

文章编号: 1001-0920(2008)02-0121-06

量子系统中状态估计方法的综述

丛 爽, 匡 森

(中国科学技术大学 a. 自动化系, b. 中国科学院量子信息重点实验室, 合肥 230027)

摘 要: 从广泛用于实验量子领域的典型状态估计方法, 到基于系统论观点、可用于量子反馈控制的状态估计方法, 详细综述了 4 种测量方式下的相应量子状态估计方法及其适用背景. 通过其发展历程的叙述, 从本质上阐述了估计的基本原理, 从技术上对各种方法进行了相应的分析和比较. 同时, 对量子状态估计和经典状态估计进行了相应的比较, 并对量子系统中的状态估计方法作了总结.

关键词: 量子系统; 状态估计; 测量状况; 初始状态估计; 反馈状态估计

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Review of state estimation methods in quantum systems

CONG Shuang, KUANG Sen

(a. Department of Automation, b. Key Laboratory of Quantum Information of Chinese Academy of Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China. Correspondent: CONG Shuang, E-mail: scong@ustc.edu.cn)

Abstract: The corresponding quantum state estimation methods and their application backgrounds in four measurement situations are reviewed. The methods involve the typical methods broadly used in experimental quantum field and the state estimation methods which are based on systematic perspective and applicable to quantum feedback control. Essentially, the estimation principle of every method is explained by stating its development process, and the corresponding analysis and comparison in technology are given. Finally, the quantum state estimation is compared with the corresponding classical state estimation, and some comments on state estimation methods in quantum systems are summarized.

Key words: Quantum system; State estimation; Measurement situation; Initial state estimation; Feedback state estimation

1 引 言

状态是一个物理系统的数学描述, 它提供了这个系统过去以及将来的信息. Leonhart 曾经对状态作了如下标准陈述^[1]: “知道了一个物理对象的状态, 就意味着知道了它的所有物理量的最可能的统计信息”. 状态估计技术是通过对系统进行测量尽可能获取其真实状态的一种方法. 本质上, 经典系统的状态估计和量子系统的状态估计有 3 点主要差别: 第 1, 经典系统的状态通常有明确的物理意义, 它是系统的一个实在的物理量, 允许的条件下直接测量这个物理量通常能得到相应的状态取值. 而量子系统的状态——波函数或密度算子——并不是一个实在的物理量, 不能通过直接的状态测量来得到量子态的某个数值, 而必须借助对量子系统的某些可观

察量进行测量来推断出系统的状态. 第 2, 理论上, 经典系统是决定论的, 如果系统没有受到外界的扰动影响, 那么系统在任意时刻的状态可以由初始状态完美确定; 但当系统受到扰动影响时, 系统的即时状态会带有各种噪声, 这时就需要借助相应的估计技术来处理引入系统中的噪声, 从而尽可能地获取系统的真实状态. 量子系统在本质上是概率论的, 即使量子系统没有受到任何干扰, 测量量子系统的状态也将得到一个随机性的结果; 如果量子系统受到扰动, 为了获得其状态还需要额外处理相应的噪声. 第 3, 在测量的实现手段上, 经典系统的测量通常不会给其状态造成实质性的破坏, 因此原则上可以重复利用同一个系统进行多次测量. 但量子系统非常脆弱, 测量通常会对整个量子系统造成实质性的破

收稿日期: 2006-10-24; 修回日期: 2007-04-24.

基金项目: 中国科学院量子信息重点实验室开放课题(200702).

作者简介: 丛爽(1961—), 女, 山东文登人, 教授, 博士生导师, 从事人工神经网络、模糊神经网络等研究; 匡森(1976—), 男, 河南南阳人, 博士生, 从事量子最优控制、量子反馈控制等研究.

