文章编号: 1001-0920(2007)09-1017-05

粒度世界拓扑结构的理论研究

蒙祖强[1,2], 史忠植[1]
(1. 中国科学院 计算技术研究所, 北京 100080; 2. 广西大学 计算机与电子信息学院, 南宁 530004)

摘　要: 基于信息系统,定义论域上的距离函数、构造距离空间;然后从分析论域的距离空间出发,进一步导出论域的拓扑空间并分析其结构特征,建立有关理论;最后研究了由拓扑空间构成的拓扑世界空间,找到了定于该空间之上的格和布尔代数,并导出相关性质和定理,进一步丰富和完善粒度计算的理论体系.

关键词: 粒度计算; 拓扑空间; Rough 集; 商空间
中图分类号: TP18　　**文献标识码**: A

Theoretic research on topological structure of granular worlds

MENG Zu-qiang[1,2], *SHI Zhong-zhi*[1]
(1. Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China; 2. College of Computer and Information Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China. Correspondent: MENG Zu-qiang, E-mail: mengzuqiang @sohu.com)

Abstract: Based on information system, a distance function on the universe is defined, with which distance space on the universe is also established. And then the thorough analyses of the distance space result in universe's topological space are presented, and the relating theories are obtained. At last, topological world space which is made up of topological spaces is analyzed and then Boolean Algebra and Lattice defined on the space are founded. By studying the characteristics of Boolean Algebra and Lattice, some important theories for GrC are established, which can further richen the theoretic framework of GrC.

Key words: GrC; Topological space; Rough sets; Quotient space

1 引　　言

在解决实际问题时,人们往往从一定的粒度层上去考虑,而不必把问题分得很细,特别是对于不能准确把握的复杂问题更是如此. 究其原因,一方面是实际的需要确定了问题的这种解决方式. 例如,对于城市建设规划问题,规划者不可能(也不必要)计算到哪一栋房子有多少个房间以及房间的布局、房号为多少等过细的问题. 另一方面是源于人类对复杂信息处理能力的有限性,即人类对复杂信息处理的能力有限,所以需要将这些信息按照一定的特征分成一系列的信息块,再以信息块为基本单元考虑对问题的解决. 这种方法的好处是,降低了问题的复杂性,有助于问题的迅速解决,同时也体现了人类在解决复杂问题时表现出的智能特征. 于是,模仿人类这种智能行为的计算方法——粒度计算应运而生.

粒度计算(GrC)是由 Zadeh 教授于 1996 年提出的. 一般认为,粒度计算是一把"大伞",它覆盖了所有有关粒度的理论、方法论、技术和工具的研究[1]. 其研究的基本问题主要包括 3 个方面:论域的粒度化、粒(granule,有的译为"粒度","粒子"等)的描述和粒间的关系[2]. 论域的粒度化涉及如何把整体分为部分的问题,即如何把一个论域分成一系列的粒的问题,以便迅速获得问题满意的近似解. 通常,这种划分是根据一定的关系进行的,如不可分辨关系、相似关系等. 通过这种关系便可解释为什么能够把若干个对象集中在一起而形成一个粒. 粒的描述主要研究用何种语言以及如何来标识、命名一个粒,以提供粒的语义解释. 目前,通常以决策逻辑语言(DL-语言)来描述粒,每一个语言公式都有与之相对应的粒. 这样,公式和粒就共同构成了对概念的

收稿日期: 2006-05-26; **修回日期**: 2006-09-30.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60435010,60404021); 广西大学科研基金项目; 广西教育厅科研项目(桂教科研[2006]26号).
作者简介: 蒙祖强(1974—),男,广西罗城人,副教授,博士,从事粒度计算、知识发现等研究; 史忠植(1941—),男,江苏宜兴人,研究员,博士生导师,从事人工智能、机器学习等研究.

刻画[3,4],这在知识发现中有着重要的应用[5,6].

