

一类具有非线性饱和和执行器的 不确定时滞系统鲁棒控制*

苏宏业 潘红华 蒋培刚 褚 健

(浙江大学工业控制技术国家重点实验室, 工业控制技术研究 所 杭州 310027)

摘 要 研究一类具有非线性饱和和执行器的不确定线性时滞系统的鲁棒镇定问题。所考虑的不确定时滞系统具有时变未知且有界的不确定参数和状态时滞。提出了新的鲁棒可镇定判据和相应的鲁棒无记忆状态反馈控制器设计方法。数值仿真例子说明了所提出方法的有效性。

关键词 线性时滞系统, 状态反馈, 不确定性, 饱和执行器, 线性矩阵不等式

分类号 TP 114

Robust Control for a Class of Uncertain Time- delay Systems Containing Nonlinear Saturating Actuators

Su Hongye, Pan Honghua, Jiang Peigang, Chu Jian

(Zhejiang University)

Abstract The robust stabilization problem for a class of uncertain linear time- delay systems containing sector nonlinear saturating actuator is considered. The uncertain time- delay systems under consideration are described by state differential equations with time- varying unknown- but- bounded uncertain parameters and delayed state. The criteria of delay- independent robust stabilizability for the uncertain time- delay systems is presented and the correspondent robust memoryless state feedback controllers are derived in terms of the solutions of several linear matrix inequalities (LMIs). Numerical example is given to illustrate the method.

Key words linear time- delay system, state feedback, uncertainty, saturating actuator, linear matrix inequality

1 引 言

由传输滞后、有限计算时间和测量延迟等造成的时滞现象, 存在于大多数工业过程和自然过程中, 它们常常导致系统发生振荡甚至不稳定。对于具有或不具有不确定性的时滞系统的稳定性分析和镇定问题, 在过去几十年里得到了广泛研究^[1, 2]。在许多实际情况下, 由于执行器的动作受到物理限制, 往往具有饱和和非线性动态特性, 这不仅使控制系统的性能恶化, 而且影响到系统的稳定性。

不少学者研究了带饱和和执行器的线性系统稳定性分析及镇定问题。文献[3]研究了一个带饱和和执行

器的 SISO 系统的稳定性分析问题; [4]对具有饱和和执行器和扇形非线性饱和和执行器的多变量线性系统进行研究。近来, 带有饱和和执行器的不确定时滞系统的鲁棒镇定问题受到关注。[5]对存在单一的状态滞后及饱和和执行器的不确定线性时滞系统, 用矩阵测度的概念及比较理论给出了输出反馈镇定的充分条件; [6]用 Razumikhin 方法研究了一类带饱和和执行器的不确定线性时滞系统的鲁棒镇定问题, 得到一个可用线性无记忆状态反馈控制律来进行鲁棒镇定的判据及相应的控制器设计方法, 但该文所得结果以求解代数 Riccati 方程的形式给出, 需要对标量及正定对称矩阵进行整定。

* 国家自然科学基金重点项目(69934030)和浙江省自然科学基金项目(697017)

1999- 03- 07 收稿, 1999- 06- 22 修回

本文将线性矩阵不等式方法推广到不确定线性时滞系统, 该系统具有扇形非线性饱和执行器约束并同时存在未知有界的状态滞后。系统分析和综合的目的是得到鲁棒可镇定判据, 并设计一个无记忆状态反馈控制律, 使闭环系统对所有满足要求的不确定性都是渐近稳定的。基于线性矩阵不等式方法, 得到一个新的鲁棒可镇定判据和相应的鲁棒镇定控制律设计方法, 这些结果以一组线性矩阵不等式的形式给出。

2 系统描述与定义

考虑如下不确定时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (A_1 + \Delta A_1(t))x(t-d) + (B + \Delta B(t))u(t) \\ x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \\ u(t) = \text{sat}(u(t)) \\ \text{sat}(u(t)) = [\text{sat}(u_1(t)) \dots \text{sat}(u_m(t))] \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t)$ 是状态向量, $u(t) \in R^m$ 是执行器的控制输入向量, $u(t) \in R^m$ 是对象的控制输入向量; $A \in R^{n \times n}$, $A_1 \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ 是已知的定常矩阵; 矩阵 $\Delta A(\cdot)$, $\Delta A_1(\cdot)$ 和 $\Delta B(\cdot)$ 代表系统模型中的时变不确定参数。