坏,从而阻止了人们重复利用同一个量子系统进行多次测量。

经典系统中的状态估计方法发展得较为成熟,但量子系统中的状态估计方法则很不成熟。事实上,大部分状态估计方法都是针对量子系统初始状态的重构而言的。既然如此,如果能够比较完美地重构出量子系统的初始状态,那么对于物理、化学领域中的实验以及量子系统控制的研究也具有重要意义。对于实时估计任意时刻量子系统的即时状态的问题,当前的研究文献则非常有限,并且存在较大研究空白。

鉴于量子系统状态估计的特殊性,为了能使读者对整个量子系统中的状态估计方法有一个整体上的认识,本文将综述其发展现状,并重点说明各种估计方法的优缺点。

2 量子系统状态估计的背景

根据量子系统固有的海森伯格不确定性原理^[2]和量子不可克隆定理^[3],人们不能对单个量子系统进行重复测量来完全复现出它的状态。其中,不确定性原理指,人们不能对单个系统进行任意序列的测量而不引入对状态自身的回反(back-action)修正作用;量子不可克隆定理禁止人们完美复制任何一个未知量子态来实现对它的重复测量。量子系统的这些固有特性,使人们可以通过下述测量方式进行状态估计^[4]:使用相同宏观工序制备出具有同一状态的许多全同复本系统,并对每个复本系统进行不同(可观察量)的测量,这一方案在量子实验领域已非常通用。但是,随着控制理论逐渐介入到量子领域,也出现了完全不同于此的量子状态测量方式和基于系统论观点的状态估计技术。例如在单个量子系统的连续演化中进行的一系列测量的基础上,对有限维量子系统初始状态的估计^[5];控制一个系综的演化,并根据一个可观察量上的信息实现状态估计^[6];基于对单个量子系统连续测量的历史记录进行的状态估计^[7]等。

量子系统状态估计的应用涉及到多个不同的方面^[6,8],尤其是对纯化方案的研究将极大依赖于量子估计技术;在量子计算机中,要实现寄存器的读操作,即测量量子寄存器所表征的量子系统的状态,也必须借助量子状态重构技术;量子态的实验重构,对于检验制备、检验由噪声和消相干引起的误差,以及利用过程层析确定控制方案的精确度都是必需的;进一步,实时的状态估计可以改善超出标准量子极限的精确计量。

最初的量子状态重构过程与医学领域中的 X 射线层析术有类似之处,因此常将量子系统的状态

估计技术(或量子状态重构技术)称为量子层析术^[9]。值得说明的是:在物理类文献中,量子层析术既包括量子系统的状态估计,又包括参数估计,且前者常称为状态层析,后者常称为过程层析;在工程类文献中,也涉及到量子系统的状态估计和参数估计问题,但在术语上分别称为状态滤波和参数辨识^[9]。

3 基于测量全同复本系统的量子状态估计方法

任何量子力学重构方案都只是基于一组测量数据而对量子力学系统的密度算子进行的一种后验估计,这组测量数据要借助宏观测量仪器来得到。重构的质量取决于测得数据的质量和重构程序的效率^[10]。本质上,基于多个全同复本系统的量子状态重构是通过重复测量这些复本系统(构成一个被测系综)的不同可观察量,然后根据测量结果的统计属性来重构出系统的状态。这里,被测系综上的可观察量的集合称为观测层次^[11]。

量子状态估计自 1933 年首先提出的著名 Pauli 问题^[12](即根据一个粒子的位置和动量的概率分布能否确定出该粒子的波函数)以来,已经经历了 70 多年的发展,出现了多种基于测量的估计方法,估计问题在理论和实验上均得到了较大发展。然而,第 1 个系统化的方法始于 Fano 在 20 世纪 50 年代后期的工作^[13]。随着估计技术的不断发展,目前已形成了状态层析(ST)法、最大熵(Max Ent)估计法、极大似然(ML)估计法、贝叶斯(Bayesian)估计法、最小方差(LS)估计法等 5 种具有代表性的状态重构方法。针对这几种典型重构方案,人们可以具体规定 3 种不同的情形^[10]。第 1,系统的所有可观察量可被精确测量。这种情况下,可以进行任意初始未知态的完全重构,人们将这种重构称为完全观测层次上的重构。其中一个典型例子是对光的量子态进行的标准层析重构。第 2,只有系统的部分可观察量可被精确测量。这时,人们不能根据测得数据进行密度算子的完全重构,但被重构的密度算子仍然唯一决定了被测可观察量的平均值。人们将这一重构称为不完全观测层次上的重构,最大熵原理可以为这一情形提供舞台。第 3,测量不能提供充分的信息来准确确定出被测可观察量的平均值(或概率分布),而只能提供被测可观察量的本征态的出现频率。这时,人们可以使用诸如最大似然估计或量子贝叶斯推断的方法进行状态重构。