粒之间关系的研究是一个复杂而重要的问题.实际上,粒是相互依存的,它们之间的关系是本质的.这种关系确定了论域的粒度化程度以及粒描述的本质含义(而描述往往是形式上的),因此探讨粒之间的关系并形成相应的理论体系是粒度计算理论研究的核心问题,由此产生的理论成果对促进粒度计算的研究、发展和应用将产生积极而深远的影响.在这方面的研究,Yao 教授从代数格的角度来探讨粒之间的关系,但他主要侧重于粒表示的研究,而未建立粒之间关系定性或定量分析的有效性定理.国内,张铃教授等则基于商空间理论对论域的拓扑结构进行了研究[7,8],形成相应的理论,并把这种理论推广到了模糊粒度计算中.这无疑促进了粒度计算研究的发展,但这些理论的应用主要限于对以等价类为粒的同一商空间中,即主要是基于同一粒度世界的理论.而缺乏对不同粒度世界之间跳转研究的理论支持,也缺乏对商空间理论范畴以外的其他粒度计算方法的有力支持.但是人类智能在处理问题时更多是体现在"能在不同粒度的世界上进行问题求解,而且能够很快地从一个粒度世界跳到另一个粒度世界[1]"上.所以,应该探讨不同粒度世界之间的本质联系,建立这种联系的理论模型,为进一步建立人类处理问题的粒度智能模型做准备.

基于这种考虑,本文在已有成果的基础上,进一步从论域的拓扑结构上探讨粒度空间的结构模型;然后着重研究不同粒度世界之间的关系及不同粒度世界中粒度的转换和相互表示的问题,并导出相关的关系定理和性质,丰富粒度计算的理论体系.

2 基于信息系统的粒度世界模型

2.1 粒度世界的拓扑结构及其性质

信息系统一般用 4 元组表示,即

$$IS = \langle U, A, \{V_a\}, f_a \rangle_{a \in A}.$$

其中:U 是问题的论域,表示有限对象(样本)的集合;A 是有限属性的集合;V_a 是对象在属性 $a \in A$ 上所有可能取值的集合(即属性 a 的值域);$f_a: U \to V_a$ 是论域 U 到值 V_a 上的映射,称为信息函数.

一个信息系统可以用一个二维关系表来表示,称为信息表,表中每一行表示一个对象,每一列表示一个属性列.在不引起混淆的情况下,信息系统$\langle U, A, \{V_a\}, f_a \rangle_{a \in A}$ 简写为$\langle U, A \rangle$,即 $IS = \langle U, A \rangle$.

基于信息系统$\langle U, A \rangle$的粒度计算实际上是论域 U 的拓扑之上的运算,其运算的本质是通过设定的操作来寻求恰当的粒表示及粒组合,以形成对原问题的(近似)解.现有的研究主要是利用信息函数 $f_a(\cdot)$ 来构造的等价关系;然后由等价关系形成对论域的划分,从而形成商空间.这样,就可以运用已有的商空间理论对粒度计算进行研究.商空间理论虽然很成熟,但其应用范围有限.本文将从研究论域的拓扑结构出发,探讨一种更大范围的粒度计算理论框架,研究不同粒度世界之间的关系并导出有关性质和定理.

定义 1 在信息系统$\langle U, A, \{V_a\}, f_a \rangle$中,$U$ 上的函数 d 定义如下:

$$d(s_1, s_2) = |\{a \mid f_a(s_1) \neq f_a(s_2), a \in A\}|.$$

其中:$s_1, s_2 \in U$;$|X|$ 表示集合 X 的大小(元素个数).

容易证明,d 为 U 上的一个距离函数.这是因为:

1) $d(s_1, s_2) \geq 0$,并且 $d(s_1, s_2) = 0$ 当且仅当 $s_1 = s_2$;

2) 显然有 $d(s_1, s_2) = d(s_2, s_1)$,满足对称性;

3) 对任意 $s_1, s_2, s_3 \in U$,如果 $d(s_1, s_3) \neq 0$,则 $d(s_1, s_3) \geq 1$,于是由函数 d 的定义可知,至少存在一个属性 $a \in A$ 使得 $f_a(s_1) \neq f_a(s_3)$.

