最优保留遗传算法及其收敛性分析*

何　琳　王科俊　李国斌　金鸿章
(哈尔滨工程大学自动控制系　150001)

摘　要　最优保留 GA (EGA) 是目前 GA 收敛性研究中比较典型的一类。在已有研究成果的基础上给出了 EGA 更一般的规范化定义, 指明了 EGA 全局收敛的本质及其两种实现方式, 并分别对它们进行了收敛性分析。最后提出一种变形的全局收敛的 EGA。

关键词　遗传算法, 最优保留, 收敛性, Markov 链
分类号　TP 18

Elitist Preserved Genetic Algorithm and Its Convergence Analysis

He Lin, Wang Kejun, Li Guobin, Jin Hongzhang
(Harbin Engineering University)

Abstract　Elitist preserved genetic algorithm (EGA) is a typical kind of GA which is being studied in the analysis of GA's convergence at present. More normative definition of EGA is given and the essence of EGA's global convergence is indicated on the basis of research productions existed. Two kinds of realization methods of EGA are studied and convergence analysis of them is carried out. Finally, a kind of varied and global convergent EGA is presented.

Key words　genetic algorithm, elitist preserved, convergence, Markov chain

1 引　　言

近年来, 以 Markov 链为数学工具分析 GA 的收敛性已成为研究热点, 并取得了一定的进展。但现有的研究都是在对算法增加某些限制条件后得到 GA 的各种修正形式的基础上进行的。具有最优保留特性的 GA 是其中较为典型的一类[1-4]。但何为"最优保留 GA"? 最优保留 GA 全局收敛的本质是什么?它有哪些常见的变形等, 目前尚未进行深入研究。

本文详细分析了最优保留 GA 的运行机制, 指出其收敛的本质原因; 在此基础上给出最优保留 GA 更一般的规范化定义及两种实现方式; 最后提出一种变形的最优保留 GA。

2 最优保留与最优保留 GA (EGA)

定义 1 (最优保留)　设

$$S^* = \{s_k^* : f(s_k^*) = \max(f(S_k)) \quad s_k^* \in S_k,\ k = 1, 2, \cdots\} \tag{1}$$

其中, s_k^*, s_{k+1}^* 分别为第 k 代和第 $k+1$ 代群体 S_k, S_{k+1} 中的最优个体; $f(s_k^*)$, $f(s_{k+1}^*)$ 为其相应的适应度。若 $f(s_k^*) > f(s_{k+1}^*)$, 则

$$s_{k+1}^* = s_k^*,\quad f(s_{k+1}^*) = f(s_k^*) \tag{2}$$

注 1　随着遗传代数 k 的增加, 每代最优个体适应度所构成的数列 $\{f(s_1^*), f(s_2^*), \cdots\}$ 为不减数列。这是最优保留操作的直接结果和本质表现, 也是 EGA 所必须满足的基本条件。

注 2　最优保留的作用 (或目的) 仅限于保持进化种群迄今为止所发现的最优解, 凡具有这种功能的 GA 均可称为 EGA。但如何在 GA 运行中实现最优保留功能, 则有不同的方法。

注 3　常见的描述 EGA 特性的表述为: 最优解以概率 1 保留到下一代[3]。该条件较为严格。实际上, 仅当上一代的最优个体优于下一代时, 需将该个体保留到下一代; 否则可不保留。

* 1999-03-15 收稿, 1999-07-05 修回

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

3 全局收敛的EGA及其收敛本质

从上述最优保留和EGA的定义可以看出,一旦EAG发现全局最优解s^{**},则该最优解将一直保留下去。设包含全局最优解s^{**}的种群(或状态)集合为E_1,则EGA一旦进入E_1,将不能到达E_1以外的任何种群(或状态)。为使EGA全局收敛,关键是使EGA能够发现全局最优解;否则,即使有最优保留操作也不能保证EGA全局收敛。由此可得如下定理:

定理1 EGA为全局收敛的充分条件是:在搜索过程中EGA能发现全局最优解或经历包含全局最优解的状态E_1。

证明 若EGA在某一代n发现全局最优解,则由EGA的定义,该最优解将一直保留而不会丢失。当$k > n$时,$f(s_k^*) = f(s^{**})$,则

$$\lim_{k\to\infty} p(f(s_k^*) = f(s^{**})) = 1 \tag{3}$$

因此EGA全局收敛。

由以上定理可直接得出如下推论:

