



受多随机噪声和多随机脉冲干扰的非线性系统稳定性分析

冯立康, 张维海, 吴昭景

引用本文:

冯立康, 张维海, 吴昭景. 受多随机噪声和多随机脉冲干扰的非线性系统稳定性分析[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 569–576.

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0879>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

具有多个时滞的积分时滞系统的稳定性分析

Stability analysis of integral delays systems with multiple time-delays

控制与决策. 2023, 38(2): 562–568 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0469>

具有输入量化和全状态约束的非严格反馈随机非线性系统的有限时间动态面控制

Finite-time dynamic surface control for nonstrict-feedback stochastic nonlinear systems with input quantization and full-state constraints

控制与决策. 2022, 37(10): 2575–2584 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2021.0012>

脉冲控制下多智能体系统的保性能双向编队控制

Guaranteed cost bipartite formation problem of multi-agent systems with impulse control

控制与决策. 2021, 36(1): 180–186 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0854>

高超声速飞行器间歇故障改进自适应容错控制

Improved adaptive fault-tolerant control of intermittent faults in hypersonic flight vehicle

控制与决策. 2021, 36(11): 2627–2636 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0483>

基于反演算法的严格反馈非线性系统固定时间跟踪控制

Fixed-time tracking control for strict-feedback nonlinear systems based on backstepping algorithm

控制与决策. 2021, 36(1): 173–179 <https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2019.0658>

受多随机噪声和多随机脉冲干扰的非线性系统稳定性分析

冯立康¹, 张维海^{1†}, 吴昭景²

(1. 山东科技大学 电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590;
2. 烟台大学 数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

摘要: 针对一类受多有色噪声和多随机脉冲干扰的非线性系统(其中系统连续动态中的多随机噪声包含乘性和加性有色噪声且离散动态中多随机脉冲幅值的类型由一个齐次不可约非周期 Markov 链决定), 分别提出概率意义和矩意义下的噪声-状态稳定性、概率意义下的全局渐近稳定性、矩意义下的指数稳定性判据. 在脉冲数量受模态依赖平均脉冲区间约束下, 首先基于乘性随机噪声的估计和 Lyapunov 函数方法, 分别研究系统在矩意义下的噪声到状态稳定性和指数稳定性判据; 然后基于乘性随机噪声满足大数定律的假设和 Lyapunov 函数方法, 分别给出系统在概率意义下的噪声-状态稳定和全局渐近稳定的充分条件; 最后通过仿真结果验证所提出稳定性判别准则的有效性.

关键词: 多随机噪声; 多随机脉冲; 有色噪声; 模态依赖平均脉冲区间; 噪声到状态稳定性; 全局渐近稳定性
中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

DOI: 10.13195/j.kzyjc.2021.0879

引用格式: 冯立康, 张维海, 吴昭景. 受多随机噪声和多随机脉冲干扰的非线性系统稳定性分析[J]. 控制与决策, 2023, 38(2): 569-576.

Stability analysis of nonlinear system suffering from multiple random noises and multiple random impulses

FENG Li-kang¹, ZHANG Wei-hai^{1†}, WU Zhao-jing²

(1. College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China; 2. School of Mathematics and Informational Science, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract: For a class of nonlinear systems disturbed by multiple random noises and multiple random impulses, where the multiple random noises in continuous dynamics are composed of multiplicative and additive noises and the kind of multiple random impulsive amplitudes in discrete dynamics are driven by the Markov chain, this paper proposes the criteria of the noise-to-state stability in probability and in m -th moment, the global asymptotic stability in probability and the exponential stability in m -th moment, respectively. When the impulsive number is constrained by the mode-dependent average impulsive interval, firstly, the noise-to-state stability and exponential stability in m -th moment are investigated based on the estimation of multiplicative random noise, respectively. Then, on the basis of the assumption that the multiplicative random noise satisfies the law of large numbers, the sufficient conditions of the noise-to-state stability and global asymptotic stability in probability are given, respectively. Finally, the effectiveness of the proposed stability criteria is verified by the simulation results.

Keywords: multiple random noises; multiple random impulses; color noise; mode-dependent average impulsive interval; noise-to-state stability; global asymptotic stability

0 引言

作为一类特殊的混合系统, 脉冲系统由连续动态和离散瞬时跳变组成, 由于其可以描述跨学科领域中许多复杂的工程问题, 近年来受到广大学者的关注^[1-2]. 脉冲系统中脉冲行为的存在使其能够更准确

地解析系统, 但也增加了系统分析的难度. 由文献[3]可知, 脉冲对系统性能的影响主要由脉冲时刻和脉冲幅值造成, 现有文献大部分研究的是确定性脉冲, 即脉冲时刻和脉冲幅值都是确定的^[4-5], 但是当脉冲作为干扰作用到系统上时, 往往会带有随机特性^[6-7], 其

收稿日期: 2021-05-18; 录用日期: 2021-11-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61973198, 61633014); 山东省泰山学者研究基金项目; 山东科技大学研究基金项目(2015TDJH105).

责任编辑: 徐胜元.

[†]通讯作者. E-mail: w_hzhang@163.com.

中脉冲幅值可以决定脉冲的稳定性,因此考虑多种随机脉冲对于系统分析与综合影响具有重大意义.文献[8]研究了带有多脉冲的时滞非线性系统的输入到状态稳定判据,但没有考虑随机脉冲和随机干扰的影响.

对于连续动态包含随机干扰的脉冲非线性系统,如经济系统、生物系统、人口模型系统等,随机干扰经常被建模为白噪声.在固定驻留时间的假设下,根据Lyapunov函数方法,文献[9]给出了随机脉冲非线性系统的输入到状态稳定的判据.基于广义Lyapunov函数方法,文献[10]分析了随机脉冲切换系统的输入到状态稳定性和全局稳定性.在模态依赖平均脉冲区间的约束下,文献[11]根据向量Lyapunov函数方法研究了随机脉冲切换时滞系统的随机全局渐近稳定性问题,且在文献[12]中,借助分布式事件触发脉冲控制,研究了随机多智能体系统的领导-跟随均方一致性问题.由于白噪声的功率谱密度为常数,均方值无穷,即能量是无穷的,用其描述一些实际物理系统中的随机干扰时可能会不恰当^[13],研究人员常用能量有限的二阶矩有色噪声过程描述物理系统中的随机干扰^[14].