令 $C = \{a \mid f_a(s_1) \neq f_a(s_3)\}$,由前面论述可知 $C \neq \varnothing$.对任意 $a \in C$,可以分为 3 种情况讨论:

1) $f_a(s_2) = f_a(s_1)$ 但 $f_a(s_2) \neq f_a(s_3)$;

2) $f_a(s_2) \neq f_a(s_1)$ 但 $f_a(s_2) = f_a(s_3)$;

3) $f_a(s_2) \neq f_a(s_1)$ 且 $f_a(s_2) \neq f_a(s_3)$.

不会出现"$f_a(s_2) = f_a(s_1)$ 且 $f_a(s_2) = f_a(s_3)$"的情况,否则会得到 $f_a(s_1) = f_a(s_3)$,这与 $f_a(s_1) \neq f_a(s_3)$ 矛盾.

对于情况 1),由于 $f_a(s_2) \neq f_a(s_3)$,会导致 $d(s_1, s_2) + d(s_2, s_3)$ 的值增加 1;同样,对于情况 2),由于 $f_a(s_2) \neq f_a(s_1)$ 也会导致 $d(s_1, s_2) + d(s_2, s_3)$ 的值增加 1;而对于情况 3),由于 $f_a(s_2) \neq f_a(s_1)$ 且 $f_a(s_2) \neq f_a(s_3)$,会导致 $d(s_1, s_2) + d(s_2, s_3)$ 的值增加 2.这说明,由 $f_a(s_1) \neq f_a(s_3)$ 至少会导致 $d(s_1, s_2) + d(s_2, s_3)$ 的值增加 1,从而推知

$$\begin{aligned} &d(s_1, s_3) = |C| = \\ &|\{a \mid f_a(s_1) \neq f_a(s_3)\}| \leq \\ &d(s_1, s_2) + d(s_2, s_3). \end{aligned}$$

这样,对任意 $s_1, s_2, s_3 \in U$ 都有

$$d(s_1, s_3) \leq d(s_1, s_2) + d(s_2, s_3),$$

因此函数 d 满足三角不等式.

综上所述,函数 d 为 U 上的距离函数,所以二元组 (U, d) 为距离空间.

定义 2 在距离空间 (U, d) 中,对任意 $s \in U$,令 $[s] = \{s' \mid d(s', s) = 0, s' \in U\}$,则 $[s]$ 称为距离空间 (U, d) 中的基本粒.

定理 1 距离空间 (U, d) 中的基本粒有如下性

质:1) 对任意 $s \in U$, $s \in [s]$, $[s] \subseteq U$;2) 对任意 s_1, $s_2 \in U$,如果 $s_1 \neq s_2$,则 $[s_1] \cap [s_2] = \varnothing$;3) $\cup\{[s] \mid s \in U\} = U$.

证明　1) 对任意 $s \in U$,由于 $d(s,s) = 0$,由定义 2 知,$s \in [s]$, $[s] \subseteq U$ 是显然的.

2) 假设 $[s_1] \cap [s_2] \neq \varnothing$,则存在 $s \in [s_1] \cap [s_2]$,即有 $s \in [s_1]$ 且 $s \in [s_2]$. 由定义 2 可知, $d(s, s_1) = 0$ 且 $d(s, s_2) = 0$. 进而由距离函数的定义知, $s = s_1$ 且 $s = s_2$,故 $s_1 = s_2$. 这与题设矛盾,因此 $[s_1] \cap [s_2] = \varnothing$.

