

文章编号: 1001-0920(2006)11-1303-04

参数不确定切换系统饱和控制器的随机梯度求解方法

宋 杨, 向峥嵘, 胡维礼
(南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘 要: 针对一类各子系统执行机构均具有饱和特性的参数不确定线性切换系统, 首先基于公共李雅普诺夫函数法给出了任意序列下稳定的状态反馈控制器设计方法, 而后构造出用于求解饱和控制律的随机梯度算法. 该算法依概率可收敛到一组可行解, 数值例子表明了该算法的有效性.

关键词: 饱和控制; 切换系统; 公共李雅普诺夫函数; 随机梯度算法; 参数不确定性

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Randomized Gradient Algorithms for Saturation Controller Design of Switched Systems with Parameter Uncertainties

SONG Yang, XIANG Zheng-rong, HU Wei-li

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China Correspondent: XIANG Zheng-rong, E-mail: xiangzr@mail.njust.edu.cn)

Abstract Aiming at a class of linear switched systems with parameter uncertainties and actuators saturation, an approach of designing state feedback controllers is proposed based on common Lyapunov function technique. A randomized gradient algorithm which can converge to a feasible solution with probability is constructed to solve the saturation control law. A numerical example shows the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Saturation control; Switched systems; Common Lyapunov function; Randomized gradient algorithm; Parameter uncertainties

1 引言

切换系统是混杂系统的一种特例, 它由若干个子系统和相应的切换规则构成. 稳定性是切换系统的重要研究内容, 不能简单归结于各个子系统的稳定性. 文献[1]利用公共李雅普诺夫函数(CLF)给出了线性切换系统任意序列下稳定的控制器设计方法. 另一方面, 由于实际系统执行机构能够输出的最大能量或幅值总是有限的, 从而表现出一定程度的饱和特性. 为了保证系统在实际运行中能够达到预期性能, 在设计过程中考虑执行机构的饱和特性是必要的^[2].

本文采用CLF方法研究了执行机构存在饱和特性时参数不确定切换系统的镇定问题; 针对系统

的参数不确定性构造了随机梯度算法用于求解饱和控制器参数, 并给出了算法的收敛性证明.

2 饱和控制器设计

考虑如下具有饱和特性的线性切换系统:

$$\dot{x} = A_i(\Delta)x(t) + B_i(\Delta)\text{sat}(U_i), \quad (1)$$

其中: $i \in M = \{1, \dots, N\}$ 为子系统标号; $x(t) \in R^n$; $A_i(\Delta) = A_i + \Delta A_i$, $B_i(\Delta) = B_i + \Delta B_i$ 为子系统 i 的参数, ΔA_i 和 ΔB_i 表示参数的不确定部分, 其分布范围分别记为 $\Omega_{\Delta A_i}$ 和 $\Omega_{\Delta B_i}$, 分布的概率密度函数 $f_{\Delta A_i}$ 和 $f_{\Delta B_i}$ 为已知. $U_i \in R^1$ 为子系统 i 的外输入, $\text{sat}(U_i) = \text{sgn}(U_i) \min\{1, |U_i|\}$ 是饱和输出函数. Δ_i 表示子系统 i 不确定参数的集合, Ω_i 和 f_{Δ_i} 表示子系统 i 的不确定参数的分布范围及概率密度函数.

收稿日期: 2005-09-13; 修回日期: 2005-11-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(60174019; 60474034).

作者简介: 宋杨(1976—)男, 安徽淮南人, 博士生, 从事切换系统、混杂系统等研究; 胡维礼(1941—)男, 江苏东台人, 教授, 博士生导师, 从事高精度伺服系统、网络控制系统等研究.

