

文章编号: 1001-0920(2004)05-0529-05

带正弦干扰的线性时滞系统的次优控制

唐功友¹, 赵艳东¹, 陈显利²

(1 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266071; 2 青岛科技大学 信息与控制工程学院, 山东 青岛 266042)

摘 要: 研究状态变量含有时滞的线性系统在正弦干扰下的前馈反馈次优减振控制问题。首先构造其解收敛于原时滞系统的无时滞系统序列; 然后将时滞系统的最优控制问题化为无时滞系统的最优控制序列问题; 最后通过截取最优控制序列解的有限项, 得到系统的前馈反馈次优控制律。仿真结果表明, 该方法抑制正弦干扰的鲁棒性优于经典反馈最优控制。

关键词: 时滞系统; 正弦干扰; 最优控制; 次优控制; 前馈反馈控制

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Suboptimal control for time-delay linear systems under sinusoidal disturbances

TANG Gong-you¹, ZHAO Yan-dong¹, CHEN Xian-li²

(1. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266071, China; 2 College of Information and Control Engineering, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266042, China)

Correspondent: TANG Gong-you, E-mail: gtang@ouc.edu.cn

Abstract: Feedforward and feedback suboptimal control for linear systems with state time-delay affected by additive sinusoidal disturbances is considered. A sequence of non-delay systems is constructed, which uniformly converges to the original system with time-delay. Then the optimal control for the original system is transformed into an optimal control sequence for non-delay systems. By using a finite term of the optimal sequence, a feedforward and feedback suboptimal control law is obtained. The algorithm of solving the suboptimal control law is given. Simulations show that the result is more robust with respect to additive sinusoidal disturbances than that of the classical feedback optimal control.

Key words: time-delay systems; sinusoidal disturbances; optimal control; suboptimal control; feedforward and feedback control

1 引言

时滞系统的分析与综合问题从数学上看是一个无穷维问题, 也是控制理论与控制工程领域的难点和热点研究课题之一。对于大时滞系统或对系统性能要求较高的场合, 利用常规方法对系统进行分析与控制往往得不到满意的结果。时滞系统的最优控

制问题, 会导致求解一组既含有超前项又含有时滞项的两点边值问题^[1~3], 对这类问题无论求其精确解还是数值解都非常困难。采用次优控制以避免求解最优控制律的困难不失为一个控制策略^[1~3]。另外, 一般的系统都是在外界持续干扰力作用下工作的^[4~6], 在控制系统中加入前馈控制可补偿干扰对

收稿日期: 2003-05-05; 修回日期: 2003-06-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60074001); 山东省自然科学基金资助项目(Y2000G02)。

作者简介: 唐功友(1953—), 男, 山东烟台人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究; 赵艳东(1976—), 女, 山西文水人, 博士生, 从事控制理论与应用、计算机控制等研究。

系统输出的影响^[7-9]。然而,利用前馈控制完全补偿干扰对系统输出影响往往不是最优控制策略^[10,11]。

在实际中经常遇到带正弦干扰力的系统,例如对于飞机飞行振动控制系统,机翼承受的风剪应力的谐振分量是正弦干扰力^[12,13];对于海洋平台的实时振动控制系统,海洋结构物持续承受风力或海浪的谐振分量也是正弦干扰力^[14,15],还有其他类似情况^[16]。对于在外界正弦干扰力作用下系统的最优控制问题,用初值问题得到的反馈最优控制来抑制外界正弦干扰力对系统的影响不是最优的,且对正弦干扰力的鲁棒性较差^[10,11]。所以研究在外界持续干扰力作用下系统的最优控制问题具有重要的实际意义^[10~12]。