当随机干扰被建模为有色噪声时,在平均脉冲区间的约束下,随机脉冲系统和随机脉冲切换系统的噪声到状态稳定、全局渐近稳定、指数稳定的判别准则分别在文献[15]和文献[16]中被提出.当脉冲时刻随机时,借助一致渐近稳定函数,文献[17]在脉冲数量服从泊松分布的假设下研究了带有Markov切换的随机脉冲系统的全局渐近稳定性问题.文献[18]在脉冲数量由更新过程描述的情形下建立了随机脉冲系统的噪声到状态稳定性判据.但上述文献所研究的系统只含有单随机干扰(乘性或者加性)和单随机脉冲,对于受多有色噪声和多随机脉冲干扰的非线性系统的各种稳定性目前还较少见报道.

多随机脉冲意味着脉冲的强度可能有多种情形,甚至同时包含稳定和不稳定的情形.由于所有类型的脉冲随机出现,需要考虑所有类型随机脉冲之间的相互作用对系统稳定性的综合影响,而不是单一脉冲的作用.受文献[3,15]的启发,本文基于模态依赖平均脉冲区间,在多随机脉冲的脉冲幅值类型由Markov链驱动的假设下,分别给出矩意义下和概率意义下的噪声到状态稳定性判据、概率意义下的全局渐近稳定性判据以及矩意义下指数稳定性判据.本文主要创新点如下:

1) 在随机脉冲非线性系统的连续动态中包含乘

性和加性有色噪声,且离散动态中包含多种随机脉冲.相比已有研究成果,本文系统更复杂^[15],且更适合描述受脉冲和随机干扰的实际物理系统^[13-14].

2) 本文一系列稳定性判据是在模态依赖平均脉冲区间的假设下给出的,相比于常用的固定脉冲区间^[9-10]和平均脉冲区间^[15]约束条件,模态依赖平均脉冲区间限制的是单个模态在某个时间段内的脉冲数量,条件相对较弱,且本文给出的稳定性判别条件中没有限制系统的连续动态或离散动态的稳定性,因此应用范围更广.

1 数学准备

符号介绍: $\mathcal{C}^1$ 为所有含一阶连续偏导数函数的集合;对于函数 $\mathcal{V}(x, t)$, $\mathcal{V}(x, t) \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbf{R}^n \times [t_0, \infty))$; $\mathbf{R}^+$ 表示 $\mathcal{V} \in \mathbf{R}^+$ 关于 $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $t \in [t_0, \infty)$ 是 $\mathcal{C}^1$ 的; $\mathcal{V}_t = \partial \mathcal{V}(x, t) / \partial t$, $\mathcal{V}_x = \partial \mathcal{V}(x, t) / \partial x$. $a \vee b$ 表示 a 与 b 中取大的. $\mathcal{E}$ 表示数学期望, $\mathcal{P}$ 表示概率. $\alpha \in \mathcal{K}$ 表示 α 是连续、严格递增且在原点为0; $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$ 表示 $\alpha \in \mathcal{K}$ 且当 $t \rightarrow \infty$ 时 α 趋于无穷; $\beta \in \mathcal{KL}$ 表示对于每一个固定的 t , $\beta(s, t)$ 为一个 $\mathcal{K}$ 类函数,对于每一个固定的 s , $\beta(s, t)$ 关于 t 是递增的且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta(s, t) = 0$.

考虑如下有色噪声干扰的随机脉冲系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_c(x(t), t) + h_c(x(t), t)\xi_2(t) + D\xi_1(t), \\ t \neq \mathcal{T}_k, x(t_0) = x_0 \in \mathbf{R}^n; \\ x(t) = g_{\iota(t)}(x(t^-), t^-), t = \mathcal{T}_k, k \in \mathbf{N}^+. \end{cases} \quad (1)$$

其中脉冲时刻 $\{\mathcal{T}_k \in \mathbf{N}^+\}$ 是一个严格递增序列且满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{T}_k = \infty$; 系统状态 $x(t) : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$ 且 $x(\mathcal{T}_k^-) = \lim_{t \rightarrow \mathcal{T}_k^-} x(t)$; 对于 $\forall t = \mathcal{T}_k$ 和 $v < \infty$, $\iota(t) = j$ 只可以在有限区间 $\Psi = \{1, 2, \dots, v\}$ 内取值,它意味着第 j 类随机脉冲在时刻 $\mathcal{T}_k$ 发生; 具有恰当维数的非线性函数 f_c 、 h_c 和 g_j 关于 t 是按段连续的且关于 x 是满足局部Lipschitz条件的,此外存在一个正定的常数 K_0 使得 $|f_c(0, t)| \vee \|h_c(0, t)\| \vee |g_j(0, t)| \leq K_0$ 成立; $D \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为一个已知常数矩阵. 随机过程 $\xi_1(t) \in \mathbf{R}^m$ 和 $\xi_2(t) \in \mathbf{R}^m$ 满足如下假设.

假设1 定义在完备滤波空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$ 上的 $\mathcal{F}_t$ -适应随机过程 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 是相互独立的且具有有限的二阶矩,即存在常数 $\Theta > 0$,使得

$$\sup_{t \geq t_0} \{\mathcal{E}|\xi_1(t)|^2 \vee \mathcal{E}|\xi_2(t)|^2\} \leq \Theta^2 < \infty.$$

在假设1成立的条件下,根据文献[15]可以得到系统(1)在 $[t_0, \infty)$ 上存在全局唯一解. 为了分析多随机脉冲的综合作用对系统性能的影响,给出如下假设和(模态依赖)平均脉冲区间的定义.

假设2 在每一个脉冲时刻,随机脉冲幅值与 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 独立,且其类型由一个含有唯一平稳分布 $\varpi = (\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_v)$ 的齐次不可约非周期Markov链确定.

定义1^[3] 对于任意的 $t_1 \geq t_0$,令 $\mathcal{N}_{t_1,j}(t)$ 为在区间 $[t_1, t)$ 上第 j 类脉冲发生的次数,如果存在常数 $\mathcal{T}_{a,j} > 0$ 和 $\mathcal{N}_{0,j} > 0$,使得

$$-\mathcal{N}_{0,j} + \frac{t - t_1}{\mathcal{T}_{a,j}} \leq \mathcal{N}_{t_1,j}(t) \leq \mathcal{N}_{0,j} + \frac{t - t_1}{\mathcal{T}_{a,j}} \quad (2)$$

成立,则 $\mathcal{T}_{a,j}$ 称为模态依赖平均脉冲区间.

2 基于模态依赖平均脉冲区间的稳定性

借助模态依赖平均脉冲区间约束和Lyapunov函数方法给出系统(1)的稳定性判据.

2.1 m 阶矩意义下稳定性分析

受文献[15,17,19]启发,给出如下定义.