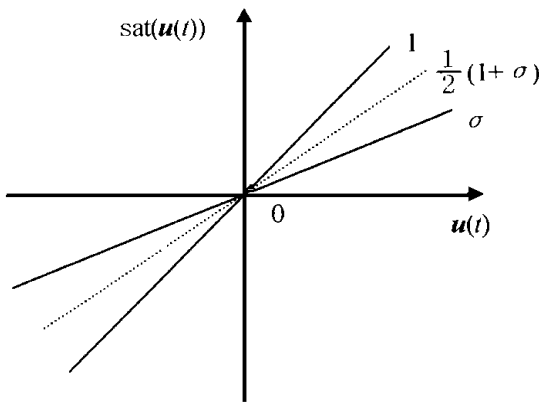


图1 扇形非线性饱和函数

考虑图1所示的在扇形区域 $[\sigma, 1]$ 内的非线性饱和函数: 标量 d 表示未知且有界的状态滞后, 并假设存在正实数 τ 使得对所有的 t 满足 $0 \leq d \leq \tau$ 本文假设不确定性具有如下形式

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &= H_1 F_1(t) E_1 \\ \Delta A_1(t) &= H_2 F_2(t) E_2 \\ \Delta B(t) &= H_3 F_3(t) E_3 \end{aligned}$$

其中, H_i, E_i 是已知的实定常矩阵; $F_i(t)$ 是未知的实时变矩阵, 且满足 $F_i^T(t) F_i(t) \leq I, i = 1, 2, 3$ 。

3 鲁棒镇定控制律综合方法

本节针对带扇形非线性饱和执行器的不确定线性时滞系统(1), 给出一个新的鲁棒可镇定充分条件以及相应的控制器综合方法。主要结果如下:

定理1 不确定线性时滞系统(1) 是鲁棒可镇定的, 如果存在正定对称矩阵 $X > 0, Q > 0$; 矩阵 Y 和标量 $\alpha > 0, i = 1, 2, 3, 4; \epsilon > 0$ 满足如下线性矩阵不等式(LMIs)

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} S & L_1 \\ L_1^T & L_2 \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} Q - BB^T - \epsilon H_3 H_3^T & B E_3^T \\ E_3 B^T & \epsilon I - E_3 E_3^T \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} S &= AX + XA^T + \frac{1}{2}(1 + \sigma)BY + \\ &\frac{1}{2}(1 + \sigma)Y^T B^T + \sum_{i=1}^2 \alpha_i H_i H_i^T + \\ &\frac{1}{2}(1 + \sigma) \alpha_3 H_3 H_3^T + \alpha_4 A_1 A_1^T + Q \end{aligned}$$

$$L_1 = [M_1 \ M_2 \ M_3 \ M_4]$$

$$L_2 = \text{diag}(N_1, N_2, N_3, N_4)$$

$$M_1 = [X E_1^T \ X E_2^T], \ M_2 = X$$

$$M_3 = \frac{1}{2}(1 - \sigma)Y^T, \ M_4 = Y^T E_3^T$$

$$N_1 = \text{diag}(\alpha_1 I, \alpha_1 I), \ N_2 = \alpha_1 I$$

$$N_3 = I, \ N_4 = 2(1 + \sigma)^{-1} \alpha_1 I$$

那么, 一个合适的无记忆状态反馈鲁棒镇定控制律由 $u(t) = YX^{-1}x(t)$ 给出。

证明 对不确定线性时滞系统(1), 引入控制律 $u(t) = Kx(t)$, 则闭环系统可写成

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left[A(t) + \frac{1}{2}(1 + \sigma)B(t)K \right] x(t) + \\ &A_1(t)x(t-d) + B(t)\eta(t) \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\eta(t) = \text{sat}(Kx(t)) - \frac{1}{2}(1 + \sigma)Kx(t)$$

显然, 向量函数 $\eta(t)$ 满足如下不等式

$$\eta^T(t) \eta(t) \leq \frac{1}{4}(1 - \sigma)^2 x^T(t) K^T K x(t) \quad (4)$$

选取系统(3) 的Lyapunov 函数为

$$V(x(t), t) = x^T(t) P x(t) + \int_{t-d}^t x^T(s) R_1 x(s) ds$$

其中 P, R_1 是正定对称矩阵。 $V(x(t), t)$ 沿系统(3) 的轨迹关于时间 t 求导, 得

$$\begin{aligned} V^{\circ}(x(t), t) = & x^T(t) \left\{ \left[A(t) + \frac{1}{2}(1 + \theta)B(t)K \right]^T P + \right. \\ & P \left[A(t) + \frac{1}{2}(1 + \theta)B(t)K \right] + R_1 \} x(t) + \\ & 2x^T(t)PA_1(t)x(t-d) + 2x^T(t)PB(t)\eta(t) - \\ & x^T(t-d)R_1x(t-d) \end{aligned} \quad (5)$$