定理1 若存在适维矩阵 $Y_i, X > 0, i \in M = \{1, 2, \dots, N\}$, 使得下式:

$$XA_i^T(\Delta) + A_i(\Delta)X + B_i(\Delta)Y_i + Y_i^T B_i^T(\Delta) < 0, \\ Y_i^T Y_i - X < 0 \quad (2)$$

成立, 则当系统初值 $x_0 \in \Phi$ 时, 切换系统(1) 在控制律 $U_i = Y_i X^{-1} x(t)$ 作用下, 在任意切换序列下渐近稳定 其中 $\Phi = \{x: x^T X^{-1} x < 1\}$ 称为系统的一个不变集

使用 Schur 补引理便可证明定理1 成立, 证明略

3 控制器的随机梯度算法求解

由于不确定性 Δ 可能有无穷多个值, 因此无法使用 Matlab 的 LM I 工具箱求解定理1 尽管上述问题可转化为针对由不确定参数的边界值组合而成的有限个矩阵进行求解, 但当子系统的不确定参数较多或子系统个数较多时, 边界矩阵数目相当大, 求解仍然不易

随机梯度算法最早见于 Polyak 等人的论文^[3,4] 文献[3] 提出随机梯度算法并应用到具有随机扰动的线性系统二次调节器设计中, 文献[4] 利用该算法求解带有不确定项的 LM I 此后随机梯度算法在很多方向得到了应用, 例如采样系统控制器设计^[5], 寻找切换系统的 CLF^[6], 两个子系统构成的切换系统寻找多 Lyapunov 函数^[7] 等 本文针对参数不确定并含有非线性项的矩阵不等式(2) 和(3), 研究使用随机梯度算法来求解饱和和控制律

记 $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$,

$$\| (A_1, \dots, A_N) \| = \sqrt{\| A_1 \|^2 + \dots + \| A_N \|^2}, \\ \langle (A_1, \dots, A_N), (B_1, \dots, B_N) \rangle = \langle A_1, B_1 \rangle + \dots + \langle A_N, B_N \rangle,$$

$$M_i := \{ (X \in E^n, Y_i): \text{对于所有的 } \Delta_i \in \Omega_i,$$

$$XA_i^T(\Delta) + A_i(\Delta)X + \\ B_i(\Delta)Y_i + Y_i^T B_i^T(\Delta) < 0\},$$

$$N_i := \{ (X \in E^n, Y_i): Y_i^T Y_i - X < 0\}.$$

E^n 为所有 $n \times n$ 维正定阵集合, H^n 为所有 $n \times n$ 维实对称阵集合 $\text{Pr}\{X\}$ 表示随机事件 X 发生的概率 记 M_i^X 为 M_i 中所有 X 构成的集合, $M_i^{Y_i}$ 表示 M_i 中所有 Y_i 构成的集合, 类似可得 N_i^X 和 $N_i^{Y_i}$ 则控制律的求解问题可转化为寻找 $X > 0, Y_1, \dots, Y_N$, 满足

$$X \in \bigcap_{i=1}^N (M_i^X \cap N_i^X), \\ Y_i \in (M_i^{Y_i} \cap N_i^{Y_i}).$$

对于 $A \in H^n$, 定义映射 $A^+ := \arg \min_{X \in E^n} \| A -$

$X \|$, 该映射也可等价表示为: 将 A 分解为 $A = T \Lambda T^T$, T 为正交阵, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, 则 $A^+ = T \Lambda^+ T^T$, 其中 $\Lambda^+ = \text{diag}\{\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+\}$, $\lambda_i^+ = \max\{0, \lambda_i\}$.

定义

$$V_i(X, Y_i, \Delta_i) := \begin{bmatrix} V_{i1}(X, Y_i, \Delta_i) & 0 \\ 0 & V_{i2}(X, Y_i) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$v_i(X, Y_i, \Delta_i) := \| [V_i(X, Y_i, \Delta_i)]^+ \| = \sqrt{\| [V_{i1}(X, Y_i, \Delta_i)]^+ \|^2 + \| [V_{i2}(X, Y_i)]^+ \|^2}. \quad (4)$$

其中

$$V_{i1}(X, Y_i, \Delta_i) = XA_i^T(\Delta) + A_i(\Delta)X + \\ B_i(\Delta)Y_i + Y_i^T B_i^T(\Delta),$$

$$V_{i2}(X, Y_i) = Y_i^T Y_i - X.$$

显然

$$v_i(X, Y_i, \Delta_i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$X \in M_i^X \cap N_i^X, Y_i \in M_i^{Y_i} \cap N_i^{Y_i}.$$