定义2 对于 $\forall m > 0$,如果存在常数 $b, \lambda > 0$ 和一类 $\mathcal{K}$ 函数 γ 使得对于任意 $t > t_0$ 和 $x_0 \in \mathbf{R}^n$,有

$$\mathcal{E}|x(t)|^m \leq bx_0^m e^{-\lambda(t-t_0)} + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq s \leq t} \{\mathcal{E}|\xi_1(s)|^2\}\right),$$

则称系统(1)是 m 阶矩噪声-状态稳定的(NSS- m -M).

定义3 若存在常数 $b > 0$ 和 $\lambda > 0$,使得对于任意 $t > t_0$ 和 $x_0 \in \mathbf{R}^n$,有 $\mathcal{E}|x(t)|^m \leq b|x_0|^m e^{-\lambda(t-t_0)}$ 成立,则称系统(1)是 m 阶矩指数稳定的(ES- m -M).

注1 上述两个定义是针对有色噪声干扰的随机脉冲非线性系统提出的,虽然早期文献中有类似的定义^[15,19-20],但是所针对的系统是不同的.

假设3 对于任意给定的 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $t_2 > t_1 \geq t_0$,存在函数 δ 满足 $\mathcal{E}\{e^{\varepsilon_0 \int_{t_1}^{t_2} |\xi_2(s)| ds}\} \leq e^{\delta(\varepsilon_0)(t_2-t_1)}$.

注2 由文献[13,18]可知,当 $\xi_2(t)$ 为高斯噪声时,由随机过程的估计理论可得 $\delta(\varepsilon_0) = \varepsilon_0(2\Theta + c_1\varepsilon_0)/2$,其中 $\int_{t_0}^{\infty} \|\text{Cov}(\xi(s), \xi(t))\| ds \leq c_1, \forall s, t \geq t_0$.

定理1 在假设1~假设3成立的条件下,对于任意 $\iota(\mathcal{T}_k) = j \in \Psi$,如果存在函数 $\mathcal{V}(x, t) \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbf{R}^n \times [t_0, \infty); \mathbf{R}^+)$, $\delta(\cdot) \in \mathbf{R}$, $\bar{\mu}(t) \in \mathbf{R}$, 常数 $\mu \neq 0, d \in \mathbf{R}$ 和正定常数 a_1, a_2, m, d_1, d_2 ,使得

$$a_1|x|^m \leq \mathcal{V}(x, t) \leq a_2|x|^m; \quad (3)$$

$$\mathcal{V}_t + \mathcal{V}_x f_c + \frac{1}{4d_1} |\mathcal{V}_x D|^2 \leq \bar{\mu}(t)\mathcal{V}(x, t); \quad (4)$$

$$|\mathcal{V}_x h_c| \leq d_2 \mathcal{V}(x, t); \quad (5)$$

$$\mathcal{V}(g_j(x, t)) \leq \vartheta_j \mathcal{V}(x, t); \quad (6)$$

$$\int_{t_1}^t \bar{\mu}(s) ds \leq \mu(t - t_1) + d, \quad t > t_1 \geq t_0; \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi) + d}{\mathcal{T}_{a,j}} + \mu + \delta(d_2) < 0 \quad (8)$$

成立,其中 $\psi = \sum_{j=1}^v (\varpi_j \theta_j)$, $\mathcal{E}[\vartheta_j] = \theta_j \leq \theta \in (0, +\infty)$,

则系统(1)是NSS- m -M的.

证明 对于任意 $\omega \in \Omega$,定义 $\mathcal{V}(x(t), t)$ 的右上迪尼导数 $\mathcal{D}^+[\mathcal{V}(x(t), t)]$ 为

$$\limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{V}(x(t + \Delta t), t + \Delta t) - \mathcal{V}(x(t), t)}{\Delta t}.$$

当 $t \in [t_0, \mathcal{T}_1)$ 时,由Young不等式(1)和(4)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+[\mathcal{V}(x(t), t)] &\leq \\ \mathcal{V}_t + \mathcal{V}_x f_c(x(t), t) + \frac{1}{4d_1} |\mathcal{V}_x D|^2 + \\ d_1 |\xi_1(t)|^2 + \mathcal{V}_x h_c(x(t), t) \xi_2(t) &\leq \\ (\bar{\mu}(t) + d_2 |\xi_2(t)|) \mathcal{V}(x(t), t) + d_1 |\xi_1(t)|^2. \end{aligned}$$

由式(7)和Gronwall不等式,有

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x, t) &\leq \\ \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{\mu(t-t_0) + d + \int_{t_0}^t d_2 |\xi_2(s)| ds} + \\ \int_{t_0}^t e^{\mu(t-s) + d + \int_s^t d_2 |\xi_2(\tau)| d\tau} d_1 |\xi_1(s)|^2 ds. \end{aligned} \quad (9)$$

令 $g(s) = e^{\mu(t-s) + d + \int_s^t d_2 |\xi_2(\tau)| d\tau} d_1 |\xi_1(s)|^2$, 当 $t \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ 时,由式(6)和(9)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x, t) &\leq \\ \vartheta_{\iota(\mathcal{T}_1)} e^{\mu(t-t_0) + 2d + \int_{t_0}^t d_2 |\xi_2(s)| ds} \mathcal{V}(x_0, t_0) + \\ d_1 e^d \int_{\mathcal{T}_1}^t g(s) ds + \vartheta_{\iota(\mathcal{T}_1)} d_1 e^{2d} \int_{t_0}^{\mathcal{T}_1} g(s) ds. \end{aligned} \quad (10)$$

当 $t \in [\mathcal{T}_k, \mathcal{T}_{k+1})$ 时,在区间 $[t_0, t)$ 上脉冲发生的数量为 k ,即 $\mathcal{N}_{t_0}(t) = k$. 类似于式(9)和(10),有

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x, t) &\leq \prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)}] e^{\mathcal{N}_{t_0}(t)d} e^{\mu(t-t_0) + \int_{t_0}^t d_2 |\xi_2(s)| ds} \times \\ &\quad \mathcal{V}(x_0, t_0) + d_1 e^d \left[\int_{\mathcal{T}_k}^t g(s) ds + \right. \\ &\quad \left. \vartheta_{\iota(\mathcal{T}_k)} e^d \int_{\mathcal{T}_{k-1}}^{\mathcal{T}_k} g(s) ds + \dots + \right. \\ &\quad \left. \prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)}] e^{\mathcal{N}_{t_0}(t)d} \int_{t_0}^{\mathcal{T}_1} g(s) ds \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