本文研究状态变量含时滞的线性系统在外部正弦干扰下的最优减振控制问题,提出一种前馈反馈次优控制器设计的无滞后转换法。首先构造一族无时滞控制系统序列,并证明这个序列的解一致收敛于原时滞系统的解;然后将原时滞系统的前馈反馈最优控制问题简化为求解一族无时滞初值问题的反馈最优控制律序列问题;最后通过截取最优控制律序列的有限项得到原系统的前馈反馈次优控制律。仿真结果表明,与经典反馈最优控制相比,本文方法对抑制正弦干扰具有更好的鲁棒性。

2 问题描述

考虑如下带正弦干扰的时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A x(t) + A_1 x(t - \tau) + B u(t) + D v(t), t > 0; \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in R^n$ 为状态向量; $u \in R^r$ 为控制向量; $v \in R^m$ 为外部正弦干扰向量; A, A_1, B, D 为适当维数的常量矩阵; $\varphi(t)$ 为已知的连续初始函数向量, $\tau > 0$ 为时滞项。假设 v 可以表示为

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) \\ \alpha_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2) \\ \vdots \\ \alpha_m \sin(\omega_m t + \psi_m) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中频率 $\omega(i = 1, 2, \dots, m)$ 已知,且有如下关系:

$$-\pi < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_m \leq \pi, \quad (3)$$

幅值 α 和相位 $\psi_i(i = 1, 2, \dots, m)$ 可以为未知,但 $v_i(i = 1, 2, \dots, m)$ 是可测量的。因为系统存在持续的正弦干扰,所以其状态向量 x 和控制向量 u 至少有一个不趋于零。因此对系统的最优控制问题,如果选择无限时域二次型性能指标,其性能指标函数是不收敛的。于是,本文选取如下二次型平均性能指标:

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4)$$

问题是寻找次优控制 $u^*(t), t \geq 0$, 使 J 取得极小值。

3 预备引理

考虑如下时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + A_1 x(t - \tau) + f(t, x, v, \dot{v}), 0 < t \leq t_f; \\ x(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (5)$$

其中: $\bar{A}(t) \in R^{n \times n}$ 为 t 连续函数矩阵; f 为 t, x, v 及 $\dot{v}$ 的函数向量。定义向量函数序列 $\{x_k(t)\}$ 为

$$\begin{cases} x_0(t) = \Phi(t, 0)\varphi(0), 0 < t \leq t_f; \\ x_k(t) = \Phi(t, 0)\varphi(0) + \int_0^t \Phi(t, r) [A_1 x_{k-1}(r - \tau) + f(r, x_{k-1}(r), v(r), \dot{v}(r))] dr, \\ 0 < t \leq t_f, k = 1, 2, \dots; \\ x_k(t) = \varphi(t), -\tau \leq t \leq 0, k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (6)$$

其中 Φ 是系统(5)对应于矩阵 $\bar{A}(t)$ 的状态转移矩阵。

引理1 函数向量序列(6)一致收敛于系统(5)的解。

证明 将 $\{x_k(t)\}$ 视为 $C^N[-\tau, t_f]$ 的一个序列,由式(6)得

$$x_1(t) - x_0(t) = \int_0^t \Phi(t, r) [A_1 x_0(r - \tau) + f(r, x_0(r), v(r), \dot{v}(r))] dr. \quad (7)$$

令

$$\sup_{0 \leq r \leq t_f} \|\Phi(t, r)\| = M, \quad \sup_{-\tau \leq t \leq 0} \|\varphi(t)\| = L,$$

$$\|A_1\| = N,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq t_f} \|f(t, x_0(t), v(t), \dot{v}(t))\| = H,$$

$$\begin{aligned} & \|f(t, x_k(t), v(t), \dot{v}(t)) - f(t, x_{k-1}(t), v(t), \dot{v}(t))\| = \\ & F \|x_k(t) - x_{k-1}(t)\|, k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

注意到 $\|\Phi(0, 0)\| = \|I\| = 1$, 即 $M \geq 1$ 。从而有

$$\|x_1(t) - x_0(t)\| \leq \int_0^t (M^2 L N + M H) dr \leq M^2 (L N + H) t \quad (9)$$