假设1 总存在 $r > 0$, 使得集合

$$S = \{ (X > 0, Y_1, \dots, Y_N): \text{对于所有的 } \Delta_i \in \Omega_i, \\ i \in M \text{ 有 } V_i(X, Y_1, \Delta_i) < 0, \\ \dots, V_N(X, Y_N, \Delta_N) < 0\},$$

包含球

$$B_r = \{ (X, Y_1, \dots, Y_N): \| (X, Y_1, \dots, Y_N) - \\ (X^*, Y_1^*, \dots, Y_N^*) \| < r\},$$

其中 $(X^*, Y_1^*, \dots, Y_N^*) \in S$.

假设2 对于任意 $(X, Y_1, \dots, Y_N) \in S$, 有

$$\text{Pr}\{V_i(X, Y_i, \Delta_i) > 0\} > 0, i = 1, 2, \dots, N.$$

注1 假设1 表示可行解集合中, 解集不完全由孤立的点构成 假设2 表示对于非可行解 X, Y_i , 总存在 $\Delta_i \in \Omega$ 使得 $V_i(X, Y_i, \Delta_i) > 0$, 从而下文梯度算法的迭代过程能够进行 对于一般控制系统, 假设1 和假设2 是自然满足的

随机梯度算法 以 k_0 表示预设循环次数, 作如下计算, 随着 k_0 的增加依概率收敛到可行解

Step1 选取初值 $(X^0, Y_1^0, \dots, Y_N^0)$, $k = 1$

Step2 计算 $h(k)$, 依据子系统 $h(k)$ 的概率密度函数 $f_{\Delta h(k)}$ 产生扰动 $\Delta_{h(k)}^k$, 并根据式(4) 计算 $v_{h(k)}^k$. $\Delta_{h(k)}^k$ 及 $v_{h(k)}^k$ 中的上标 k 表示迭代步数

Step3 1) 当 $v_{h(k)}^k > 0$ 时, 进行迭代

$$\begin{cases} X^{k+1} = [X^k - \mu_k \hat{Q} v_{h(k)}^k]^+, \\ Y_1^{k+1} = Y_1^k - c_1(k) \mu_k \hat{Q}_1 v_1^k, \\ \vdots \\ Y_N^{k+1} = Y_N^k - c_N(k) \mu_k \hat{Q}_N v_N^k; \end{cases} \quad (5a)$$

当 $v_{h(k)}^k = 0$ 时, 进行迭代

$$X^{k+1} = X^k, Y_1^{k+1} = Y_1^k, \dots, Y_N^{k+1} = Y_N^k. \quad (5b)$$

2) $k = k + 1$; 当 $k \geq k_0$ 时停止循环, 否则转

Step1 继续 其中

$$h(k) = \begin{cases} k \bmod N, & (k \bmod N) \neq 0; \\ N, & (k \bmod N) = 0; \end{cases}$$
$$c_i(k) = \begin{cases} 1, & h(k) = i; \\ 0, & h(k) \neq i; \end{cases}$$

$$\hat{Q} v_i^k = \frac{A_i^T [V_{i1}^k]^+ + [V_{i1}^k]^+ A_i - [V_{i2}^k]^+}{v_i^k},$$

$$\hat{Q}_i v_i^k = \frac{2B_i^T [V_{i1}^k]^+ + 2Y_i [V_{i2}^k]^+}{v_i^k};$$

$$\mu_k = \frac{v_{h(k)}^k + r \| (\hat{Q}_{h(k)}(k), c_1(k) \hat{Q}_1 v_{h(k)}^k, \dots, c_N(k) \hat{Q}_N v_{h(k)}^k) \|}{\| (\hat{Q}_{h(k)}(k), c_1(k) \hat{Q}_1 v_{h(k)}^k, \dots, c_N(k) \hat{Q}_N v_{h(k)}^k) \|^2}.$$

