第19卷 第1期 控 制 与 决 策 2004年1月
Vol. 19 No. 1 Control and Decision Jan. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)01-0085-04

部分权重信息下对方案有偏好的多属性决策法

徐泽水
(东南大学 经济管理学院, 江苏 南京 210096)

摘 要: 研究只有部分权重信息且对方案有偏好的多属性决策问题. 首先对方案的偏好信息以互反判断矩阵和互补判断矩阵这两种形式给出的情形, 分别建立一个目标规划模型, 通过求解这两个模型可确定属性的权重; 然后提出一种基于目标规划模型的多属性决策方法; 最后通过实例说明了该方法的可行性和有效性.

关键词: 多属性决策; 目标规划模型; 权重
中图分类号: C934 **文献标识码**: A

Method for multi-attribute decision making with preference information on alternatives under partial weight information

XU Ze-shui
(College of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 210096, China. E-mail: xu-zeshui@263.net)

Abstract: The multi-attribute decision making (MADM) problem is investigated, in which the information about attribute weights is partly known and the decision maker (DM) has preference information on alternatives. Two objective programming models are established under the situations where the DM has preference information on alternatives, which takes the form of reciprocal judgement matrix and complementary judgement matrix respectively. The attribute weights are determined by solving the two models. Furthermore, a method based on the models is presented for the MADM problem. Finally, an illustrative example is given to demonstrate the feasibility and effectiveness of the presented method.

Key words: multi-attribute decision making; objective programming model; weight

1 引 言

客观事物的复杂性和不确定性以及人类思维的模糊性, 使人们对只有部分权重信息的多属性决策问题产生了研究兴趣[1~4]. 属性权重信息的不完全性将引起决策方案择优的不确定性, 仅凭已有的客观信息进行决策往往导致决策的错误. 因此, 决策者对方案有偏好信息的多属性决策问题引起人们的关注. 文献[5]将多目标决策领域中的交互式决策思想引入多属性决策领域, 在属性权重信息不能完全确知的情况下, 提出一种基于方案达成度和综合度的交互式决策方法. 文献[6]在属性权重完全未知的情况下, 讨论了决策者对方案的偏好信息以互补判断矩阵形式给出的多属性决策问题.

本文对只有部分权重信息, 且决策者对决策方案的偏好信息分别以互反判断矩阵和互补判断矩阵这两种形式给出的多属性决策问题进行探讨. 首先基于上述两种偏好信息, 分别建立一个目标规划模型, 通过求解这两个模型可确定属性的权重; 然后提出一种基于目标规划模型的多属性决策法; 最后利用实例对该方法进行分析.

收稿日期: 2002-09-23; **修回日期**: 2002-11-12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(79970093); 东南大学-南瑞继保公司学位论文基金资助课题
作者简介: 徐泽水(1968—), 男, 副教授, 博士后, 从事决策分析、运筹学等研究.

2 主要结果

设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为多属性决策问题的方案集, $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ 为属性集, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}}$ 为属性的权重向量. 并设

$$H = \{w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}},\ 0 \le \alpha_j \le w_j \le \beta_j, \sum_{j=1}^{m} w_j = 1\} \tag{1}$$

为已知的部分权重信息所确定的属性可能权重集合. 对于方案 $x_i \in X$, 按第 j 个属性 $u_j \in U$ 进行测度, 得到 x_i 关于 u_j 的属性值 c_{ij}, 从而构成决策矩阵 $C = (c_{ij})_{n\times m}$, $c_{ij} > 0$.