同理

$$\begin{aligned} & \|x_2(t) - x_1(t)\| \leq \\ & M(N + F) \int_0^t \|x_1(r) - x_0(r)\| dr \leq \\ & M(N + F) M^2 (L N + H) \int_0^t dr = \end{aligned}$$

$$M^3(N+F)(LN+H)\frac{t^2}{2}, \quad (10)$$

依次类推,得

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq M^{k+2}(N+F)^k(LN+H)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}. \quad (11)$$

由三角不等式知,对任意的 j 有

$$\begin{aligned} & \|x_{k+j}(t) - x_k(t)\| \leq \\ & \|x_{k+j}(t) - x_{k+j-1}(t)\| + \cdots + \\ & \|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leq \\ & (LN+H) \sum_{i=k}^{k+j-1} \frac{M^{i+2}(N+F)^i t^{i+1}}{(i+1)!} \leq \\ & \frac{(LN+H)M^{k+2}(N+F)^k t^{k+1}}{(k+1)!} e^{M(N+F)t}, \end{aligned} \quad (12)$$

即对任意的 j 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{k+j} - x_k\| = 0 \quad (13)$$

所以 $\{x_k(t)\}$ 是 $C^N[-\tau, t_f]$ 的 Cauchy 序列, 即该序列是一致收敛的, 且其极限是系统(5)的解 $\square$

4 主要结果

系统(1)关于性能指标(4)的最优控制问题的充分必要条件将导致求解下列两点边值问题:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau) - S\lambda(t) + Dv(t), \\ -\dot{\lambda}(t) = Qx(t) + A^T\lambda(t) + A_1^T\lambda(t+\tau), \\ u(t) = -R^{-1}B^T\lambda(t), t > 0; \end{cases} \quad (14a)$$

边界条件为

$$\begin{cases} x(t) = \varphi(t), -\tau \leq t \leq 0; \\ \lambda(\infty) = 0 \end{cases} \quad (14b)$$

其中 $S = BR^{-1}B^T$. 问题(14)为既含有时滞项又含有超前项的非齐次两点边值问题, 这类问题无论是求精确解还是求数值解都是非常困难的

通过构造两点边值问题序列, 将式(14)转化为如下两点边值问题族:

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = Ax_k(t) + A_1x_{k-1}(t-\tau) - S\lambda_k(t) + Dv(t), \\ -\dot{\lambda}_k(t) = Qx_k(t) + A^T\lambda_k(t) + A_1^T\lambda_{k-1}(t+\tau), \\ u_k(t) = -R^{-1}B^T\lambda_k(t), \\ t > 0, k = 1, 2, \cdots; \end{cases} \quad (15a)$$

边界条件为

$$\begin{cases} x_k(t) = \varphi(t), -\tau \leq t \leq 0, k = 1, 2, \cdots; \\ \lambda_k(\infty) = 0 \end{cases} \quad (15b)$$

且设 $x_0(t) \equiv 0, \lambda_0(t) \equiv 0$ 则有如下定理:

定理1 满足两点边值问题族(15)的最优控制序列 $\{u_k(t)\}$ 一致收敛于最优化问题(1)和(4)的最优控制律 $u^*(t)$.

证明 令

$$\lambda_k(t) = P_1x_k(t) + P_2v(t) + P_3v_w(t) + g_k(t), \quad t > 0, k = 1, 2, \cdots, \quad (16)$$