这里 $v_i(X^k, Y_i^k, \Delta_i^k)$ 简记为 v_i , $V_{i1}(X^k, Y_i^k, \Delta_i^k)$ 简记为 V_{i1}^k , $V_{i2}(X^k, Y_i^k)$ 简记为 V_{i2}^k

收敛性证明 v_1, v_2 梯度表达式的推导过程如

下:

由于 v_1^k 分别关于 (X^k, Y_1^k) 是凸函数, 所以

$$v_1(X^k + \Delta X, Y_1^k + \Delta Y_1, \Delta_1^k) = v_1^k + \langle \frac{[V_{11}^k]^+}{v_1^k}, \Delta V_1^k \rangle + o(\| \Delta V_1^k \|). \quad (6)$$

这里: v_1^k 是 $V_1(X^k, Y_1^k, \Delta_1^k)$ 的简记形式,

$$\Delta V_1^k = V_1(X^k + \Delta X, Y_1^k + \Delta Y_1, \Delta_1^k) - V_1(X^k, Y_1^k, \Delta_1^k).$$

注意到

$$\begin{aligned} \langle [V_{11}^k]^+, \Delta V_1^k \rangle &= \text{tr}([V_{11}^k]^+ (\Delta X A_1^T(\Delta_1^k) + A_1(\Delta_1^k) \Delta X + \\ & B_1(\Delta_1^k) \Delta Y_1 + \Delta Y_1^T B_1^T(\Delta_1^k)) + \\ & [V_{12}^k]^+ (\Delta Y_1^T Y_1^k + Y_1^T \Delta Y_1 + \\ & \Delta Y_1^T \Delta Y_1 - \Delta X)), \quad (7) \\ \text{tr}([V_{11}^k]^+ A_1(\Delta_1^k) \Delta X + [V_{11}^k]^+ \Delta X A_1^T(\Delta_1^k)) &= \\ \langle A_1^T(\Delta_1^k) [V_{11}^k]^+ + [V_{11}^k]^+ A_1(\Delta_1^k), \Delta X \rangle, \\ \text{tr}([V_{11}^k]^+ \Delta Y_1^T B_1^T(\Delta_1^k) + [V_{11}^k]^+ B_1(\Delta_1^k) \Delta Y_1) &+ \\ [V_{12}^k]^+ Y_1^T \Delta Y_1 + [V_{12}^k]^+ \Delta Y_1^T Y_1^k &= \\ 2 \langle B_1^T(\Delta_1^k) [V_{11}^k]^+ + Y_1^k [V_{12}^k]^+, \Delta Y_1 \rangle, \\ \text{tr}([V_{12}^k]^+ \Delta Y_1^T \Delta Y_1) &= \langle Y_1^k [V_{12}^k]^+, o(\Delta Y_1) \rangle. \quad (8) \end{aligned}$$

将式(7), (8) 代入到式(6), 可得

$$\hat{Q} v_1^k = \frac{A_1^T(\Delta_1^k) [V_{11}^k]^+ + [V_{11}^k]^+ A_1(\Delta_1^k) - [V_{12}^k]^+}{v_1^k},$$

$$\hat{Q}_1 v_1^k = \frac{2B_1^T(\Delta_1^k) [V_{11}^k]^+ + 2Y_1^k [V_{12}^k]^+}{v_1^k}.$$

同样可得

$$\hat{Q} v_2^k = \frac{A_2^T(\Delta_1^k) [V_{21}^k]^+ + [V_{21}^k]^+ A_2(\Delta_1^k) - [V_{22}^k]^+}{v_2^k},$$

$$\hat{Q}_2 v_2^k = \frac{2B_2^T(\Delta_1^k) [V_{21}^k]^+ + 2Y_2^k [V_{22}^k]^+}{v_2^k}.$$