为方便起见, 令 $M = \{1, 2, \cdots, m\}$, $N = \{1, 2, \cdots, n\}$. 属性类型主要有效益型和成本型. 为消除不同物理量纲对决策结果的影响, 决策时对决策矩阵进行如下规范化处理:

$$r_{ij} = \begin{cases} \dfrac{c_{ij}}{\max\limits_i\{c_{ij}\}}, & i \in N,\ j \in I_1; \\ \dfrac{\min\limits_i\{c_{ij}\}}{c_{ij}}, & i \in N,\ j \in I_2. \end{cases} \tag{2}$$

其中 I_1 和 I_2 分别为效益型和成本型属性的下标集合. 决策矩阵 C 经规范化处理后, 得到规范化矩阵 $R = (r_{ij})_{n\times m}$. 方案 x_i 的综合属性值为

$$z_i(w) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} w_j,\ i \in N. \tag{3}$$

若属性权重 $w_j\,(j \in M)$ 为确定的数值, 则由各方案综合属性值的大小便可确定方案的优劣. 综合属性值 $z_i(w)$ 越大, 其所对应的方案 x_i 越优. 若 $w_j\,(j \in M)$ 是未知的, 则不能直接由式(3) 确定方案的综合属性值.

下面讨论只有部分属性权重信息, 且决策者对决策方案的偏好信息分别以互反判断矩阵和互补判断矩阵这两种形式给出的多属性决策问题.

2.1 对决策方案的偏好信息给出互反判断矩阵形式

设决策者根据互反标度[7] 对决策方案 $x_i\,(i \in N)$ 进行两两比较, 并构造互反判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$. 其中: $a_{ij}a_{ji} = 1$, $a_{ii} = 1$, $a_{ij} > 0$, $i, j \in N$. 为使决策信息一致化, 将所有方案 $x_i\,(i \in N)$ 的综合属性值转化成互反判断矩阵形式 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$\bar{a}_{ij} = \frac{z_i(w)}{z_j(w)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} r_{ik} w_k}{\sum\limits_{k=1}^{m} r_{jk} w_k},\ i, j \in N. \tag{4}$$

一般情况下, 互反判断矩阵 A 和 $\bar{A}$ 之间往往存在一定的偏差. 为此引入偏差函数

$$e_{ij} = \left| a_{ij} - \bar{a}_{ij} \right| = \left| a_{ij} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} r_{ik} w_k}{\sum\limits_{k=1}^{m} r_{jk} w_k} \right| = \left| \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} (a_{ij} r_{jk} - r_{ik}) w_k}{\sum\limits_{k=1}^{m} r_{jk} w_k} \right|,\ i, j \in N. \tag{5}$$

为便于计算, 将式(5) 转化为下列形式:

$$f_{ij} = \left| \sum_{k=1}^{m} (a_{ij} r_{jk} - r_{ik}) w_k \right|,\ i, j \in N. \tag{6}$$

显然, 为得到合理的属性权重向量 w, 上述偏差函数值总是越小越好. 为此, 可构造下列优化模型:

$$(\mathrm{M1}): \begin{cases} \min f_{ij} = \left| \sum\limits_{k=1}^{m} (a_{ij} r_{jk} - r_{ik}) w_k \right|; \\ \mathrm{s.t.}\ w \in H,\ i, j \in N. \end{cases}$$

为求解模型(M1), 并考虑到所有的目标函数是公平竞争的, 且每个目标函数 f_{ij} 希望达到的期望值为 0, 因而可将(M1) 转化为下列目标规划模型:

$$(\mathrm{M2}): \begin{cases} \min J = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1, j\ne i}^{n} (s_{ij} d_{ij}^{+} + t_{ij} d_{ij}^{-}); \\ \mathrm{s.t.}\ \sum\limits_{k=1}^{m} (a_{ij} r_{jk} - r_{ik}) w_k - d_{ij}^{+} + d_{ij}^{-} = 0, \\ \quad w \in H,\ d_{ij}^{+} \ge 0,\ d_{ij}^{-} \ge 0, \\ \quad d_{ij}^{+} d_{ij}^{-} = 0,\ i, j \in N,\ i \ne j. \end{cases}$$

其中: d_{ij}^{+} 是 $\sum\limits_{k=1}^{m} (a_{ij} r_{jk} - r_{ik}) w_k$ 高于期望值 0 的上偏差变量, d_{ij}^{-} 是 $\sum\limits_{k=1}^{m} (a_{ij} r_{jk} - r_{ik}) w_k$ 低于期望值 0 的下偏差变量, s_{ij} 和 t_{ij} 分别是 d_{ij}^{+} 和 d_{ij}^{-} 的权系数. 利用目标单纯形法求解模型(M2), 可得到属性的权重向量 w, 并由式(3) 求得各方案综合属性值, 便可依此对方案进行排序和择优.