3.1 状态层析(ST)法

1957 年,Fano 首先系统论述了根据相同制备的复本系统上的重复测量来决定量子状态的问题^[13]。他意识到至少需要两个以上的可观察量才能

达到决定状态的目的,并把足以完全确定出系统密度算子的一组力学量称为 quorum. 然而,对于一个粒子来说,除了位置、动量和能量外,很难设计出其他的可观察量,因此测量量子状态的基本问题一直未获得大的突破^[4]. 直到 19 世纪 80 年代末 90 年代初,人们在量子光学领域取得的理论和实验上的进展,才使这一局面得以改观:1989 年, Vogel 和 Risken 推导了单模电磁场的旋转正交相位的概率分布(即对应于所有不同相位的边缘概率分布)与 Wigner 函数这一伪概率分布之间的一一对应关系,并指出由同差检测得到的边缘概率分布正是 Wigner 函数的 Radon 变换^[14]. 这样,仿照经典成像技术中的处理,可以通过对同差测得的边缘概率分布进行逆 Radon 变换来得到 Wigner 函数,再从 Wigner 函数得到密度算子的矩阵元素,这就是量子光学中非常通用的“同差层析术”. 本质上,这一估计方法需要对几类不对应的可观察量进行同时测量,这样在经典意义上不存在测量结果的联合概率密度. 通常是通过测量其线性组合得到一个广义联合概率密度来实现的.

1993 年,美国 Oregon 大学的 Raymer 研究组利用这一方法首先通过实验实现了代表单模电磁场的谐振子的位置和动量的线性组合的测量,并对单模场的相干态和压缩态进行了重构^[15]. 然而,这一方法却受到了无法控制的近似因素的影响,因为根据有限次数的测量无法得到边缘概率分布的解析形式,进而 Radon 逆变换所要求的光滑参数的条件就得不到满足. 1994 年, D'Ariano 给出了实验测定光子数表象中辐射场的密度矩阵的第一个准确技术^[16],它是通过简单平均同差数据的一个函数来实现的,避开了 Radon 逆变换这一环节. 随后, D'Ariano 又把系统的密度算子表示为同差输出的边缘分布与一个核函数的卷积,从而进一步简化了这一技术^[17]. 文献[18]利用这些技术实验测量了半导体激光的光子统计性,文献[19]测定了压缩真空的密度矩阵. 尽管这些改进的方法没有用到 Radon 逆变换,但它们仍然源于光学同差层析术,因此仍将它们归类为同差层析术. 光学同差层析术的这些成功反过来又刺激了原子束状态重构的发展^[20]以及分子振动^[21]、氦原子系综^[22]、Paul 阱中的单粒子^[23]等问题实验上的状态确定.

通过量子层析,在无限次测量的极限情况下,状态可以被完美复现. 然而,实际情况中,测量次数总是有限的,于是状态重构就总会存在统计误差. 对于无限维系统,密度矩阵元素中统计误差的传播会对最终的估计质量造成严重影响. 针对这一问题,文献

[24]提出了一种一般性的估计方法,处理了根据同差层析中一 quorum 可观察量上的测量来估计系统的所有可观察量的系综平均问题,其中任一力学量的系综平均是借助李群的适当么正表示来表达的. 文献[25]则利用么正李群的平方可积表示理论对这一方法进行了严格的数学证明. 显然,这一方法假定了相应的李群表示是么正表示,对于非么正李群的推广还值得进一步的研究. 文献[26]实现了同差层析从单模向任意模的一般化,文献[27-30]使用群论又把层析方法从谐振子系统推广到了任意量子系统. 一般地,仪器噪声会使估计算法成为有偏估计,针对任意已知的噪声,文献[29]设计了一个一般的数据分析方法使估计程序无偏化. 另外,为了改进给定的实验样本上的统计误差,文献[31]设计出了称为“自适应层析术”的算法.