不失一般性, 仅对 $N = 2$ 的情形加以证明 记

$$\begin{aligned} (\bar{X}^k, \bar{Y}_1^k, \bar{Y}_2^k) &= \\ (X^*, Y_1^*, Y_2^*) &+ \\ \frac{r (\hat{Q} v_{h(k)}^k, c_1(k) \hat{Q}_1 v_{h(k)}^k, c_2(k) \hat{Q}_2 v_{h(k)}^k)}{\| (\hat{Q} v_{h(k)}^k, c_1(k) \hat{Q}_1 v_{h(k)}^k, c_2(k) \hat{Q}_2 v_{h(k)}^k) \|}. \quad (9) \end{aligned}$$

由假设 1, 若 $(X^*, Y_1^*, Y_2^*) \in S$ 则 $(\bar{X}^k, \bar{Y}_1^k, \bar{Y}_2^k) \in B_r$, 即 $v_1(\bar{X}^k, \bar{Y}_1^k, \Delta_1^k) = 0, v_2(\bar{X}^k, \bar{Y}_2^k, \Delta_2^k) = 0$

当 $v_{h(k)}^k > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \| (X^{k+1}, Y_1^{k+1}, Y_2^{k+1}) - (X^*, Y_1^*, Y_2^*) \|^2 &\leq \\ \| (X^k - X^*, Y_1^k - Y_1^*, Y_2^k - Y_2^*) \|^2 &+ \\ \mu_k^2 \| (\hat{Q} v_{h(k)}^k, c_1(k) \hat{Q}_1 v_1^k, c_2(k) \hat{Q}_2 v_2^k) \|^2 &- \\ 2\mu_k \langle (\hat{Q} v_{h(k)}^k, c_1(k) \hat{Q}_1 v_1^k, c_2(k) \hat{Q}_2 v_2^k), \\ (X^k - \bar{X}^k, Y_1^k - \bar{Y}_1^k, Y_2^k - \bar{Y}_2^k) \rangle &- \\ 2\mu_k \langle (\hat{Q} v_{h(k)}^k, c_1(k) \hat{Q}_1 v_1^k, c_2(k) \hat{Q}_2 v_2^k), \\ (\bar{X}^k - X^*, \bar{Y}_1^k - Y_1^*, \bar{Y}_2^k - Y_2^*) \rangle. \quad (10) \end{aligned}$$

注意到 $v_{h(k)}(X^k, Y_{h(k)}^k, \Delta_{h(k)}^k) = 0$ 且 $v_{h(k)}^k$ 为凸函数时, 有

$$\begin{aligned} -v_{h(k)}^k &= \\ v_{h(k)}(X^k, Y_{h(k)}^k, \Delta_{h(k)}^k) - v_{h(k)}(X^k, Y_{h(k)}^k, \Delta_{h(k)}^k) &\geq \\ \langle \hat{Q} v_{h(k)}^k, c_1(k) \hat{Q}_1 v_1^k, c_2(k) \hat{Q}_2 v_2^k \rangle, \\ (\bar{X}^k - X^k, \bar{Y}_1^k - Y_1^k, \bar{Y}_2^k - Y_2^k) \rangle. \quad (11) \end{aligned}$$

由式(9) 可得

$$\begin{aligned} \langle (\hat{Q} v_{h(k)}^k, c_1(k) \hat{Q}_1 v_{h(k)}^k, c_2(k) \hat{Q}_2 v_{h(k)}^k), \\ (\bar{X}^k - X^*, \bar{Y}_1^k - Y_1^*, \bar{Y}_2^k - Y_2^*) \rangle &= \\ r \| (\hat{Q}_{h(k)}(k), c_1(k) \hat{Q}_1 v_1^k, c_2(k) \hat{Q}_2 v_2^k) \|. \quad (12) \end{aligned}$$

由式(11), (12) 可得

$$\begin{aligned} \| (X^{k+1}, Y_1^{k+1}, Y_2^{k+1}) - (X^*, Y_1^*, Y_2^*) \|^2 &\leq \\ \| (X^k - X^*, Y_1^k - Y_1^*, Y_2^k - Y_2^*) \|^2 &- \\ \frac{(v_{h(k)}^k + r \| (\hat{Q} v_{h(k)}^k, c_1(k) \hat{Q}_1 v_1^k, c_2(k) \hat{Q}_2 v_2^k) \|)^2}{\| (\hat{Q} v_{h(k)}^k, c_1(k) \hat{Q}_1 v_1^k, c_2(k) \hat{Q}_2 v_2^k) \|^2} &\leq \\ \| (X^k - X^*, Y_1^k - Y_1^*, Y_2^k - Y_2^*) \|^2 - r_2 \end{aligned}$$