2.2 对决策方案的偏好信息给出互补判断矩阵形式

设决策者根据互补标度[7] 对决策方案 $x_i\,(i \in N)$ 进行两两比较, 并构造互补判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$. 其中: $b_{ij} + b_{ji} = 1$, $b_{ii} = 0.5$, $b_{ij} \ge 0$, $i, j \in N$. 为使决策信息一致化, 将所有方案 $x_i\,(i \in N)$ 的综合属性值转化成互补判断矩阵形式 $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})_{n\times n}$. 其中[6]

$$\overline{b_{ij}} = \frac{z_i(w)}{z_i(w) + z_j(w)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} r_{ik} w_k}{\sum_{k=1}^{m} (r_{ik} + r_{jk}) w_k}, i, j \in N. \tag{7}$$

一般情况下, 互补判断矩阵 B 和 $\overline{B}$ 之间往往存在一定的偏差. 为此引入偏差函数

$$g_{ij} = \left| b_{ij} - \overline{b_{ij}} \right| = \left| b_{ij} - \frac{\sum_{k=1}^{m} r_{ik} w_k}{\sum_{k=1}^{m} (r_{ik} + r_{jk}) w_k} \right| = \left| \frac{\sum_{k=1}^{m} [b_{ij}(r_{ik} + r_{jk}) - r_{ik}] w_k}{\sum_{k=1}^{m} (r_{ik} + r_{jk}) w_k} \right|, i, j \in N. \tag{8}$$

为便于计算, 将式(8) 转化为下列形式:

$$h_{ij} = \left| \sum_{k=1}^{m} [b_{ij}(r_{ik} + r_{jk}) - r_{ik}] w_k \right|, i, j \in N. \tag{9}$$

显然, 为得到合理的属性权重向量 w, 上述偏差函数值总是越小越好. 为此, 可构造下列优化模型:

$$(\mathrm{M}\,3): \begin{cases} \min h_{ij} = \left| \sum_{k=1}^{m} [b_{ij}(r_{ik} + r_{jk}) - r_{ik}] w_k \right|; \\ \mathrm{s.t.}\ w \in H, i, j \in N. \end{cases}$$

为求解模型(M 3), 并考虑到所有的目标函数是公平竞争的, 且每个目标函数 h_{ij} 希望达到的期望值为 0, 类似于模型(M 2), 可将模型(M 3) 转化为下列目标规划模型:

$$(\mathrm{M}\,4): \begin{cases} \min \overline{J} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} (s_{ij} d_{ij}^{+} + t_{ij} d_{ij}^{-}); \\ \mathrm{s.t.}\ \sum_{k=1}^{m} [b_{ij}(r_{ik} + r_{jk}) - r_{ik}] w_k - \\ \quad d_{ij}^{+} + d_{ij}^{-} = 0, \\ \quad w \in H, d_{ij}^{+} \geq 0, d_{ij}^{-} \geq 0, \\ \quad d_{ij}^{+} d_{ij}^{-} = 0, i, j \in N, i \neq j. \end{cases}$$

其中: d_{ij}^{+} 是 $\sum_{k=1}^{m} [b_{ij}(r_{ik} + r_{jk}) - r_{ik}] w_k$ 高于期望值 0 的上偏差变量, d_{ij}^{-} 是 $\sum_{k=1}^{m} [b_{ij}(r_{ik} + r_{jk}) - r_{ik}] w_k$ 低于期望值 0 的下偏差变量, s_{ij} 和 t_{ij} 分别是 d_{ij}^{+} 和 d_{ij}^{-} 的权系数. 求解模型(M 4), 可得到属性的权重向量 w, 并由式(3) 求得各方案综合属性值, 便可依此对方案进行排序.