3.2 最大熵(MaxEnt)估计法

实验中,常常只能测量到系统算子的有限个独立矩,这样就只测量了 quorum 中的可观察量的一个子集. 这种情况下,人们不能得到系统的全部信息. 换句话说,实验数据并不能提供充分的信息来唯一确定出系统的密度算子^[8],也就是说可能有许多密度算子满足已经测得的实验数据所施加的约束条件. 根据这些密度算子对其纯态的偏离度,可以把这些密度算子相互区分开来:每一个这样的密度算子都具有不同的不确定性度量. 相对于被选观测层次上已测得的期望值而言,人们希望以一种无偏的方式来找到一个符合要求的特殊密度算子^[10]. 根据最大熵的 Jaynes 原理^[32],该密度算子必须具有最大的不确定性度量. 这样,人们借用这个附加标准就可以唯一重构出密度算子.

使用最大熵重构的前提是,必须对给定可观察量的期望值或概率分布能进行准确的测量. 理论上,这意味着要对全同制备系统的一个系综进行无限次测量,以得到那些需要的期望值. 但实际上,只要测量次数足够多,就可认为平均值得到了足够精确的测量. 如果观测层次由 quorum 中的所有可观察量组成(即完全观测层次),那么最大熵重构可以替代标准量子层析重构.

最大熵重构方案并不要求对被重构状态的纯度有任何先验假设,即:它可用来重构纯态也可用来重构统计混合态. 这一方法已用于单色光场的量子态的重构、自旋系统的量子态的重构、不完全层析数据上 Wigner 函数的重构等背景^[8].

3.3 极大似然(ML)估计法

与经典情况类似,极大似然量子状态估计的基本思想也是通过构造一个似然函数,从整体上找到

最可能产生已观测到的数据的状态.它考虑了密度矩阵元之间的先验知识,因此可以自然保持诸如封闭性和不确定关系之类的量子理论的结构.这一技术已用于量子相位的估计、光子数分布的估计和光学纠缠态的重构等问题^[33,34].2000年,Banaszek等人提出了一个利用最大似然方法重构密度矩阵的通用技术^[35],它保持了估计的正定性和正规性,可用于多模辐射场和自旋系统的密度矩阵的重构,并从本质上降低了统计误差,但没有给出显式的重构算法.2004年,Lvovsky提出了根据一组平衡同差测量来构造光学系综的密度矩阵的一个迭代期望最大化算法^[36],它避开了计算边缘概率分布的中间步骤,可直接用于测得的数据.

与用在同差层析中的标准重构方法相比,极大似然量子状态估计有以下特点^[36]:首先,对于实验数据的有限性、离散性导致的统计噪声,最大似然估计方法通过把一定的低通滤波加到 Wigner 函数的 Fourier 图像上,尽可能地提取无限维量子态上的完全信息.标准同差层析则通过附加一些数学假定来处理此问题,但在物理上并不易于实现.其次,标准同差层析方法中的回反投影算法并没有考虑密度算子的先验约束,这会导致密度矩阵出现负对角元之类的一些非物理特征.最大似然技术,则允许人们在重构程序中考虑密度算子的正定性和么迹性的约束条件,这样就总是产生物理上合理的系综.第三,最大似然技术可用于检测器效率不高的情况.而标准同差层析则要在重构程序中对检测器效率不高引起的正交噪声行为进行额外的纠正,因为统计误差会随着检测器效率的降低而快速增长.最大似然重构的缺点是,估计程序要涉及到非常复杂的计算性,即使借助数值计算,也仍然是一个相当复杂的数值优化问题.

3.4 贝叶斯(Bayesian)估计法

Bayesian 方法的核心是 Bayes 规则,即如何根据最新测得的数据来及时更新当前状态的知识^[37].最初,量子 Bayesian 推断是为重构量子力学的纯态而研发的,由于纯态的平均一般是非纯态,这样被重构的密度算子对纯态的偏离(用 von Neumann 熵量度)就被用作了重构质量的量度^[38].Helstrom, Holevo 和 Jones 曾经指出,对于未知纯态的 Bayesian 重构要受到与代价函数的选择有关的某些含糊性的影响.一般地,根据代价函数的选择,人们能得到不同的估计器(即被重构的密度算子).2001年,Schack 等人在广义测量的框架内推导了一个对纯态和混合态均适用的量子 Bayesian 规则及其精确的使用条件(一个系统的 N 个复本系统的初态可

以交换),并把他们的方法成功用于 N 个量子位的状态重构上^[37].