由上可知, 经过 $n = \| (X^0 - X^*, Y_1^0 - Y_1^*, Y_2^0 - Y_2^*) \|^2 / r^2$ 次迭代, 必将收敛到球 B_r 内的某个可行解

由假设 2, 不妨令 $\Pr\{V_i(X, Y_i, \Delta) > 0, i \in M\} \geq p$ 在 k_0 次循环中, $v_{h(k)}^k > 0$ 的次数和为 L^{k_0} , 显然对于任意 $\epsilon > 0$, 由 Chernoff Bound 引理^[8], 有

$$\begin{aligned} \Pr\{L^{k_0}/k_0 - p \geq \epsilon\} &\geq \\ \Pr\{|L^{k_0}/k_0 - p| \leq \epsilon\} &\geq 1 - \delta, \\ \text{其中} \quad \delta &\leq e^{-2\epsilon^2 k_0}. \end{aligned}$$

因此有

$$\Pr\{L^{k_0} \geq (p - \epsilon)k_0\} \geq 1 - \delta$$

令 $\epsilon = p - n/k_0 > 0$,

可得 $\Pr\{L^{k_0} \geq n\} \geq 1 - \delta$

因此随循环次数 k_0 的增加算法依概率收敛到某可行解 $\square$

注2 若待求解问题有可行解, 则最多经过 n 次迭代后算法可找到可行解. 实际应用中, (X^*, Y_1^*, Y_2^*) 及 r 无法预知, 所以最大迭代次数 n 无法确定, 只知道算法得到可行解的概率随迭代次数增加而增大. 一般情况下, 算法给出的一组迭代值可通过代入边界不等式验证是否为可行解.

注3 在梯度算法中, 计算过程使用3个矩阵不等式为一组进行迭代. 需要指出, 上述分组并非唯一, 也可每步只利用两个矩阵不等式一组进行迭代, 同样可收敛到可行解. 具体如下:

Step1 同上;

Step2 同上;

Step3 1) 当 $v_{h(k)}^k > 0$ 时, 进行迭代

$$\begin{cases} X^{k+1} = [X^k - \mu_k \hat{Q}_i v_{h(k)}^k]^+, \\ Y_i^{k+1} = Y_i^k - c_i(k) \mu_k \hat{Q}_i v_{h(k)}^k, i \in M; \end{cases}$$

当 $v_{h(k)}^k \leq 0$ 时, 进行迭代

$$X^{k+1} = X^k, Y_i^{k+1} = Y_i^k, i \in M.$$

2) $k = k + 1$; 当 $k \geq k_0$ 时停止迭代, 否则转

Step2 继续. 其中 $v_{h(k)}^k, \mu_k$ 定义同上文,

$$h(k) = \begin{cases} k \bmod 2N, & (k \bmod N) \neq 0; \\ 2N, & (k \bmod N) = 0; \end{cases}$$

$$c_i(k) = \begin{cases} 1, & h(k) = 2i \text{ 或 } 2i - 1; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$\hat{Q}_i v_{2i-1}^k = \frac{[V_{2i-1}^k]^T A_i(\Delta) + A_i^T(\Delta) [V_{2i-1}^k]^+}{v_{2i-1}^k},$$

$$\hat{Q}_i v_{2i-1}^k = \frac{2B_i^T(\Delta^k) [V_{2i-1}^k]^+}{v_{2i-1}^k},$$

$$\hat{Q}_i v_{2i}^k = -\frac{[V_{2i}^k]^+}{v_{2i}^k}, \hat{Q}_i v_{2i}^k = \frac{Y_i^k [V_{2i}^k]^+}{v_{2i}^k};$$

$$v_{2i-1}^k = \| [V_{2i-1}^k]^+ \|,$$

$$v_{2i}^k(X^k, Y_i^k) = \| [V_{2i}^k]^+ \|,$$

$$V_{2i-1}^k = X^k A_i^T(\Delta^k) + A_i(\Delta^k) X^k + B_i(\Delta^k) Y_i^k + Y_i^{kT} B_i^T(\Delta^k).$$