综上所述, 本文给出一种基于目标规划模型的多属性决策方法, 其具体步骤如下:

1) 由多属性决策问题构造决策矩阵 C, 并用式(1) 和(2) 将矩阵 C 规范化为决策矩阵 R.

2) 若决策者以互反判断矩阵形式给出自己对方案的偏好信息, 则利用模型(M 2) 求得属性权重向量 w; 若决策者以互补判断矩阵形式给出自己对方案的偏好信息, 则利用模型(M 4) 求得属性权重向量 w.

3) 由式(3) 求得各方案综合属性值 $z_i(w)$, $i \in N$, 并依此对方案进行排序和择优.

3　实例分析[5]

为开发新产品, 拟定了 5 个投资方案 $x_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$, 考察的指标(属性) 有: 投资额(u_1), 期望净现值(u_2), 风险盈利值(u_3), 风险损失值(u_4). 各方案的属性值列于表 1.

表 1　各方案的属性值　(万元)

方案	投资额 u_1	期望净现值 u_2	风险盈利值 u_3	风险损失值 u_4
x_1	5.20	5.20	4.73	0.473
x_2	10.08	6.70	5.71	1.599
x_3	5.25	4.20	3.82	0.473
x_4	9.72	5.25	5.54	1.313
x_5	6.60	3.75	3.30	0.803

在属性集中, 期望净现值、风险盈利值为效益型属性, 投资额、风险损失值为成本型属性, 属性 u_j 的权重 $w_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 不能完全确定. 已知的部分权重信息为

$$\begin{aligned} H = \{ w = (w_1, w_2, w_3, w_4)^{\mathrm{T}}, \\ 0.3 \leq w_1 \leq 0.4, w_2 \leq 0.15, \\ 0.1 \leq w_3 \leq 0.3, w_4 \geq 0.03, \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1, \\ w_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \}. \end{aligned}$$

试确定最佳方案.

利用本文所提出的方法进行求解, 具体步骤如下:

1) 由表 1 中的数据建立决策矩阵 $C = (c_{ij})_{5\times4}$, 并利用式(1) 和(2) 将 C 规范化, 得到规范化矩阵

$$R = (r_{ij})_{5\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 0.776 & 0.828 & 1 \\ 0.516 & 1 & 1 & 0.296 \\ 0.990 & 0.627 & 0.669 & 1 \\ 0.535 & 0.784 & 0.970 & 0.360 \\ 0.788 & 0.560 & 0.578 & 0.589 \end{bmatrix}.$$

2) 假设决策者根据 1～ 9 互反标度对 $x_i(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 进行两两比较, 并给出互反判断矩阵

$$A = (a_{ij})_{5\times4} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 1/3 \\ 1/7 & 1/5 & 1/5 & 1 & 1/7 \\ 1/5 & 1 & 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

假设 $s_{ij} = t_{ij} = 1, i, j \in N$, 利用模型(M2) 求得属性的权重向量 $w = (0.3, 0, 0.10, 0.60)^T$, 且