3.5 最小方差(LS)估计法

本质上,最小方差重构是基于以下事实:对于任何物理量子态而言,密度矩阵元素 ρ_{mn} 最终必然会随 $m(n)$ 的增加而减小,这样就使密度矩阵在 $m(n)$ 很大时可被有效地截断.很明显,截断总是要引起系统误差,但可以选择一个保证系统误差小于统计误差的截断参数来解决此问题.最小方差法是基于对所测得数据进行线性变换的方法,要求的计算量小,因此利用该方法人们可以以一种非常简单的方式实时地重构出密度矩阵元素;但同时可能产生由实验的不精确引起的“负概率”.一般地,通过增加测量次数可以限制“负概率”的出现.

最小方差法在降低估计的统计误差方面非常有优势^[39],其灵活性使人们可以根据较短时间间隔内记录的数据进行重构,如果被测得的数据对某些密度矩阵元素较为敏感,那么就可以构造所谓的规则化解.即把被重构的密度矩阵元的值设为零,而不是去处理其强波动值.规则化解降低了被重构的密度矩阵元的统计误差,但同时引起了系统误差.因此,有必要优化这一规则化,以使所引起的系统误差小于统计误差.

最小方差原理出现于 Legendre 和 Gauss 时代,目前已用于量子状态重构问题,如:借助量子态内窥镜检查对腔场量子态的重构^[40]、俘获离子的振动量子态的重构、借助平衡和不平衡同差检测对光场量子态的重构^[39].总之,最小方差估计假定实验数据带有理想的高斯噪声,正如前文所述,它允许人们借助适当的规则化来降低统计噪声,但原则上不能保证被重构的密度矩阵是正定的,事实上这要求测量次数足够大.

总体上讲,当前人们已经对基于测量全同复本的量子状态估计进行了大量的研究和实验,目前的文献主要针对以上各种方法的特点,研究了相应的改进算法,并对各自的改进算法进行了相应的仿真验证,但在理论上并没有站到一定的高度,各种方法的可靠性并没有得到理论上的支持.2005年,Artiles 等人首次对层析重构中的类型函数投影估计器和过滤最大似然估计器的统计属性进行了尝试性研究^[41],并给出了这两种估计器在不同范数下的一致性定理.但留下了几个公开问题,如:对检测器低效率情况下的非高斯噪声的处理问题,算法的收敛率问题,低检测效率情况下最优估计器的设计问题,合理确定噪声情况下 Wigner 函数的核估计器问题,能否将估计方法用于测量装置的振动以及量

子力学装置作用下的状态变换的估计问题等。

4 基于系统论观点的量子状态重构方法

随着控制理论逐渐介入量子系统的操纵,从系统理论的角度考虑量子状态估计的问题也得到了一定的发展,并取得了相应的研究成果.这一处理问题的角度与上面测量一个量子系统的许多全同复本系统的做法完全不同.针对具体的测量方式和具体解决问题的场合,出现了下面 3 种状态估计的方案.

2003 年,美国 Iowa 州立大学的 D'Alessandro 考虑了只使用单个有限维量子系统,在已知该系统的一个非退化可观察量期望值的一个或更多读数的情况下确定该系统的初始状态的问题^[5].他指出,通过生成一个李群上的所有么正演化,并借助一系列适当的被控演化和测量,就可以使人们从系统可观性的角度提取初始状态上的信息.研究表明,可观性并不总是意味着根据适当的演化和测量就能推断出初始状态上的所有参数;但通过把系统与一个状态已知的辅助系统(探针系统)耦合起来,就有可能获取初始状态上的完全信息.2004 年,D'Alessandro 又研究了借助一系列适当的被控演化和选择性测量把此问题推广到可能退化的可观察量的情形^[42],给出了确定初始状态上未知参数的最大个数的一般算法,同时讨论了当系统和探针联合可控时人们如何确定量子态上的所有参数的问题.这一方法在理论上是可行的,但实验中各种噪声的出现会使整个算法存有严峻的挑战性,因此其实用化将是进一步值得研究的问题.