考虑到 $\{\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_k)}\}$ 是一个独立随机变量序列且 $\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_k)}$ 、 $\xi_1(t)$ 、 $\xi_2(t)$ 相互独立,对式(11)取期望运算,由假设1、假设3和Fubini定理可得

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\mathcal{V}(x, t)] &\leq \\ \prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} \mathcal{E}[\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)}] \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{[\mu + \delta(d_2)](t-t_0)} e^{\mathcal{N}_{t_0}(t)d} + \\ \sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2 \left(e^{\mathcal{N}_{t_0}(t)d} \prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} \mathcal{E}[\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)}] \times \right. \\ \int_{t_0}^{\mathcal{T}_1} \frac{e^{[\mu + \delta(d_2)]t}}{e^{[\mu + \delta(d_2)]s}} ds + \dots + \\ \int_{\mathcal{T}_0}^{\mathcal{T}_k} \frac{e^{[\mu + \delta(d_2)]t}}{e^{[\mu + \delta(d_2)]s}} ds + \end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{T}_k}^t \frac{e^{[\mu+\delta(d_2)]t}}{e^{[\mu+\delta(d_2)]s}} ds) d_1 e^d. \quad (12)$$

由假设2可得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}[\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_k)}] = \sum_{j=1}^v (\varpi_j \theta_j) = \psi > 0$.

借助式(8)可以找到一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi + \varepsilon) + d}{\mathcal{T}_{a,j}} + \mu + \delta(d_2) < 0 \quad (13)$$

成立, 且存在一个整数 $N > 0$ 使得对于所有的 $k \geq N$, 有 $\mathcal{E}[\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_k)}] < \psi + \varepsilon$. 当 $\mathcal{N}_{t_0}(t) > N$ 时, 有

$$\prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\mathcal{E}(\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)})] \leq \theta^N (\psi + \varepsilon)^{\mathcal{N}_{t_0}(t) - N} = \left(\frac{\theta}{\psi + \varepsilon}\right)^N (\psi + \varepsilon)^{\mathcal{N}_{t_0}(t)};$$

当 $\mathcal{N}_{t_0}(t) \leq N$ 时, 有

$$\prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\mathcal{E}(\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)})] \leq \left(\frac{\theta}{\psi + \varepsilon}\right)^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} (\psi + \varepsilon)^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} \leq \left(\frac{\theta}{\psi + \varepsilon} + 1\right)^N (\psi + \varepsilon)^{\mathcal{N}_{t_0}(t)}.$$

令 $d_3 = \left(\frac{\theta}{\psi + \varepsilon} + 1\right)^N > 1$, 对于任意 $\mathcal{N}_{t_0}(t) \in \mathbf{N}^+$, 有

$$\prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\mathcal{E}(\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)})] \leq d_3 (\psi + \varepsilon)^{\mathcal{N}_{t_0}(t)}. \quad (14)$$

由假设1和式(14), 式(12)可简化为

$$\mathcal{E}[\mathcal{V}(x, t)] \leq [(\psi + \varepsilon)e^d]^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} e^{[\mu+\delta(d_2)](t-t_0)} \mathcal{V}(x_0, t_0) \times \left(d_3 + e^d \sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2 \left(d_3^{-1} + \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} \{[(\psi + \varepsilon)e^d]^{\mathcal{N}_{t_0}(t)+1-i} \times e^{[\mu+\delta(d_2)](t-\mathcal{T}_i)}\} \right) \frac{d_3 d_1}{|\mu + \delta(d_2)|} \right). \quad (15)$$

根据模态依赖平均脉冲区间(2), 可导出

$$\sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{\mathcal{T}_i,j}(t) \geq -\sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j} + \sum_{j=1}^v \frac{t - \mathcal{T}_i}{\mathcal{T}_{a,j}},$$

$$\sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{\mathcal{T}_i,j}(t) \leq \sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j} + \sum_{j=1}^v \frac{t - \mathcal{T}_i}{\mathcal{T}_{a,j}}.$$

结合 $\mathcal{N}_{t_0}(t) = \sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{t_0,j}(t)$ 和 $\mathcal{N}_{\mathcal{T}_i}(t) = \mathcal{N}_{t_0}(t) - i$, 得

$$\mathcal{N}_{t_0}(t) - i \geq -\sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j} + \sum_{j=1}^v \frac{t - \mathcal{T}_i}{\mathcal{T}_{a,j}},$$

$$\mathcal{N}_{t_0}(t) - i \leq \sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j} + \sum_{j=1}^v \frac{t - \mathcal{T}_i}{\mathcal{T}_{a,j}}.$$

令 $\mathcal{T}_{a,j}^* = \sum_{j=1}^v \frac{1}{\mathcal{T}_{a,j}}$, 则有

$$[\mu + \delta(d_2)](t - \mathcal{T}_i) \leq$$

$$\frac{1}{\mathcal{T}_{a,j}^*} ([\mu + \delta(d_2)](\mathcal{N}_{t_0}(t) - i) + |\mu + \delta(d_2)| \sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j}).$$

此外, 有

$$[(\psi + \varepsilon)e^d]^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} \leq \sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j} |\ln(\psi + \varepsilon) + d| \times e^{\sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi + \varepsilon) + d}{\mathcal{T}_{a,j}} (t - t_0)},$$

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [(\psi + \varepsilon)e^d]^{\mathcal{N}_{t_0}(t)+1-i} e^{[\mu+\delta(d_2)](t-\mathcal{T}_i)} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [(\psi + \varepsilon)e^d]^{\mathcal{N}_{t_0}(t)+1-i} \times e^{\frac{1}{\mathcal{T}_{a,j}^*} \{[\mu+\delta(d_2)](\mathcal{N}_{t_0}(t)-i) + |\mu+\delta(d_2)| \sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j}\}} \leq \frac{e^{\frac{\mu+\delta(d_2)+|\mu+\delta(d_2)| \sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j}}{\mathcal{T}_{a,j}^*}}}{[(\psi + \varepsilon)e^d]^{-1} e^{-\frac{\mu+\delta(d_2)}{\mathcal{T}_{a,j}^*}} - 1}.$$

因此式(15)可改写为

$$\mathcal{E}[\mathcal{V}(x, t)] \leq d_3^* \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} + d_4^* \sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2.$$

其中

$$\lambda = -\sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi + \varepsilon) + d}{\mathcal{T}_{a,j}} - \mu - \delta(d_2) > 0,$$

$$d_3^* = d_3 e^{\sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j} |\ln(\psi + \varepsilon) + d|} > 0,$$

$$d_4^* = \frac{d_1 e^d (1 + d_3 d_4)}{|\mu + \delta(d_2)|} > 0,$$

$$d_4 = \frac{e^{\frac{1}{\mathcal{T}_{a,j}^*} \{[\mu+\delta(d_2)](\mathcal{N}_{t_0}(t)-i) + |\mu+\delta(d_2)| \sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j}\}}}{[(\psi + \varepsilon)e^d]^{-1} e^{-\frac{\mu+\delta(d_2)}{\mathcal{T}_{a,j}^*}} - 1}.$$

对于任意 χ , 令 $\gamma(\chi) = d_4^* \chi / a_1$, $b = a_2 d_3^* / a_1 > 0$, 有 $\mathcal{E}|x(t)|^m \leq b|x_0|^m e^{-\lambda(t-t_0)} + \gamma(\sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2)$, 进而由定义2可得系统(1)是NSS- m -M的. $\square$

当 $D = 0$ 时, 系统(1)中只含有乘性噪声 $\xi_2(t)$, 可以得到如下结论.