$$\begin{aligned}
&d_{12}^{+} = 0.314, d_{12}^{-} = 0, d_{13}^{+} = 0,\\
&d_{13}^{-} = 0.019, d_{14}^{+} = 2.332, d_{14}^{-} = 0,\\
&d_{15}^{+} = 2.255, d_{15}^{-} = 0, d_{21}^{+} = 0,\\
&d_{21}^{-} = 0.105, d_{23}^{+} = 0, d_{23}^{-} = 0.034,\\
&d_{24}^{+} = 1.935, d_{24}^{-} = 0, d_{25}^{+} = 0.215,\\
&d_{25}^{-} = 0, d_{31}^{+} = 0.09, d_{31}^{-} = 0,\\
&d_{32}^{+} = 0.333, d_{32}^{-} = 0, d_{34}^{+} = 1.404,\\
&d_{34}^{-} = 0, d_{35}^{+} = 0.217, d_{35}^{-} = 0,\\
&d_{41}^{+} = 0, d_{41}^{-} = 0.333, d_{42}^{+} = 0,\\
&d_{42}^{-} = 0.026, d_{43}^{+} = 0, d_{43}^{-} = 0.089,\\
&d_{45}^{+} = 0.050, d_{45}^{-} = 0, d_{51}^{+} = 0.016,\\
&d_{51}^{-} = 0, d_{52}^{+} = 0.052, d_{52}^{-} = 0,\\
&d_{53}^{+} = 2.244, d_{53}^{-} = 0, d_{54}^{+} = 2.667,\\
&d_{54}^{-} = 0.
\end{aligned}$$

3) 由式(3) 求得各方案综合属性值为

$$\begin{aligned}
&z_1(w) = 0.98, z_2(w) = 0.432,\\
&z_3(w) = 0.964, z_4(w) = 0.474,\\
&z_5(w) = 0.648.
\end{aligned}$$

依此对方案进行排序, 可得 $x_1 \succ x_3 \succ x_5 \succ x_4 \succ x_2$, 故最优方案为 x_1.

4 结 论

本文针对只有部分权重信息, 且决策者对方案的偏好信息以互反判断矩阵和互补判断矩阵这两种形式给出的多属性决策问题, 分别建立了一个目标规划模型, 通过求解这两个模型可确定属性的权重; 进而提出一种基于目标规划模型的多属性决策方法. 实例数值结果表明了该方法的可行性和有效性.

参考文献(References):

[1] Chen S J, Hwang C L. *Fuzzy Multiple Attribute Decision Making*[M]. Berlin: Springer, 1992.

[2] Fodor J, Roubens M. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

[3] 徐泽水. 基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2001, 16(S): 818-821.
(Xu Ze-shui. Maximum deviation method based on deviation degree and possibility degree for uncertain multi-attribute decision making [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(S): 818-821.)

[4] Lee K S, Park K S, Eum Y S, et al. Extended methods for identifying dominance and potential optimality in multi-criteria analysis with imprecise information [J]. *European J of Operational Research*, 2001, 134(3): 557-563.

[5] 徐泽水. 基于方案达成度和综合度的交互式多属性决策法[J]. 控制与决策, 2002, 17(4): 435-438.
(Xu Ze-shui. Interactive method based on alternative achievement scale and alternative comprehensive scale for multi-attribute decision making problems [J]. *Control and Decision*, 2002, 17(4): 435-438.)

[6] Fan Z P, Ma J, Zhang Q. An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, 131(1): 101-106.

[7] 徐泽水. AHP 中两类标度法的关系研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 97-101.
(Xu Ze-shui. Study on the relation between two classes of scales in AHP [J]. *Systems Engineering — Theory and Practice*, 1999, 19(7): 97-101.)

(上接第 84 页)

参考文献(References):

[1] Morse A S. Supervisory control of families of linear set-point controllers [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(10): 1413-1431.

[2] Kukami S R. Model and controller selection policies based on output errors[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(11): 1594-1604.

[3] Judith H. Controller switching based on output prediction errors [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1998, 43(5): 596-607.

[4] Narendra K S, Balakrishnan J. Adaptive control using multiple models[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(2): 171-187.

[5] Fu Minyue, Barmish B R. Adaptive stabilization of linear systems via switching control[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1986, 31(12): 1097-1103.

[6] Chang M H, Davision E J. Adaptive switching control of LTI MIMO systems using a family of controllers approach[J]. *Automatica*, 1999, 35(3): 453-465.