4 数值例子

考虑切换系统(1), 各参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.2 & -0.1 \\ -0.2 & 0.35 & 0.25 \\ 0.2 & 0.21 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.274 & 1 & 0 & 0.22 \\ 0.247 & 4 & 0.271 & 0 & 0.17 \\ 0.2 & 0.1 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{A_1} \in$$

$$\begin{bmatrix} (-0.48, -0.32) & (-0.24, -0.16) & (-0.12, -0.08) \\ 0 & (0.28, 0.42) & (0.2, 0.3) \\ 0 & 0 & (-0.36, -0.24) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{A_2} = \Omega_{A_3} = \begin{bmatrix} (0.95, 1.1) \\ (0.95, 1.1) \\ (1, 1.09) \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{A_2} \in$$

$$\begin{bmatrix} (-0.288, -0.260) & (0, 0) & (-0.209, -0.231) \\ 0 & (0.258, 0.285) & (0.162, 0.179) \\ 0 & 0 & (-0.525, -0.475) \end{bmatrix},$$

参数不确定服从均匀分布. 初始状态分别为 $x_0 =$

$[1.1 \ 0.33 \ 0.25]^T$, 使用文中算法可得

$$P = \begin{bmatrix} 1.181 & 0 & -1.063 & 2 & -0.569 & 9 \\ -1.063 & 2 & 3.909 & 7 & 1.066 & 1 \\ -0.569 & 9 & 1.066 & 1 & 1.165 & 0 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = [0.581 \ 9 \ -1.520 \ 1 \ -0.568 \ 3],$$

$$F_2 = [0.407 \ 6 \ -1.856 \ 3 \ -0.410 \ 0]$$

切换规则为: 初始时刻子系统2作用, 此后每隔0.5s切换至另一个子系统.

上述规则作用下的响应曲线及运动轨迹分别如图1和图2所示. 可以看出, 从 $x_0 \in \Phi$ 时出发的轨迹在椭球 Φ 中运动并逐渐收敛到原点.

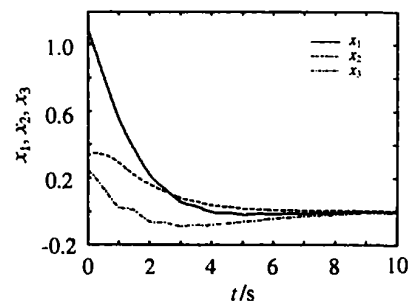


图1 初始状态为 x_0 时切换系统响应曲线

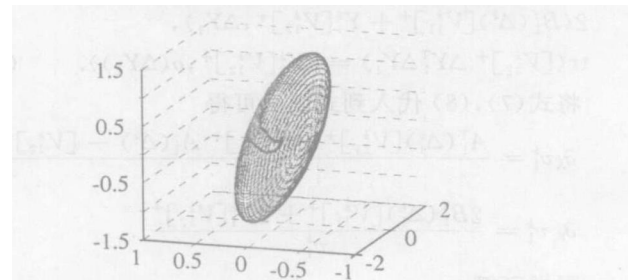


图2 切换系统轨迹及不变集

(下转第1311页)

制律 进一步可利用 Matlab 软件 LMI 工具箱求得奇异系统的最优 H_∞ 控制律 本文的结果容易推广到输出方程存在不确定的情形

参考文献(References)