定理2 在假设1~假设3成立的条件下, 对于任意 $\iota(\mathcal{T}_k) = j \in \Psi$, 如果存在函数 $\mu(t) \in \mathbf{R}$, $\delta(\cdot) \in \mathbf{R}$, $\mathcal{V}(x, t) \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbf{R}^n \times [t_0, \infty); \mathbf{R}^+)$ 和正定常数 a_1 、 a_2 、 m 、 d_2 、 λ_2 、 d^* , 使得式(3)、(5)、(6)和

$$\mathcal{V}_t + \mathcal{V}_x f_c(x, t) \leq \mu(t) \mathcal{V}(x, t), \quad (16)$$

$$\int_{t_0}^t \sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi)}{\mathcal{T}_{a,j}} + \mu(s) + \delta(d_2) ds \leq -c(t - t_0) + d^* \quad (17)$$

成立, 其中 $\psi = \sum_{j=1}^v (\varpi_j \theta_j)$, $\mathcal{E}[\vartheta_j] = \theta_j \leq \theta \in (0, +\infty)$, 则系统(1)是ES- m -M的.

证明 对于任意 $t \in [t_0, \infty)$, 由定理1类似方法可得

$$\mathcal{V}(x(t), t) \leq \prod_{k=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_k)}] \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{\int_{t_0}^t [\mu(s) + \lambda_0 |\xi_2(s)|] ds}.$$

通过期望运算有

$$\mathcal{E}[\mathcal{V}(x(t), t)] \leq \prod_{k=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} \mathcal{E}[\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_k)}] \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{\int_{t_0}^t \mu(s) ds} \mathcal{E}[e^{\int_{t_0}^t \lambda_0 |\xi_2(s)| ds}]. \quad (18)$$

由式(16)可得存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\int_{t_0}^t \sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi + \varepsilon)}{\mathcal{T}_{a,j}} + \mu(s) + \delta(d_2) ds \leq -c(t - t_0) + d^*. \quad (19)$$

因此, 对于定义在式(19)中的 $\varepsilon > 0$, 由式(14)、(18)和假设3得

$$\mathcal{E}[\mathcal{V}(x(t), t)] \leq d_7 \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{-c(t-t_0)},$$

其中 $d_7 = d^* d_3^*$. 因此结合式(3)有

$$\mathcal{E}|x(t)|^m \leq \frac{a_2 d_7}{a_1} |x_0|^m e^{-c(t-t_0)}, \quad t \geq t_0,$$

即通过定义3可知系统(1)是ES- m -M的. $\square$

2.2 概率意义下稳定性分析

定义4 对于 $\forall \epsilon \in (0, 1)$, 若存在 $\mathcal{KL}$ 类函数 β 和 $\mathcal{K}$ 类函数 γ 使得对于 $\forall t > t_0$ 和 $x_0 \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\mathcal{P}\{|x(t)| \leq \beta(x_0, t - t_0) + \gamma(\sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2)\} \geq 1 - \epsilon$$

成立, 则系统(1)是概率意义下噪声-状态稳定(NSS-P)的.

定义5 对于 $\forall \epsilon \in (0, 1)$, 若存在 $\mathcal{KL}$ 函数 β 使得

$$\mathcal{P}\{|x(t)| \leq \beta(x_0, t - t_0)\} \geq 1 - \epsilon$$

成立, 则系统(1)是概率意义下全局渐近稳定(GAS-P)的.

假设4 $|\xi_2(t)|^2$ 满足如下大数定理: 对于任意给定的 $\zeta > 0$ 和 $\omega \in \Omega$, 存在一个常数 $T_\zeta > t_0$, 使得当 $t \geq T_\zeta$ 时

$$\left| \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t |\xi_2(s)|^2 ds - \mathcal{E}|\xi_2(t)|^2 \right| \leq \zeta, \quad \text{a.s.}$$

成立

定理3 在假设1、假设2和假设4满足的条件下, 对于任意 $\iota(\mathcal{T}_k) = j \in \Psi$, 如果存在函数 $\bar{\mu}(t) \in \mathbf{R}$, $\mathcal{V}(x, t) \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbf{R}^n \times [t_0, \infty); \mathbf{R}^+)$, $\kappa_1 \in \mathcal{K}_\infty$, $\kappa_2 \in \mathcal{K}_\infty$ 和常数 $\mu \neq 0$, $d \in \mathbf{R}$, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, 使得式

(4)~(7)和

$$\kappa_1(|x|) \leq \mathcal{V}(x, t) \leq \kappa_2(|x|), \quad (20)$$

$$\sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi) + d}{\mathcal{T}_{a,j}} + \mu + 2d_2\Theta < 0 \quad (21)$$

成立, 其中 $\psi = \sum_{j=1}^v (\varpi_j \theta_j)$, $\mathcal{E}[\vartheta_j] = \theta_j \leq \theta \in (0, +\infty)$, 则系统(1)是NSS-P的.