2005 年,Silberfarb 等人基于对全同制备系统的一个系综上的单个可观察量进行连续的弱测量,提出了一种新的量子状态重构方案^[6].他要求此系综被整体驱动以使每个成员都经历着全同的、精心设计的动力学演化,此演化需要把新信息连续映射到被测量上.其中的状态估计借用了经典的贝叶斯滤波方法,并扩展了经典动力学演化的 Gaussian 随机变量的状态估计方案.这一估计是实时的,对每个成员具有最小的扰动,从被测量上提取的信息有可能用来实现闭环量子反馈控制.

2001 年,Gambetta 和 Wiseman 研究了存在系统未知参数的情况下利用量子轨迹理论进行状态估计的问题^[7],其中的估计方法主要借助了描述连续被检测的开放量子系统演化的量子轨迹理论.即通过考虑系统与环境的相互作用,实时地测量环境来得到相应的条件状态(平均测后状态的一个拆分)演化的随机主方程,进一步根据连续检测到的测量记录,并借助经典的概率统计方法来对系统的状态做出最佳估计. Gambetta 和 Wiseman 把他们的估计

方法用于了一个与未知 Rabi 频率的经典电磁场耦合的两级原子的状态估计中,他们指出,估计的质量极大依赖于检测环境的不同方式.事实上,每个时刻的这一估计在获取系统的真实状态时会存在较大的误差,研究能比较准确地获取系统真实状态的方法还有很大的空间.

5 结 语

综上所述,量子系统状态估计方法在数学原理上与经典状态估计并没有多大差别,根本差别在于量子系统状态本身的特殊性.围绕对于量子态的测量方式,出现了不同的量子状态估计方式,并最终导致状态估计的不同适用场合.

第 1 种测量方式,是基于对某个系统的大量复本系统的一组独立可观察量进行测量(即测量一个系统就记录出此次测量的结果,接着重复测量第 2 个系统,……).这一测量方案是目前量子状态估计中使用最多、最通用的一种测量方案,一般只能用于初始状态的重构,因为宏观仪器只能制备出大量全同的初始状态,而无法制备出大量全同的任意时刻的未知被控演化态.显然这一状态估计方案非常适合于实验前的初态决定,可以被看作实验的前期工作.第 2 种测量方式,是只使用单个有限维量子系统,有可能再加上一个辅助系统,并借助适当设计的控制场,从一系列适当的被控演化和测量中推断出系统初始状态中的未知参数.这一方案的适用场合类似于第 1 种测量情况.第 3 种测量方式,是在适当控制场的作用下,基于对经历全同动力学演化的全同制备系统的一个系综上的单个可观察量进行连续的弱测量来进行任意时刻的状态估计,有可能用于反馈控制中.第 4 种测量方式,是对单个开放量子系统进行连续测量,并根据已测得的历史记录来实现相应的状态估计,被估计出的状态可用于量子系统的反馈控制中.

参考文献(References)

- [1] Raymer M G, Beck M. Experimental quantum state tomography of optical fields and ultrafast statistical sampling[J]. Lecture Notes in Physics, 2004, 649: 235-295.
- [2] Von Neumann J. Mathematical foundations of quantum mechanics[M]. Princeton: Princeton University Press, 1955.
- [3] Yuen H P. Amplification of quantum states and noiseless photon amplifiers[J]. Physics Letters A, 1986, 113: 405-407.
- [4] D'Ariano G M, Paris M G A, Sacchi M F. Quantum tomographic methods[J]. Lecture Notes in Physics, 2004, 649: 7-58.