- [1] Dai L Y. *Singular Control Systems* [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989: 10-16
- [2] Xu S Y, Paul Van Dooren, Stefan, et al. Robust Stabilization for Singular Systems with State Delay and Parameter Uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122-1128
- [3] Zhou S S, Li H L, Feng C B. H_∞ Suboptimal Control for a Class of Singular Systems with Time-delay: An LMI Approach [J]. *Control Theory and Applications*, 2002, 19(3): 324-328
- [4] 冯俊娥, 程兆林. 线性广义时滞系统的 H_∞ 状态反馈控制器 [J]. *控制与决策*, 2003, 18(2): 159-163
(Feng J E, Cheng Z L. H_∞ State Feedback Control for Linear Singular Systems with Time-delay in State [J]. *Control and Decision*, 2003, 18(2): 159-163)
- [5] Masubuchi I, Kamitane Y, Ohara A, et al. H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach [J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669-673
- [6] 董心壮, 张庆灵. 滞后广义系统的状态反馈 H_∞ 控制 [J]. *控制理论与应用*, 2004, 21(6): 941-944
(Dong X Z, Zhan Q L. State Feedback H_∞ Control of Linear Singular Systems with Time-delay [J]. *Control Theory and Applications*, 2004, 21(6): 941-944)
- [7] 蒋威. *退化、时滞微分系统* [M]. 合肥: 安徽大学出版社, 1998
(Jiang W. *Degenerate Differential Systems with Delay* [M]. Hefei: Anhui University Press, 1998)
- [8] Wang Y, Xie L, de Souza CE. Robust Control of a Class of Uncertain Nonlinear Systems [J]. *System Control Letters*, 1992, 19(2): 139-149
- [9] 张先明, 吴敏, 何勇. 不确定线性多时变时滞系统的时滞相关鲁棒控制 [J]. *控制与决策*, 2004, 19(5): 496-500
(Zhang X M, Wu M, He Y. Delay Dependent Robust Control for Linear Systems with Multiple Time-varying Delays and Uncertainties [J]. *Control and Decision*, 2004, 19(5): 496-500)
- [10] Xie L. Output Feedback H_∞ Control of Systems with Parameter Uncertainty [J]. *Int J of Control*, 1996, 63(4): 741-750

(上接第 1306 页)

5 结 语

采用公共李雅普诺夫函数方法研究了输入存在饱和特性时参数不确定性切换系统的状态反馈镇定, 构造了随机梯度算法用于求解反馈控制律. 该算法依概率收敛到某个可行解. 需要说明的是, 设计饱和控制器时, 若想获得较大的不变集, 则不变集可能包含部分饱和区, 待解不等式会变为非凸, 此时饱和和控制器的设计问题有待进一步研究

参考文献(References)

- [1] 翟长连, 何苇, 吴智铭. 切换系统的稳定性及镇定控制器设计 [J]. *信息与控制*, 2000, 29(1): 21-26
(Zhai C L, He W, Wu Z M. Stability and Stabilizing Design of m -Switched Systems [J]. *Information and Control*, 2000, 29(1): 21-26)
- [2] Henrion D, Tarbouriech S. LMI Relaxations for Robust Stability of Linear Systems with Saturating Controls [J]. *Automatica*, 1999, 35(9): 1599-1604
- [3] Polyak B T, Tempo R. Probabilistic Robust Design with Linear Quadratic Regulators [J]. *Systems and Control Letters*, 2001, 43(5): 343-353
- [4] Calafiore G, Polyak B T. Stochastic Algorithms for Exact and Approximate Feasibility of Robust Lmis [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(11): 1755-1759
- [5] Ishii H, Basar T, Tempo R. Randomized Algorithms for Quadratic Stability of Quantized Sampled-data Systems [J]. *Automatica*, 2004, 40(5): 839-846
- [6] Liberzon D, Tempo R. Common Lyapunov Functions and Gradient Algorithms [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2004, 49(6): 990-994
- [7] Ishii H, Basar T, Tempo R. Randomized Algorithms for Synthesis of Switching Rules for Multimodal Systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(6): 754-767
- [8] Tempo R, Bai E W, Dabbene F. Probabilistic Robustness Analysis: Explicit Bounds for Minimum Number of Samples [J]. *Systems and Control Letters*, 1997, 30(5): 237-242