证明 由假设1、假设4和Hölder不等式可知, 对于任意 $\omega \in \Omega$ 和 $\zeta \in (0, 3\Theta^2)$, 存在一个常数 $T_\zeta > s \geq t_0$ 使得当 $t \geq T_\zeta$ 时, 有

$$\int_s^t |\xi_2(\tau)| d\tau \leq (t - s) \sqrt{E|\xi_2(\tau)|^2 + \zeta} \leq 2\Theta(t - s).$$

则根据定理1的式(11)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x, t) &\leq \prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)}] e^{\mathcal{N}_{t_0}(t)d} \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{(\mu + 2d_2\Theta)(t-t_0)} + \\ &d_1 e^{(\mu + 2d_2\Theta)t+d} \left[\int_{\mathcal{T}_k}^t \frac{|\xi_1(s)|^2}{e^{(\mu + 2d_2\Theta)s}} ds + \right. \\ &\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_k)} e^d \int_{\mathcal{T}_{k-1}}^{\mathcal{T}_k} \frac{|\xi_1(s)|^2}{e^{(\mu + 2d_2\Theta)s}} ds + \dots + \\ &\left. \prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)}] e^{\mathcal{N}_{t_0}(t)d} \int_{t_0}^{\mathcal{T}_1} \frac{|\xi_1(s)|^2}{e^{(\mu + 2d_2\Theta)s}} ds \right]. \end{aligned}$$

由式(21)可知, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi + \varepsilon) + d}{\mathcal{T}_{a,j}} + \mu + 2d_2\Theta < 0, \quad (22)$$

进而通过与定理1中相同的处理方式可得

$$\mathcal{E}[\mathcal{V}(x, t)] \leq d_3^* \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} + d_5^* \sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2.$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda &= - \sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi + \varepsilon) + d}{\mathcal{T}_{a,j}} - \mu - 2d_2\Theta > 0, \\ d_5^* &= \frac{d_1 e^d (1 + d_3 d_5)}{|\mu + 2d_2\Theta|} > 0, \\ d_5 &= \frac{e^{\frac{1}{\mathcal{T}_{a,j}^*} \{ \mu + 2d_2\Theta + |\mu + 2d_2\Theta| \sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j} \}}}{[(\psi + \varepsilon)e^d]^{-1} e^{-\frac{\mu + 2d_2\Theta}{\mathcal{T}_{a,j}^*}} - 1}. \end{aligned}$$

当 $t \in [t_0, T_\zeta]$ 时, 由假设1可知存在一个常数 $K > 0$ 使得 $\sup_{t_0 \leq s \leq T_\zeta} |\xi_2(s)| \leq K$, a.s., 因此有

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(x, t) &\leq \prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)}] e^{\mathcal{N}_{t_0}(t)d} \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{(\mu + d_2 K)(t-t_0)} + \end{aligned}$$

$$d_1 e^{(\mu+d_2 K)t+d} \left[\int_{\mathcal{T}_k}^t \frac{|\xi_1(s)|^2}{e^{(\mu+d_2 K)s}} ds + \vartheta_{\iota(\mathcal{T}_k)} e^d \int_{\mathcal{T}_{k-1}}^{\mathcal{T}_k} \frac{|\xi_1(s)|^2}{e^{(\mu+d_2 K)s}} ds + \dots + \prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)}] e^{\mathcal{N}_{t_0}(t)d} \int_{t_0}^{\mathcal{T}_1} \frac{|\xi_1(s)|^2}{e^{(\mu+d_2 K)s}} ds \right].$$

由定理1可得

$$\mathcal{E}[\mathcal{V}(x, t)] \leq d_6 \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} + d_5^* \sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2,$$

其中 $d_6 = d_3^* e^{d_2(K+2\Theta)(T_\zeta-t_0)} \geq d_3^* > 0$. 因此对于任意 $t \in [t_0, \infty)$, 有

$$\mathcal{E}[\mathcal{V}(x, t)] \leq \beta_1(|x_0|, t-t_0) + d_5^* \sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2,$$

其中 $\beta_1(|x_0|, t-t_0) = d_6 \kappa_2(|x_0|) e^{-\lambda(t-t_0)}$. 对于任意 $\epsilon \in (0, 1)$, 由式(20)和Chebyshev不等式可知, 令

$$\beta(|x_0|, t-t_0) = 2\kappa_1^{-1} \circ \beta_1(|x_0|, t-t_0)/\epsilon, \\ \gamma(\sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2) = 2d_5^* \kappa_1^{-1}(\sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2)/\epsilon,$$

则有

$$\mathcal{P}\{|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t-t_0) + \gamma(\sup_{t_0 \leq s \leq t} \mathcal{E}|\xi_1(s)|^2)\} \geq 1 - \epsilon,$$

由定义4可得证. $\square$

当 $D = 0$ 时, 可以得到如下结论.

定理4 在假设1、假设2和假设4成立的条件下, 对于任意 $\iota(\mathcal{T}_k) = j \in \Psi$, 如果存在函数 $\mu(t) \in \mathbf{R}$, $\mathcal{V}(x, t) \in \mathcal{C}^{1,1}(\mathbf{R}^n \times [t_0, \infty); \mathbf{R}^+)$, $\kappa_1 \in \mathcal{K}_\infty$, $\kappa_2 \in \mathcal{K}_\infty$ 和正定常数 d_2 , 使得式(5)、(6)、(16)、(20)和

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi)}{\mathcal{T}_{a,j}} + \mu(s) + 2d_2 \Theta ds \right\} = -\infty \quad (23)$$

成立, 其中 $\psi = \sum_{j=1}^v (\omega_j \theta_j)$, $\mathcal{E}[\vartheta_j] = \theta_j \leq \theta \in (0, +\infty)$, 则系统(1)是GAS-P的.

证明 对于任意 $t \in [t_0, \infty)$, 由定理2可得

$$\mathcal{V}(x(t), t) \leq \prod_{k=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} [\vartheta_{\iota(\mathcal{T}_k)}] \mathcal{V}(x_0, t_0) e^{\int_{t_0}^t \mu(s) + \lambda_0 |\xi_2(s)| ds}. \quad (24)$$

由式(23)可得存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi + \varepsilon)}{\mathcal{T}_{a,j}} + \mu(s) + 2d_2 \Theta ds \right\} = -\infty. \quad (25)$$

且由式(14)和Chebyshev不等式, 对于 $\forall \epsilon \in (0, 1)$, 有

$$\mathcal{P}\left\{ \prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} \vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)} \leq d_8 e^{\sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi+\varepsilon)}{\mathcal{T}_{a,j}}(t-t_0)} \right\} \geq \sqrt{1-\epsilon},$$

$$d_8 = \frac{1}{1 - \sqrt{1-\epsilon}} e^{\sum_{j=1}^v \mathcal{N}_{0,j} |\ln(\psi+\varepsilon)|} > 0. \quad (26)$$

由于 $\xi_2(t)$ 和 $\vartheta_{\iota(t)}$ 相互独立, 对于任意 $\zeta \in (0, 3\Theta^2)$, 定义如下两个相互独立的集合:

$$\Omega_1 = \left\{ \left| \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t |\xi_2(s)|^2 ds - \mathcal{E}|\xi_2(t)|^2 \right| \leq \zeta \right\}, \\ \Omega_2 = \left\{ \prod_{i=1}^{\mathcal{N}_{t_0}(t)} \vartheta_{\iota(\mathcal{T}_i)} \leq d_8 e^{\sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi+\varepsilon)}{\mathcal{T}_{a,j}}(t-t_0)} \right\}.$$