推论1 在加入最优保留操作之前,具有各态遍历性的遗传算法(GA1)在加入最优保留操作后,若不改变(或影响)GA1的遍历性,则得到的EGA是全局收敛的。

4 全局收敛EGA的实现方法及收敛性分析

4.1 最优个体保留在种群之外

设s_k^*为第k代种群S_k中的最优个体,现将s_k^*保存到一个不参与复制、交叉等基因操作的变量SM中,即令$SM = s_k^*$,同时不改变S_k的组成。然后对S_k执行交叉、变异、复制操作,产生下一代种群S_{k+1}。将S_{k+1}中的最优个体s_{k+1}^*与SM比较,若s_{k+1}^*优于SM,则令$SM = s_{k+1}^*$,而S_{k+1}保持不变;若SM优于s_{k+1}^*,则SM与S_{k+1}均保持不变。再对S_{k+1}执行上述操作,如此反复。

在这种情况下,s_k^*保留在进化种群之外,不参与后续的遗传操作,仅作为独立于算法本身的GA迄今所发现最好个体的外部记录,对以前的算法无任何影响。

由CGA的遍历性及推论1可得如下推论:

推论2 加入上述最优保留操作的CGA是全局收敛的。

4.2 最优个体保留在种群之内

4.2.1 最优个体参与后续遗传操作

设s_k^*为第k代种群S_k中的最优个体,将s_k^*保存在中间变量SM中,同时不改变S_k的组成。对S_k执行遗传操作,产生下一代种群S_{k+1}。将S_{k+1}中的最优个体s_{k+1}^*与SM比较,若SM优于s_{k+1}^*,则用SM代替s_{k+1}^*,此时$S_{k+1} = S'_{k+1}$;否则S_{k+1}保持不变。然后对S_{k+1}或S'_{k+1}执行上述操作,如此反复。

下面分析此类EGA的收敛性。设$C = \{\mathrm{fit}(s): s \in D\}$,$D$是长度为$L$的二进制串集合,其维数为$2^L$。设$C$的维数为$g$($g \le 2^L$),则$C$可写成$\{F_1, F_2, \cdots, F_g\}$,其中$F_1 > F_2 > \cdots > F_g$。相应地将$D$划分为$g$个互不相交的非空子集

$$D_i = \{s: s \in D,\ \mathrm{fit}(s) = F_i\}$$
$$i = 1, 2, \cdots, g \tag{4}$$

设Q为包含M个串s的种群,各不同种群所构成的状态空间记为Ω。定义$\mathrm{fit}(Q) = \max_{s\in Q}\mathrm{fit}(s)$。显然,对于所有的$Q \in \Omega$,均有$F_g \le \mathrm{fit}(Q) \le F_1$。类似于$D$的划分方法,根据$\mathrm{fit}(Q)$的大小将$\Omega$划分为$g$个互不相交的非空集合$E_i$,$E_i = \{Q: Q \in \Omega, \mathrm{fit}(Q) = F_i\}$,$i = 1, 2, \cdots, g$。设$e_i > 0$是$E_i$所包含的种群数目,$Q_{ij}$是$E_i$中的第$j$个种群,则$\Omega$中任意种群均可表示为$Q_{ij}$,并且$E_i$中的种群$Q_{ij}$($j = 1, 2, \cdots, e_i$)排列顺序满足:

对于E_i中任意群体Q_{ij_1}, Q_{ij_2},$j_1 < j_2$,设个体$s_{j_1 k} \in Q_{ij_1}$,$s_{j_2 k} \in Q_{ij_2}$,$k = 1, 2, \cdots, M$,按其对应的适应度大小排列为

$$\begin{cases} Q_{ij_1} = \{s_{j_1 1}, s_{j_1 2}, \cdots, s_{j_1 M}\} \\ Q_{ij_2} = \{s_{j_2 1}, s_{j_2 2}, \cdots, s_{j_2 M}\} \end{cases} \tag{5}$$

则存在自然数β,使得

$$\mathrm{fit}(s_{j_1\beta}) > \mathrm{fit}(s_{j_2\beta}),\quad \mathrm{fit}(s_{j_1(\beta-k)}) \ge \mathrm{fit}(s_{j_2(\beta-k)})$$
$$k = 1, 2, \cdots, \beta - 1 \tag{6}$$

于是可将GA的优化过程看作是从任意种群(或状态)Q_{ij}转移到另一种群(或状态)Q_{kl}的转移序列。

令$P_{ij,kl}$为遗传算子作用下从Q_{ij}转移到Q_{kl}的转移概率,$P_{ij,k}$为从Q_{ij}转移到E_k中任意种群(或状态)的概率。则由上述最优保留GA的表述可得如下定理:

定理2[3] 对于任意$j = 1, 2, \cdots, e_i$和$i, k = 1, 2, \cdots, g$,有

$$P_{ij,k}\begin{cases} > 0, & k \le i \\ = 0, & k > i \end{cases} \tag{7}$$

注4 1) 定理2说明:适应度低的种群有可能

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

转移到适应度高或与之相等的种群; 反之, 则不可。2) 该结论的获得与交叉操作无关, 但必须保证变异概率$P_m > 0$, 其目的是为保证EGA 能发现全局最优解。3) 交叉、变异操作方式和概率均不随遗传代数变化, 即与时间无关, EGA 的全部状态转移过程可由齐次Markov 链来描述。