其中

$$v_w(t) = -\Omega \left[v_1 \left(t - \frac{\pi}{2\omega} \right), v_2 \left(t - \frac{\pi}{2\omega_b} \right), \cdots, v_m \left(t - \frac{\pi}{2\omega_h} \right) \right]^T, \quad (17)$$

$$\Omega = \text{Diag}(\omega, \omega_b, \cdots, \omega_h). \quad (18)$$

将式(16)两边求导, 再将式(15)的各式代入等式的两端, 比较系数可得 P_1, P_2 和 P_3 的矩阵方程和共态向量的微分方程如下:

$$\begin{cases} P_1A + A^TP_1 - P_1SP_1 + Q = 0, \\ A^TP_2 + P_1D - P_3\Omega^2 - P_1SP_2 = 0, \\ A^TP_3 + P_2 - P_1SP_3 = 0; \\ \dot{g}_k(t) = (P_1S - A^T)g_k(t) - P_1A_1x_{k-1}(t-\tau) - A_1^T\lambda_{k-1}(t+\tau), \\ g_k(\infty) = 0, k = 1, 2, \cdots; \end{cases} \quad (19)$$

可知, 式(19)的第1式是关于 P_1 的 Riccati 矩阵方程, 有唯一的正定解. 将 P_1 代入式(19)的第2式和第3式即得矩阵 P_2 和 P_3 .

对于式(16), 由于 $x_0(t) \equiv 0, \lambda_0(t) \equiv 0$, 可得 $g_1(t) = 0$ 将式(16)代入(20)化为

$$\begin{cases} \dot{g}_k(t) = (P_1S - A^T)g_k(t) - P_1A_1x_{k-1}(t-\tau) - A_1^TP_1x_{k-1}(t+\tau) - A_1^TP_2v(t+\tau) - A_1^TP_3v_w(t+\tau), \\ g_k(\infty) = 0, k = 1, 2, \cdots; \end{cases} \quad (20)$$

将式(16)代入(15a)第1式, 可得第 k 次逼近的最优闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_k(t) = (A - SP_1)x_k(t) + (D - SP_2)v(t) - SP_3v_w(t) - Sg_k(t) + A_1x_{k-1}(t-\tau), \\ x_k(t) = \varphi(t), -\tau \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

将式(16)代入(15a)第3式可得第 k 次逼近的最优控制为

$$u_k^*(t) = -R^{-1}B^T(P_1x_k(t) + P_2v(t) + P_3v_w(t) + g_k(t)). \quad (22)$$

由引理1可知, 式(21)和(22)的解序列 $\{g_k(t)\}$, $\{x_k(t)\}$ 是一致收敛的, 而式(23)的解序列 $\{u_k(t)\}$ 与 $\{g_k(t)\}$, $\{x_k(t)\}$ 相关, 所以也是收敛的. 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 状态向量序列 $\{x_k(t)\}$ 的极限 $x^*(t)$ 即为最优状态轨线, 控制向量序列 $\{u_k(t)\}$ 的极限 $u^*(t)$ 即为最优控制律. $\square$

由定理1的证明过程容易得到下面的定理:

定理2 系统(1)满足性能指标(4)的最优控制律为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T(P_1x(t) + P_2v(t) + P_3v_w(t) + g_\infty(t)). \quad (24)$$

其中: P_1, P_2, P_3 由矩阵方程组(19)确定; v_w 由式(17)定义; $g_\infty(t)$ 是共态方程序列(21)的解的极限.

在实际系统前馈反馈最优控制律的设计中, $g_\infty(t)$ 几乎是不可能精确求出的. 通常, 可通过求解共态方程序列(21)的前 N 个解来近似其精确解, 从而得到系统(1)的第 N 阶前馈反馈次优控制律:

$$u_N(t) = -R^{-1}B^T(P_1x(t) + P_2v(t) + P_3v_w(t) + g_N(t)). \quad (25)$$

注意到在式(25)中第1项的 x 是状态向量的精确解, 所以在式(25)中的次优控制律 u_N 比由式(23)定义的第 N 阶最优控制逼近结果要好得多.

对于具体系统, N 的选取可以根据一定的误差标准确定. 下面给出一种求解的算法. 给定常量 $\sigma > 0$, 对于每个得到的 g_k , 计算一次性能指标 J_k . 当

$$|(J_{N-1} - J_N)/J_{N-1}| < \sigma \quad (26)$$

时, 将第 N 次的 g_N 带入式(25)即可得到系统的前馈反馈次优控制律.