由假设4和式(26)可知, 存在常数 $T_\zeta > t_0$ 使得对于任意 $t > T_\zeta$, 有

$$\mathcal{P}\{\Omega_1 \cap \Omega_2\} = \mathcal{P}\{\Omega_1\} \mathcal{P}\{\Omega_2\} \geq 1 - \epsilon. \quad (27)$$

由假设1和Hölder不等式可得, 对于 $\forall \omega \in \Omega_1$ 和 $\forall t > T_\zeta$, 有

$$\int_{t_0}^t |\xi_2(s)| ds \leq 2\Theta(t-t_0).$$

因此借助式(25)和(27), 对于 $\forall t > T_\zeta$, 式(24)可简化为

$$\mathcal{P}\{\mathcal{V}(x(t), t) \leq d_8 \beta_2(|x_0|, t-t_0)\} \geq 1 - \epsilon, \quad (28)$$

其中 $\beta_2(\cdot, \cdot) = \kappa_2(|x_0|) e^{\int_{t_0}^t \sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi+\varepsilon)}{\mathcal{T}_{a,j}} + \mu(s) + 2d_2 \Theta ds}$. 当 $t_0 \leq t \leq T_\zeta$ 时, 存在常数 $\delta_1 = \frac{\Theta}{\sqrt{1-\sqrt{1-\epsilon}}} > 0$ 使得

$$\mathcal{P}\{|\xi(t)| \geq \delta_1\} \leq \mathcal{E}|\xi(t)|^2 / \delta_1^2 = 1 - \sqrt{1-\epsilon}.$$

结合式(24)和(27), 有

$$\mathcal{P}\{\mathcal{V}(x(t), t) \leq d_8^* \kappa_2(|x_0|)\} \geq 1 - \epsilon, \quad (29)$$

其中 $d_8^* = d_8 e^{\int_{t_0}^{T_\zeta} \sum_{j=1}^v \frac{\ln(\psi+\varepsilon)}{\mathcal{T}_{a,j}} + \mu(s) + \lambda_0 \delta_1 ds} > d_8$. 因此对于 $\forall \epsilon \in (0, 1)$ 和 $\forall t \in [t_0, \infty)$, 由式(20)、(28)和(29)可知, 存在一个 $\mathcal{KL}$ 函数 β 使得

$$\mathcal{P}\{|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t-t_0)\} \geq 1 - \epsilon$$

成立, 其中 $\beta(|x_0|, t-t_0) = d_8^* \kappa_1^{-1} \circ \beta_2(|x_0|, t-t_0)$, 由定义5可得证. $\square$

注3 通过定理1~定理4发现, 当系统中存在加性噪声时, 系统只能实现噪声到状态稳定. 当系统中只包含乘性噪声时, 全局渐近稳定和指数稳定的条件要比噪声到状态稳定时强.

3 仿真示例及分析

本节通过数值仿真验证理论结果.

例1 考虑 $n = 2$ 时的系统(1), 随机干扰 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 由如下系统生成:

$$\dot{\xi}_1(t) = -\xi_1(t) + w(t), \\ \xi_1(0) = 0, \quad \xi_2(t) = \cos(t + \eta).$$

其中: $w(t)$ 为功率谱密度函数为1的零均值白噪声, η 为 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布. 可以计算 $\xi_1(t)$ 和 $\xi_2(t)$ 的均

方值满足 $\mathcal{E}|\xi_1(t)|^2 = 0.5, \mathcal{E}|\xi_2(t)|^2 \leq 1$. 由文献[19]可知, $\xi_1(t)$ 是宽平稳过程, $\xi_2(t)$ 既是宽平稳过程也是严平稳过程, 且由文献[18]可知 $\xi_1(t)$ 满足假设4, $\xi_2(t)$ 满足假设3. 令

$$D = I_2/2,$$

$$f_c(x, t) = (0.125x_2 - 0.0625t \sin t^2 x_1, 0.125x_1 - 0.0625t \sin t^2 x_2)^T,$$

$$h_c(x, t) = (0.25x_1 \sin t, 0; 0, 0.25x_2 \cos t),$$

$$g_{\iota(t)}(x(t^-), t^-) = \rho_{\iota(t)} x(t^-),$$

其中 $\iota(\mathcal{T}_k) = j \in \{1, 2\}$. 在 $\mathcal{T}_k$ 时刻, ρ_1 和 ρ_2 的出现由一个具有平稳分布 $\varpi = (\varpi_1, \varpi_2) = (4/5, 1/5)$ 的齐次不可约马氏链决定. ρ_1 为 $[0.4, 0.8]$ 上的均匀分布, $\mathcal{P}(\rho_2 = 1.6) = \mathcal{P}(\rho_2 = 1.2) = 0.5$, 有

$$\mathcal{E}(\rho_1^2) = 0.37, \mathcal{E}(\rho_2^2) = 2,$$

$$\psi = 0.37 \times 0.8 + 2 \times 0.2 = 0.7.$$

因此在该平稳分布作用下, 脉冲的混合作用效果可以稳定系统. 选取 $\mathcal{V}(x, t) = x^T x/2, d_1 = 1, x(0) = (-20, 30)^T$, 系统的状态响应和每个脉冲时刻对应的脉冲强度如图1和图2所示.

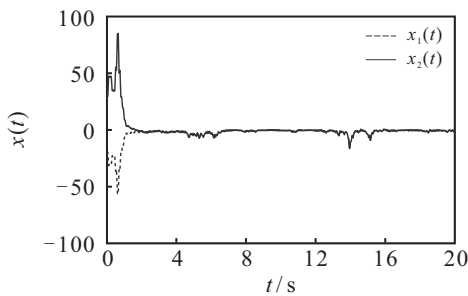


图1 系统的状态响应 $x(t)$

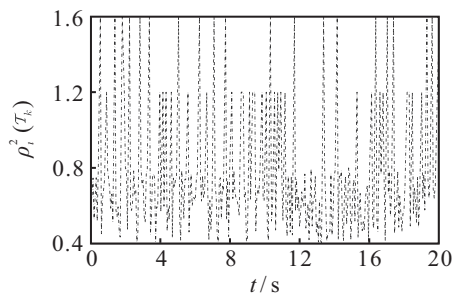


图2 脉冲强度

当 $D = 0$ 时, 系统的连续动态中仅包含乘性噪声 $\xi_2(t)$, 在其他参数不变的情形下, 由定理2和定理4可以验证系统是全局渐近稳定的或者指数稳定的. 系统状态响应如图3所示.