- [5] D'Alessandro D. On quantum state observability and measurement[J]. J Physics A, 2003, 36: 9721-9735.
- [6] Silberfarb A, Jessen P S, Deutsch I H. Quantum state reconstruction via continuous measurement[J]. Physical Review Letters, 2005, 95: 30402.
- [7] Gambetta J, Wiseman H M. State and dynamical parameter estimation for open quantum systems [J]. Physical Review A, 2001, 64: 042105.
- [8] Buzek V, Drobny G, Adam G. Knight reconstruction of quantum states of spin systems via the jaynes principle of maximum entropy[J]. J of Modern Optics, 1997, 44: 2607-2627.
- [9] Baier Th, Hangos K M, Magyar A, et al. Comparison of some methods of quantum state estimation[EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/arXiv:quant-ph/0511263>, 2005-11-29.
- [10] Buzek V. Quantum tomography from incomplete data via maxEnt principle[J]. Lecture Notes in Physics, 2004, 649: 189-234.
- [11] Fick E, Sauermann G. The quantum statistics of dynamics processes [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- [12] Pauli W. General principles of quantum mechanics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
- [13] Fano U. Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques [J]. Review Modern Physics, 1957, 29: 74-93.
- [14] Vogel K, Risken H. Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase [J]. Physical Review A, 1989, 40: 7113-7120.
- [15] Smithey D T, Beck M, Raymer M G, et al. Measurement of the wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum [J]. Physical Revview Letters, 1993, 70: 1244-1247.
- [16] D'Ariano G M, Macchiavello C, Paris M G A. Detection of the density matrix through optical homodyne tomography without filtered back projection [J]. Physical Review A, 1994, 50: 4298-4302.
- [17] D'Ariano G M, Leonhardt U, Paul H. Homodyne detection of the density matrix of the radiation field[J]. Physical Review A, 1995, 52: R1801-R1804.
- [18] Munroe M, Boggavarapu D, Anderson M E, et al. Photon number statistics from phase-averaged quadrature field distribution: Theory and ultrafast measurement[J]. Physical Review A, 1995, 52: R924-R927.
- [19] Schiller S, Breitenbach G, Pereira S F, et al. Quantum statistics of the squeezed vacuum by measurement of the density matrix in the number state representation [J]. Physical Review Letters, 1996, 77: 2933-2936.
- [20] Janicke U, Wilkens M. Tomography of atom beams [J]. J of Modern Optics, 1995, 42: 2183-2199.
- [21] Dunn T J, Sweetser J N, Walmsley I A. Experimental determination of the quantum-mechanical state of a molecular vibrational mode using fluorescence tomography[J]. Physical Review Letters, 1995, 74: 884-887.
- [22] Kurtsiefer C, Pfau T, Mlynek J. Measurement of the wigner function of an ensemble of helium atoms[J]. Nature, 1997, 386: 150-153.
- [23] Leibfried D, Meekhof D M, King B E, et al. Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom[J]. Physical Review Letters, 1996, 77: 4281-4285.
- [24] D'Ariano G M. Universal quantum estimation [J]. Physical Review A, 2000, 268: 151-157.
- [25] Cassinelli G, D'Ariano G M, De Vito E, et al. Group theoretical quantum tomography[J]. J of Mathematical Physics, 2000, 41: 7940-7951.
- [26] D'Ariano G M, Kumar P, Sacchi M F. Universal homodyne tomography with a single local oscillator[J]. Physical Review A, 2000, 61: 013806.
- [27] D'Ariano G M. In quantum communications, computing, and measurement [M]. New York, London: Kluwer Academic/ Plenum Publishing, 2000.
- [28] Paini M. Quantum tomography via group theory[EB/OL]. <http://arXiv.org/abs/quant-ph/0002078>, 2000-12-25.
- [29] D'Ariano G M. Universal quantum estimation [J]. Physical Review, 2000, 268: 151-157.
- [30] Cassinelli G, D'Ariano G M, De Vito E, et al. Group theoretical quantum tomography[J]. J of Mathematical Physics, 2000, 41: 7940-7951.
- [31] D'Ariano G M, Paris M G A. Adaptive quantum tomography[J]. Physical Review A, 1999, 60: 518-528.
- [32] Jaynes E T. Information theory and statistical mechanics[J]. Physical Review, 1957, 108: 171-190.
- [33] D'Ariano G M, Maccone L, Paris M G A. Quorum of observables for universal quantum estimation [J]. Physical Review A, 2001, 34: 93-103.
- [34] Hradil Z, Rehacek J, Fiurasek J, et al. Maximum-likelihood methods in quantum mechanics[J]. Lecture Notes in Physics, 2004, 649: 59-112.
- [35] Banaszek K, D'Ariano G M, Paris M G A, et al. Maximum-likelihood estimation of the density matrix [J]. Physical Review A, 2000, 61: 010304.