对(5)应用文献[2]中引理1, 得

$$\begin{aligned} V^{\circ}(x(t), t) \leq & x^T(t)W_1x(t) + x^T(t-d) \times \\ & (\alpha_1^1 I + \alpha_1^1 E_2^T E_2 - R_1)x(t-d) + \\ & x^T(t)PB(t)B^T(t)Px(t) \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} W_1 = & A^T P + PA + \frac{1}{2}(1 + \theta)K^T B^T P + \\ & \frac{1}{2}(1 + \theta)PBK + R_1 + \alpha_1^1 E_1^T E_1 + \\ & P \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i H_i H_i^T + \frac{1}{2}(1 + \theta)\alpha_3 H_3 H_3^T + \right. \\ & \left. \alpha_4 A A^T \right) P + \frac{1}{2}(1 + \theta)\alpha_5 K^T E_3^T E_3 K \\ & + \frac{1}{4}(1 - \theta)^2 K^T K \end{aligned}$$

假定存在标量 $\epsilon > 0$ 和正定对称阵 $Q > 0$, 使得以下不等式满足

$$\begin{aligned} BB^T + BE_3^T(\epsilon I - E_3 E_3^T)^{-1}E_3 B^T + \epsilon H_3 H_3^T \\ \leq Q \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $\epsilon I - E_3 E_3^T > 0$ (8)

应用文献[2]中引理2, 可得 $B(t)B^T(t) \leq Q$ 。令 $R_1 = \alpha_1^1 I + \alpha_1^1 E_2^T E_2$, 则由式(6)得

$$\begin{aligned} V^{\circ}(x(t), t) \leq & x^T(t)[W_1 + PQP]x(t) = \\ & x^T(t)W_2x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} W_2 = & A^T P + PA + \frac{1}{2}(1 + \theta)K^T B^T P + \\ & \frac{1}{2}(1 + \theta)PBK + \sum_{i=1}^2 \alpha_i^1 E_i^T E_i + \alpha_1^1 I + \\ & P \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i H_i H_i^T + \frac{1}{2}(1 + \theta)\alpha_3 H_3 H_3^T + \right. \\ & \left. \alpha_4 A A^T + Q \right) P + \frac{1}{2}(1 + \theta) \times \\ & \alpha_5 K^T E_3^T E_3 K + \frac{1}{4}(1 - \theta)^2 K^T K \end{aligned} \quad (10)$$

如果存在正定对称矩阵 P, Q , 矩阵 K 和标量 $\alpha > 0$, 以及 $\epsilon > 0$ 满足不等式(7), (8)和 $W_2 < 0$, 那么对所有允许的不确定性, $V^{\circ}(x(t), t) \leq$

$-\alpha x(t)^2$ 。闭环系统(3)是鲁棒稳定的, 亦即原来的不确定时滞系统(1)是鲁棒可镇定的。

引入新的变量 $X = P^{-1}$, 并令 $W_3 = XW_2X$, 则 $W_2 < 0$ 等价于 $W_3 < 0$ 。令 $Y = KX$, 并应用 Schur 引理, 可知不等式(7), (8)和 $W_3 < 0$ 等价于线性矩阵不等式(2)。

4 举 例

考虑如下不确定线性时滞系统, 其中非线性饱和和执行器在扇形区间 $[1/3, 1]$ 。

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ -0.8 & -0.5 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, H_i = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \\ E_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3 \\ F_i(t) &= \begin{bmatrix} \sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 0.9634 & -0.4379 \\ -0.4379 & 15.9186 \end{bmatrix} \\ Y &= \begin{bmatrix} -3.8407 & 0.5315 \\ -2.8287 & -1.5418 \end{bmatrix} \\ K &= YX^{-1} = \begin{bmatrix} -4.0219 & -0.0772 \\ -3.0180 & -0.1799 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

如果此处的非线性饱和函数的形式为

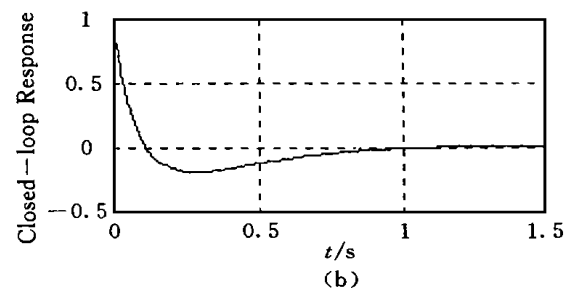
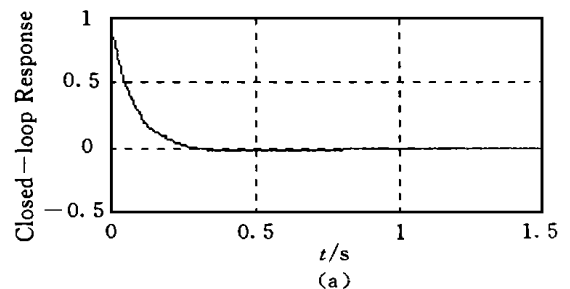