当 $D \neq 0$ 时, 系统中包含乘性和加性有色噪声(如图1所示), 且包含多种随机脉冲(如图2所示). 由图1可见, 系统的两个状态分量 x_1 和 x_2 均收敛到原点附近, 验证了定理1和定理3的可行性. 当 $D = 0$ 时, 系统中不受加性有色噪声干扰, 由图4可见, 系统

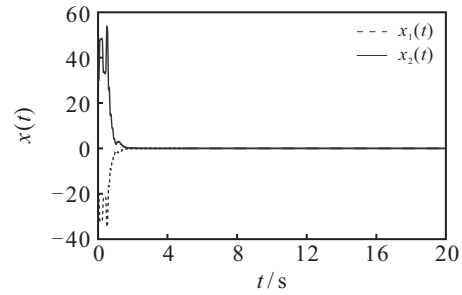


图3 $D = 0$ 时系统的状态响应 $x(t)$

状态在一段时间后均到达0, 而不是如图2所示在0附近来回振荡, 这是全局渐近稳定或指数稳定与噪声到状态稳定的不同之处.

4 结论

基于模态依赖平均脉冲区间和Lyapunov函数方法, 本文研究了一类带有多随机噪声和多随机脉冲的非线性系统的状态稳定性、全局渐近稳定性和指数稳定性问题, 最后通过仿真结果验证了所提出稳定性判别准则的有效性.

参考文献(References)

- [1] Yang T. Impulsive control theory[M]. Berlin: Springer, 2001: 1-7.
- [2] 郑刚, 谭民, 宋永华. 混杂系统的研究进展[J]. 控制与决策, 2004, 19(1): 7-11.
(Zheng G, Tan M, Song Y H. Research on hybrid systems: A survey[J]. Control and Decision, 2004, 19(1): 7-11.)
- [3] Tang Y, Wu X T, Shi P, et al. Input-to-state stability for nonlinear systems with stochastic impulses[J]. Automatica, 2020, 113: 108766.
- [4] 张国良, 杜柏阳, 孙一杰, 等. 基于预测控制的时滞多机器人编队脉冲控制[J]. 控制与决策, 2016, 31(8): 1453-1460.
(Zhang G L, Du B Y, Sun Y J, et al. Impulsive control for multi-robot formation with communication delay based on predictive control[J]. Control and Decision, 2016, 31(8): 1453-1460.)
- [5] 李丽花, 高岩. 一类脉冲切换系统的最优控制[J]. 控制与决策, 2014, 29(1): 94-98.
(Li L H, Gao Y. Optimal control for a class of impulsive and switching systems[J]. Control and Decision, 2014, 29(1): 94-98.)
- [6] He W L, Gao X Y, Zhong W M, et al. Secure impulsive synchronization control of multi-agent systems under deception attacks[J]. Information Sciences, 2018, 459: 354-368.
- [7] Tang Y, Xing X, Karimi H R, et al. Tracking control of networked multi-agent systems under new characterizations of impulses and its applications in robotic systems[J]. IEEE Transactions on Industrial

- Electronics, 2016, 63(2): 1299-1307.
- [8] Li P, Li X D, Lu J Q. Input-to-state stability of impulsive delay systems with multiple impulses[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 66(1): 362-368.
- [9] Ren W, Xiong J L. Stability analysis of impulsive stochastic nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(9): 4791-4797.
- [10] Ren W, Xiong J L. Lyapunov conditions for stability of stochastic impulsive switched systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2018, 65(6): 1994-2004.
- [11] Ren W, Xiong J. Exponential stability of stochastic impulsive switched delayed systems based on vector Lyapunov functions[C]. Asian Control Conference. Gold Coast, 2017: 1888-1893.
- [12] Zhang Z H, Peng S G, Liu D R, et al. Leader-following mean-square consensus of stochastic multiagent systems with ROUs and RONS via distributed event-triggered impulsive control[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022, 52(3): 1836-1849.
- [13] Khas'minskii R Z. Stochastic stability of differential equations[M]. Rockville: S & N International Publisher, 1980: 10-22.
- [14] Wu Z J, Karimi H R, Shi P. Practical trajectory tracking of random Lagrange systems[J]. Automatica, 2019, 105: 314-322.
- [15] Jiao T C, Zheng W X, Xu S Y. Stability analysis for a class of random nonlinear impulsive systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(7): 1171-1193.
- [16] Jiao T C, Zheng W X, Xu S Y. Unified stability criteria of random nonlinear time-varying impulsive switched systems[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2020, 67(9): 3099-3112.
- [17] Feng L K, Park J H, Zhang W H. Improved noise-to-state stability criteria of random nonlinear systems with stochastic impulses[J]. IET Control Theory & Applications, 2021, 15(1): 96-109.
- [18] Feng L K, Zhang W H, Yang Z C, et al. Further stability results for random nonlinear systems with stochastic impulses[J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(10): 5426-5450.
- [19] Wu Z J. Stability criteria of random nonlinear systems and their applications[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(4): 1038-1049.
- [20] Liao X X, Mao X R. Stability of stochastic neural networks[J]. Neural Parallel & Scientific Computations, 1996, 4(2): 205-224.

作者简介

冯立康(1989—), 男, 博士生, 从事随机脉冲非线性系统的研究, E-mail: fenglikang525@163.com;

张维海(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事随机系统的鲁棒控制、随机系统的算子谱分析等研究, E-mail: w_hzhang@163.com;

吴昭景(1970—), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、自适应控制、随机稳定性分析等研究, E-mail: wuzhaojing00@188.com.

(责任编辑: 郑晓蕾)

下 期 要 目

- 基于车路云一体化的混合交通系统优化控制综述.....左志强, 等
- 基于深度学习的三维点云分割综述.....卢 健, 等
- 一种多约束下无人机编队的模型预测控制算法.....戴邵武, 等
- 基于进化蚁群算法的移动机器人路径优化.....李 涛, 等
- 鱼群涌现机制下集群机器人运动强化的迁移控制.....刘 磊, 等
- 可用于机械臂控制的小脑脉冲神经网络研究与FPGA实现.....郝新宇, 等
- YOLOv5预测边界框分簇自适应损失权重改进模型.....聂 鹏, 等
- 不确定受扰电液伺服系统智能自学习PID控制.....姚文龙, 等
- 基于改进的胶囊网络的行星齿轮箱故障诊断方法.....黎德才, 等
- 非连续混合自时延多智能体系统的饱和和分布式控制.....汤 泽, 等