5 仿真示例

考虑带正弦干扰的一阶线性时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + x(t-1) + u(t) + v(t), t > 0; \\ x(t) = 0.5 \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right), t \in [-1, 0], \end{cases} \quad (27)$$

其中 $v(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$. 取二次型平均性能指标为

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int [16x^2(t) + u^2(t)] dt, \quad (28)$$

若采用传统的反馈最优控制, 得到的控制律为

$$u(t) = -R^{-1}B^TP_1x(t) = -5.1231x(t); \quad (29)$$

而采用本文方法得到的前馈反馈次优控制律为

$$u_N(t) = -5.1231x(t) + 0.9877v(t) + 0.2395v(t-3/4) + g_N(t). \quad (30)$$

其中 $g_k(t)$ 为下列微分方程的解:

$$\begin{cases} -\dot{g}_k(t) = -4.1231g_k(t) + 5.1231x_{k-1}(t-1) + 5.1231x_{k-1}(t+1) + g_{k-1}(t+1) + 0.9877v(t+1) + 0.2395v(t+1/4), \\ g_k(\infty) = 0, k = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (31)$$

由仿真计算得到, 采用传统的反馈最优控制(29)计算的性能指标 $J = 0.71449$; 而采用本文方法得到的前馈反馈次优控制律(30)计算当 $N = 1, 2, 3$ 时的性能指标分别为 $J_1 = 0.35300$, $J_2 = 0.32899$, $J_3 = 0.32624$. 若给定 $\sigma = 0.01$, 则有 $\left|\frac{J_2 - J_3}{J_2}\right| = 0.0084 < \sigma$, 于是 $u_3(t)$ 可作为系统(27)关于性能指标(28)的前馈反馈次优控制律.

图1和图2分别给出了采用传统的反馈最优控制律(29)(曲线①)和前馈反馈次优控制律(30)(曲线②)在 $N = 3$ 时的控制量 u 和对应的状态变量 x 的仿真结果.

从计算结果和仿真曲线可以看出, N 值越大, 系统性能越好, 且明显好于传统的反馈最优控制的结果.

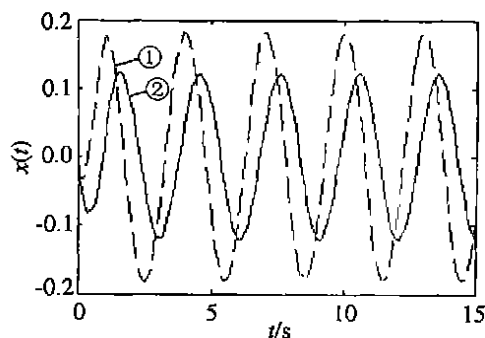


图1 状态变量曲线

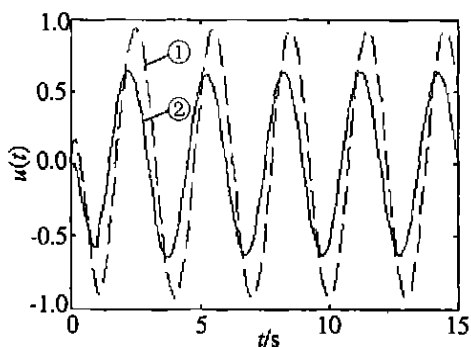


图2 控制律曲线

6 结论

本文研究状态变量含时滞的线性系统在外正

弦干扰下的最优减振控制问题, 提出了一种前馈反馈次优减振控制器设计的无滞后转换法。仿真结果表明, 与经典反馈最优控制相比, 本文的结果对正弦干扰具有更好的鲁棒性。本文方法可以方便地推广到含有其他类型干扰的时滞系统的次优控制研究中。

参考文献(References):