图2 闭环系统的状态响应曲线
(a) 状态 $x_1(t)$ (b) 状态 $x_2(t)$

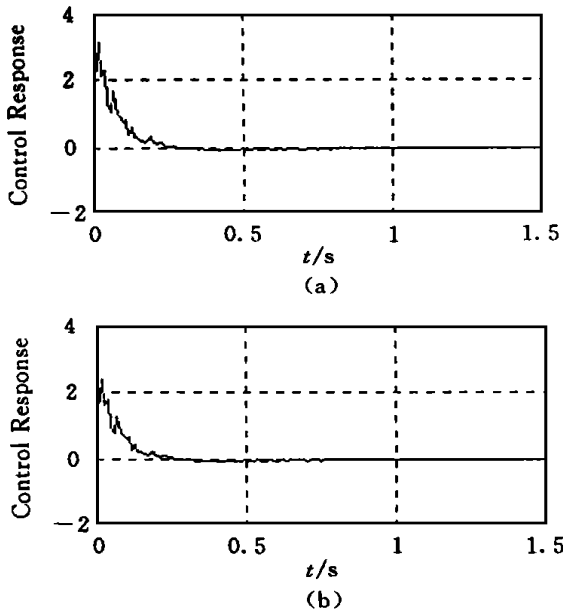


图3 实际控制信号曲线

(a) 控制信号 $u_1(t)$ (b) 控制信号 $u_2(t)$

$$\text{sat}(u_i(t)) = u_i(t) - \text{rand}(u_i(t) - \frac{1}{3}u_i(t))$$

其中 rand 为 0 到 1 之间的随机数。显然原开环系统是不稳定的。令系统初始状态为 $[1 \ 1]^T$, 引入控制律 $u(t) = Kx(t)$, 则闭环系统的闭环状态和控制响应曲线分别如图 2, 图 3 所示。

由图中结果可知, 虽然系统存在不稳定性及由非线性饱和引起的控制量波动, 但由本方法所得的控制律仍能保证闭环系统是鲁棒稳定的。

5 结 论

本文研究了一类带非线性饱和和执行器的不确定线性时滞系统的鲁棒镇定综合问题。提出了新的鲁棒可镇定判据和相应的鲁棒无记忆状态反馈控制器设计方法。数值例子说明本文方法是可行的。

参 考 文 献

1 Su Hongye, Chu Jian, Wang Jingcheng A memoryless

robust stabilizing controller for a class of uncertain linear time-delay systems Int J of Systems Science, 1998, 29(2): 191-197

- 2 Li X, De Souza C E. Criteria for robust stability and stabilization of uncertain linear systems with state delay. Automatica, 1997, 33(9): 1650-1662
- 3 Glatfelter A H, Schauffelberger W. Stability analysis of single loop control systems with saturation and antireset-windup circuits IEEE Trans on Auto Control, 1983, 28(12): 1074-1080
- 4 Chen B S, Wang S S. The stability of feedback control with nonlinear saturating actuator: Time domain approach. IEEE Trans on Auto Control, 1988, 33(5): 483-487
- 5 Chou J H, Horng I R, Chen B S. Dynamic feedback compensator for uncertain time-delay systems containing saturating actuator. Int J Control, 1989, 49(3): 961-968
- 6 Niculescu S I, Dion J M, Dugard L. Robust stabilization for uncertain time-delay systems containing saturating actuators. IEEE Trans on Auto Control, 1996, 41(5): 742-747

作 者 简 介

苏宏业 男, 1969 年生。1995 年获浙江大学工业自动化专业博士学位, 现为该校工业控制技术研究副教授。研究方向为鲁棒控制, 非线性控制, 时滞系统控制等。

潘红华 男, 1966 年生。1992 年于大连舰艇学院获军事学专业硕士学位, 现于浙江大学工业控制研究所攻读博士学位。主要研究方向为预测控制理论及其在工业过程控制中的应用。

蒋培刚 男, 1976 年生。1996 年毕业于西安交通大学自动控制系, 现为浙江大学工业控制技术研究博士生。研究方向为鲁棒控制, 时滞系统控制。

褚健 男, 1963 年生。1982 年毕业于浙江大学化工系, 1989 年获日本京都大学工学博士学位, 现为浙江大学教授, 博士生导师。研究方向为时滞系统控制, 非线性控制, 鲁棒控制。