(下转第 132 页)

参考文献(References)

- [1] Pawlak Z. Rough sets[J]. Int J of Information and Computer Science, 1982, 11(5): 341-356.
- [2] Pawlak Z. Rough set approach to multi-attribute decision analysis [J]. European J of Operational Research, 1994, 72(3): 443-459.
- [3] Roman W S, Larry H. Rough sets as a front end of neural-network texture classifiers[J]. Neurocomputing, 2001, 36(1-4): 85-102.
- [4] 蔡忠闽, 管晓宏, 邵萍, 等. 基于粗糙集理论的入侵检测新方法[J]. 计算机学报, 2003, 26(3): 361-366.
(Cai Zhong-min, Guan Xiao-hong, Shao Ping, et al. A new approach to intrusion detection based on rough set theory[J]. Chinese J of Computers, 2003, 26(3): 361-366.)
- [5] Lee W. A data mining framework for constructing features and models for intrusion detection systems[D]. New York: Columbia University, 1999.
- [6] Prodromidis L, Stolfo S J. Agent-based distributed learning applied to fraud detection [R]. New York: Columbia University, 1999.
- [7] Lee W, Stolfo S J. Data mining approaches for intrusion detection [C]. Proc of the 7th USENIX Security Symposium. San Antonio, 1998: 79-93.
- [8] 杨明, 孙志挥, 宋余庆. 快速更新全局频繁项目集[J]. 软件学报, 2004, 15(8): 1189-1197.
(Yang Ming, Sun Zhi-hui, Song Yu-qing. Fast updating of globally frequent itemsets[J]. J of Software, 2004, 15(8): 1189-1197.)
- [9] Jelonek J, Krawiec K, Slowinski R. Rough set reduction of attributes and their domains for neural networks[J]. Computational Intelligence, 1995, 11(2): 339-347.
- [10] Wang Jue, Wang Ju. Reduction algorithm based on discernibility matrix the ordered attributes method[J]. J of Computer Science and Technology, 2001, 16(6): 489-504.
- [11] 杨明, 孙志挥. 改进的差别矩阵及其求核方法[J]. 复旦大学学报, 2004, 43(5): 865-868.
(Yang Ming, Sun Zhi-hui. Improvement of discernibility matrix and the computation of a core[J]. J of Fudan University, 2004, 43(5): 865-868.)
- [12] Hu X H, Cercone N. Learning in relational databases: A rough set approach [J]. Int of Computational Intelligence, 1995, 11(2): 323-338.
- [13] 杨明. 一种基于改进差别矩阵的核增量式更新算法[J]. 计算机学报, 2006, 29(3): 407-413.
(Yang Ming. An incremental updating algorithm of the computation of a core based on the improved discernibility matrix [J]. Chinese J of Computers, 2006, 29(3): 407-413.)
- [14] 王国胤. 决策表核属性的计算方法[J]. 计算机学报, 2003, 26(5): 611-615.
(Wang Guo-yin. Calculation methods for core attributes of decision table[J]. Chinese J of Computers, 2003, 26(5): 611-615.)

(上接第 126 页)

- [36] Lvovsky A I. Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography[J]. J Optics B: Quantum Semiclass Optics, 2004, 6: S556-S559.
- [37] Schack R, Brun T A, Caves C M. Quantum bayes rule [J]. Physical Review A, 2001, 64: 0143051.
- [38] Buzek V, Derka R, Adam G, et al. Reconstruction of quantum states of spin systems: From quantum bayesian inference to quantum tomography[J]. Annals of Physics, 1998, 266: 454-496.
- [39] Opatrny T, Welsch D G, Vogel W. Least-squares inversion for density-matrix reconstruction[J]. Physical Review A, 1997, 56: 1788-1799.
- [40] Bardoff P J, Mayr E, Schleich W P, et al. Simulation of quantum state endoscopy[J]. Physical Review A, 1996, 53: 2736-2741.
- [41] Artiles L M, Gill R D, Guta M I. An invitation to quantum tomography [J]. J of the Royal Statistical Society B, 2005, 67: 109-134.
- [42] D'Alessandro D. On the observability and state determination of quantum mechanical systems[C]. Proc of the 43rd Conf on Decision and Control. Paradise Island: IEEE, Piscataway NJ, 2004.