实际上, 定理 2 可进一步写成

$$P_{ij,kl}\begin{cases} > 0, & k \leq i \\ = 0, & k > i \end{cases} \tag{8}$$

对于按如下规则排列的 EGA 状态转移概率矩阵, P 可表为

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1e_1} & Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2e_2} & \cdots & Q_{s1} & Q_{s2} & \cdots & Q_{se_s} \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc|ccccc} \times & \times & \cdots & \times & & & & & & & & & \\ \times & \times & \cdots & \times & & & & & & & & & \\ & & \vdots & & & & & & & & & & \\ \times & \times & \cdots & \times & & & & & & & & & \\ \hline \times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times & & & & & \\ \times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times & & & & & \\ & & \vdots & & & & \vdots & & & & & & \\ \times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times & & & & & \\ & & \vdots & & & & \vdots & & & & & & \\ \times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times & & \times & \times & \cdots & \times \\ \times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times & & \times & \times & \cdots & \times \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \cdots & & & \vdots & \\ \times & \times & \cdots & \times & \times & \times & \cdots & \times & & \times & \times & \cdots & \times \end{array}\right] \end{array} = \begin{bmatrix} C_{e_1 \times e_1} & 0 \\ R & T \end{bmatrix}$$

其中, $C, R > 0, T \neq 0, P$ 为可简约的随机矩阵。C, R 聚集了从任何状态转移到包含全局最优解状态的转移概率。

由可简约随机矩阵的性质得[2]: 当 $t \to \infty$ 时, 处于任意非全局最优状态的概率为 0, 即 Q_{ij} 必属于 E_1, 则 EGA 为全局收敛。

4 2 2　最优个体不参与后续遗传操作

此时与 4 2 1 中最优个体保留的方法类似, 只是所保留的个体不参与遗传操作。每次实际参加交叉、变异和选择操作的个体数为$M - 1$, 即相当于种群规模减少为$M - 1$。若此类EGA 满足与注 4 中相同的条件, 则可类似证明该 EGA 也是全局收敛的。

4 3　一种特殊类型的 EGA

下面提出一种满足最优保留定义的特殊类型的EGA。设 S_k 经过交叉、变异和选择操作得到种群 S'_{k+1}, 将 S_k 与 S'_{k+1} 的所有个体按适应度由高到低排序, 取前一半个体作为下一代种群 S_{k+1}。再对 S_{k+1} 执行交叉、变异、选择和排序操作, 如此反复。采用与 4 2 1 中相同的Markov 模型, 由以上定义可得如下定理:

定理 3　对于任意 $j = 1, 2, \cdots, e_i$, $l = 1, 2, \cdots, e_k$ 和 $i, k = 1, 2, \cdots, g$, 有

$$P_{ij,kl}\begin{cases} > 0, & Q_{ij} \leq Q_{kl} \\ = 0, & Q_{ij} > Q_{kl} \end{cases} \tag{9}$$

证明　按前述个体串的划分方法将Q_{ij}, Q_{kl} 分别划分为 g 个子集(包含空集)D_{1h}, D_{2h}, $h = 1, 2, \cdots, g$。设 D_{1h}, D_{2h} 中所包含个体数分别为 u_{1h}, u_{2h}(可能为 0), 则由Q_{ij}, Q_{kl} 的各子集合所包含的个体数组成的集合分别为

$$\begin{cases} D_1 = \{u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1h}, \cdots, u_{1g}\} \\ D_2 = \{u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{2h}, \cdots, u_{2g}\} \end{cases} \tag{10}$$

设D_1, D_2 中最后一个非零元素分别为 u_{1m}, u_{2n}, 若 $u_{1h} \leq u_{2h}$, $h = 1, 2, \cdots, \min(m, n) - 1$, 则称$Q_{ij} \leq Q_{kl}$[若$m$ (或 n) 为 1, 则Q_{ij} (或Q_{kl}) 对应整体最优种群Q_{11}, 此时恒有$Q_{kl} \leq Q_{ij}$ (或$Q_{ij} \leq Q_{kl}$)]。

当$Q_{kl} \leq Q_{ij}$ 时, 考虑最差的情况: $u_{1h} = 0$, $h = 1, 2, \cdots, n$, 即父代Q_{ij} 中所有个体适应度均小于子代 Q_{kl} 中最小个体的适应度, 子代中所有较优个体只能通过遗传算子产生, 而不能从父代中继承任何一个个体。在这种情况下, 与定理 2 中相同, 若Q_{ij} 经历选择、交叉算子后, 要得到Q_{kl} 必须使Q_{ij} 中每个个体的每一位均变异。此时状态转移概率最小, 为$(p_m)^{Ml} > 0$。对于其他情况, 同理可证 $P_{ij,kl} \geq (p_m)^{Ml} > 0$。即对任意$Q_{kl} \leq Q_{ij}$, 均有 $P_{ij,kl} \geq (p_m)^{Ml} > 0$。

