Combined Location-routing Problems: A Synthesis and Future Research Directions[J]. *European J of Operational Research*, 1998, 108(1): 1-15.

[2] Watson-Gandy C, Dohrn P. Depot Location with Van Salesmen - A Practical Approach[J]. *Omega*, 1973, 1(3): 321-329.

[3] Cornuejols G, Fisher M L, Nemheuser G L. Location of Bank Accounts to Optimize Floats: An Analytic Study of Exact and Approximate Algorithms[J]. *Management Science*, 1997, 23(8): 323-326.

[4] 蔡延光, 钱积新, 孙优贤. 带有时间窗的多重运输调度问题的自适应 Tabu Search 算法[J]. *系统工程理论与实践*, 2000, (12): 42-50.
(Cai Y G, Qian J X, Sun Y X. Tabu Search of Multi-transportation Scheduling with Time Window[J]. *System Engineering Theory and Practice*, 2000, (12): 42-50.)

[5] 张潜, 高立群, 胡祥培. 集成化物流中的定位-运输路线问题(LRP)优化算法评述[J]. *东北大学学报*, 2003, 24(1): 31-34.
(Zhang Q, Gao L Q, Hu X P. Review on Optimal Algorithm of Location-routing Problem(LRP) in Integrated Logistics[J]. *J of Northeastern University*, 2003, 24(1): 31-34.)

[6] 张潜, 高立群, 刘雪梅, 等. 定位-运输路线问题的两阶段启发式算法[J]. *控制与决策*, 2004, 19(7): 773-777.
(Zhang Q, Gao L Q, Liu X M, et al. A Two-phase Heuristics Approach to Location-routing Problem[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(7): 773-777.)

[7] William P N, Wesley J B. Solving the Pickup and Delivery Problem with Time Windows Using Reactive Tabu Search[J]. *Transportation Research Part B*, 2000, (34): 107-121.

[8] Campos V, Mota E. Heuristic Procedures for the Capacitated Vehicle Routing Problem[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2000, 16(2): 265-277.

[9] 汪定伟, 容启亮, 叶伟雄. 企业动态联盟中的伙伴挑选模型及其模糊优化方法[J]. *中国科学*, E 辑, 2002, 32(6): 824-830.
(Wang D W, Rong Q L, Ye W X. Fuzzy Optimizing Method for Chosen Partner Model in the Enterprise[J]. *Chinese Science E*, 2002, 32(6): 824-830.)

(上接第 670 页)

[6] Yang J J, Wu F X, Shi Z K. Robust $H$-infinity Fault Tolerant Controller Design for Linear Delay Systems with Uncertainty[J]. *Control Theory and Application*, 2000, 17(3): 442-448.

[7] Liu P, Zhou D H. Robust Fault Tolerant Control of Uncertain Time-delay Linear Systems[J]. *Progress in Science*, 2003, 13(6): 464-469.

[8] Li Z H. Robust Fault Tolerant Control of Uncertain Systems with State and Control Time Delay[J]. *J of Hu'nan University*, 2000, 27(1): 60-66.

[9] Liu P, Zhou D H. Study on Robust Fault Tolerant Control of Uncertain Linear Time-delay Systems[J]. *Control Theory and Application*, 2003, 20(1): 78-80.

[10] 王德进. $H_2$ 和 $H_\infty$ 优化控制理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2001: 169-173.
(Wang D J. *$H_2$ and $H_\infty$ Optimal Control Theory*[M]. Harbin: Publisher of Harbin Institute of Technology, 2001: 169-173.)

[11] Yang G H, Wang J, Yeng C S. Reliable Guaranteed Cost Control for Uncertain Nonlinear Systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2000, 45(11): 2188-2192.

[12] Yang Y, Yang G H, Soh Y C. Reliable Control of Discrete-time Systems with Actuator Failure[J]. *IEE Proc-Control Theory Application*, 2000, 147(4): 428-432.