- [1] Tang G Y, Luo Z W. Suboptimal control of linear systems with state time-delay[A]. *Proc of IEEE Conf on SMC*[C]. Tokyo, 1999. 5: 104-109.
- [2] Tang G Y, Fu P L. A suboptimal control approach of linear time-delay systems[A]. *Proc of 14th World Congress of IFAC*[C]. Beijing, 1999. D: 99-104.
- [3] 唐功友, 王芳. 具有小时滞的线性大系统的次优控制[J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(1): 121-124.
(Tang G Y, Wang F. Suboptimal control for linear large-scale systems with small time-delay[J]. *Control Theory and Applications*, 2003, 20(1): 121-124.)
- [4] Blanchini F, Sznajder M. Persistent disturbance rejection via static-state feedback[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(6): 1127-1131.
- [5] Dahleh M A, Shamma J S. Rejection of persistent bounded disturbances: Nonlinear controllers[J]. *Systems and Control Letters*, 1992, 18(2): 245-252.
- [6] Savkin A V, Petersen I R. Robust control with rejection of harmonic disturbances[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(11): 1968-1971.
- [7] Elliott S J, Sutton T J. Performance of feedforward and feedback systems for active control[J]. *IEEE Speech and Audio Processing*, 1996, 4(3): 214-223.
- [8] Wu W, Chou Y-S. Adaptive feedforward and feedback

- control of non-linear time-varying uncertain systems[J]. *Int J of Control*, 1999, 72(12): 1127-1138.
- [9] Zhang Y, Mehta P G. Feedforward-feedback adaptive control design and stability analysis[A]. *Proc of 14th World Congress of IFAC*[C]. Beijing, 1999. E: 409-414.
- [10] Lindquist A, Yakubovich V A. Optimal damping of forced oscillations in discrete-time systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(6): 786-802.
- [11] Tang G Y. Feedforward and feedback optimal control for linear systems with sinusoidal disturbances[J]. *High Technology Letters*, 2001, 7(4): 16-19.
- [12] Leitmann G, Pandey S. Aircraft control under conditions of windshear[A]. *Proc of 29th IEEE Conf on Decision and Control*[C]. Honolulu, 1990. 747-752.
- [13] Miele A. Optimal trajectories and guidance trajectories for aircraft flight through windshears[A]. *Proc of 29th IEEE Conf on Decision and Control*[C]. Honolulu, 1990. 737-746.
- [14] Li H, Hu S J, Cheng Z. Multiple-step predictive control for offshore structures[J]. *China Ocean Engineering*, 1999, 13(3): 231-246.
- [15] Fragopoulos D, Spathopoulos M P, Zheng Y. A pendulation control system for offshore lifting operations[A]. *Proc of 14th World Congress of IFAC*[C]. Beijing, 1999. C: 465-470.
- [16] Ohmori H, Miyamoto H, Sano A. Sinusoidal disturbance rejection by plug-in adaptive controller[A]. *Proc of 14th World Congress of IFAC*[C]. Beijing, 1999. E: 289-294.

(上接第 528 页)

参考文献(References):

- [1] Vapnik V. *The Nature of Statistical Learning Theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [2] 阎威武. 支持向量机理论、方法和应用研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2003.
- [3] Mackay D J C. Probable network and plausible predictions—A review of practical Bayesian methods for supervised neural networks[J]. *Neural Network Computation in Neural Systems*, 1995, 6: 469-505.
- [4] Kowk J T. The evidence framework applied to support

- vector machines[J]. *IEEE Trans on Neural Networks*, 2000, 11(5): 1162-1173.
- [5] Suykens J A K. Nonlinear modeling and support vector machines[A]. *Proc of the 18th IEEE Conf on Instrumentation and Measurement Technology*[C]. Budapest, 2001. 287-294.
- [6] 李柠. 多模型建模与控制的若干问题研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2002.
- [7] 樊家琨. 应用多元分析[M]. 开封: 河南大学出版社, 1993. 52-53.