若不满足$Q_{ij} < Q_{kl}$, 则存在 δ使得$u_{1\delta} > u_{2\delta}$, $\delta \in (1, \min(m, n) - 1)$。父代种群$Q_{ij}$ 中从第 $u_{1\delta}$ 个个体到第 $u_{1(\delta+1)}$ 个个体为

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\{\underbrace{s_1, s_1, \cdots, s_1}_{u_{1\delta}\text{个}}, \underbrace{s_!, s_!, \cdots, s_!}_{u_{1(\delta+1)}\text{个}}\}$ $\mathrm{fit}(s_1) > \mathrm{fit}(s_!)$

子代种群Q_{kl}中从第$u_{2\delta}$个个体到第$u_{2(\delta+1)}$个个体为

$\{\underbrace{s_1, s_1, \cdots, s_1}_{u_{2\delta}\text{个}}, \underbrace{s_\sim, s_\sim, \cdots, s_\sim}_{u_{2(\delta+1)}\text{个}}\}$ $\mathrm{fit}(s_1) > \mathrm{fit}(s_\sim)$

由父代、子代共同参与排序,取前一部分较优个体作为新种群Q_{kl}的规则,可知Q_{kl}中所含个体s_1的数目至少应为$u_{1\delta}$个。然而,上述情况是不可能的,因此$P_{ij,kl} = 0$。(证毕)

由上述定理可直接得到以下几种特殊情况的状态转移概率:

1) $Q_{ij} \to Q_{kl}$,即父代与子代相同的情况。此时$u_{1h} = u_{2h}, m = n, h = 1, 2, \cdots, m$。显然满足$Q_{ij} \leq Q_{kl}$,因此$P_{ij,kl} > 0$。

2) 同理可得$P_{11,11} = 1, P_{ij,11} > 0, P_{ij,12} > 0$($i$, j不同时为1),$P_{C_{2^l+M-1}^{M}\,C_{2^l+M-1}^{M},kl} > 0$。

采用与4.2.1相同排列方式的状态转移概率矩阵,则P可表为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ \times & \times & & & & & & & \\ \times & \times & \times & & & & & & \\ \times & \times & \otimes & \times & & & & & \\ \times & \times & \otimes & \otimes & \times & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \times & \times & \otimes & \otimes & \cdots & \otimes & \times & & \\ \times & \times & \otimes & \otimes & \otimes & \cdots & \otimes & \times & \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \cdots & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ R_1 & T_1 \end{bmatrix}$$

其中,$\otimes \geq 0, R_1 > 0, T_1 \neq 0$。类似于4.2.1中的分析,可知当$t \to \infty$时EGA必收敛到$Q_{11}$,即种群中每个个体均为全局最优解的状态。因此可把种群中个体适应度的集中程度作为判定当前解是否达到全局最优的准则。

从以上几种形式的EGA收敛性证明过程,可看出变异操作在保证EGA收敛过程中所起的重要作用,$P_m > 0$是保证EGA全局收敛的重要条件。另外,在EGA中可采用任何形式的交叉、变异算子,只要保证EGA的时齐性和$P_m > 0$即可。

5 结 语

本文首先给出了最优保留操作更一般的规范化定义,论述了EGA全局收敛的本质及其基本表现特征:每代最优个体的适应度保持增加(至少不变)趋势。然后给出了实现最优保留操作的两种基本方法:将最优个体保留在进化种群之内和之外,并分析了它们的收敛性。最后提出一种变形EGA,并证明了它可收敛到种群中所有个体均为最优的状态。

参 考 文 献

1 Joe Suzuki. A Markov chain analysis on simple genetic algorithm. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1998, 25(4): 655_659

2 Rudolph G. Convergence analysis of canonical genetic algorithms. IEEE Trans on Neural Networks, 1994, 5(1): 1021_1027

3 Dinabandhu B, Murthy C A. Genetic algorithm with elitist model and its convergence. Int J of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1996, 10(6): 990_995

4 彭宏,王兴华. 具有Elitist选择的遗传算法的收敛速度估计. 科学通报, 1997, 42(2): 144—147

作 者 简 介

何 琳 女,1973年生。哈尔滨工程大学博士。研究领域为遗传算法,智能控制等。

王科俊 男,1963年生。哈尔滨工程大学教授,博士后。研究领域为神经网络,遗传算法,智能控制理论与应用等。

李国斌 男,1938年生。哈尔滨工程大学教授,博士生导师。研究领域为船舶特辅装置,船舶智能控制等。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net