3) 任取 $s' \in \cup\{[s] \mid s \in U\}$,则存在 $[s''] \in \{[s] \mid s \in U\}$,使得 $s' \in [s'']$. 由 $[s''] \subseteq U$,得 $s' \in U$,说明 $\cup\{[s] \mid s \in U\} \subseteq U$. 另外,任取 $s' \in U$,由于 $s' \in [s']$,而 $[s'] \subseteq \cup\{[s] \mid s \in U\}$,得 $s' \in \cup\{[s] \mid s \in U\}$,从而 $U \subseteq \cup\{[s] \mid s \subseteq U\}$. 于是证明了 $\cup\{[s] \mid s \in U\} = U$. □

由定理 1 可以看出, $\{[s] \mid s \in U\}$ 实际上是论域 U 的一个划分,基本粒 $[s]$ 相当于商空间中的一个等价类. 为探讨距离空间的性质,进一步引入以下定义.

定义 3　设 (U, d) 为距离空间,对任意 $s \in U$ 和任意小的正实数 ε,令 $B(s,\varepsilon) = \{s' \mid d(s',s) < \varepsilon, s \in U\}$,则 $B(s,\varepsilon)$ 称为 s 的 ε 邻域;对于论域 U 的子集 V,对任意 $s \in V$,如果都存在 $\varepsilon' > 0$,使得 $B(s,\varepsilon') \subseteq V$,则称 V 为 U 的开集.

定理 2　在距离空间 (U, d) 中,对象的邻域和开集具有下列性质:1) 对任意 $s \in U$ 和任意小的正实数 ε,令 $B(s,\varepsilon) \neq \varnothing$ 且 $[s] \subseteq B(s,\varepsilon)$;2) U 和 $\varnothing$ 都为开集;3) 若 V_1 和 V_2 都为开集,则 $V_1 \cap V_2$ 也是开集;4) 令 Γ 为任意一个开集的集合,则 $\cup_{V \in \Gamma} V$ 亦为开集.

证明　1) 取任意 $s' \in [s]$,因 $d(s',s) = 0 < \varepsilon$,所以 $s' \in B(s,\varepsilon)$,这说明 $[s] \subseteq B(s,\varepsilon)$.

2) 由 1) 的证明可知,对任意 $s \in U$,都有 s 的非空 ε 邻域 $B(s,\varepsilon)$,使得 $B(s,\varepsilon)$ 包含 s 且包含于 U,所以 U 为开集. 空集 $\varnothing$ 中没有任何元素,所以可以认为它满足开集的条件.

3) 取任意 $s \in V_1 \cap V_2$,则 $s \in V_1$ 且 $s \in V_2$. 因 V_1 和 V_2 都为开集,所以分别存在 $B_1(s,\varepsilon_1)$ 和 $B_2(s,\varepsilon_2)$,使得 $s \in B_1(s,\varepsilon_1) \subseteq V_1$ 且 $s \in B_2(s,\varepsilon_2) \subseteq V_2$,从而有 $s \in B_1(s,\varepsilon_1) \cap B_2(s,\varepsilon_2) \subseteq V_1 \cap V_2$. 令 $B(s,\varepsilon) = B(s,\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)) = B_1(s,\varepsilon_1) \cap B_2(s,\varepsilon_2)$,则易知 $B(s,\varepsilon)$ 为 s 的 ε 邻域且包含于 $V_1 \cap V_2$,所以 $V_1 \cap V_2$ 为开集.

4) 取任意 $s \in \cup_{V \in \Gamma} V$,因 Γ 为开集集合,所以必存在 Γ 中的开集 V',使得 $s \in V'$. 因 V' 是开集,故存在 s 的 ε 邻域 $B(s,\varepsilon)$,使得 $s \in B(s,\varepsilon)$,且显然有 $B(s,\varepsilon) \subseteq \cup_{V \in \Gamma} V$,因此 $\cup_{V \in \Gamma} V$ 为开集. □

定义 4　设 Γ 为论域 U 的若干子集的集合,如果满足下列条件:1) $U, \varnothing \in \Gamma$;2) 若 $V_1, V_2 \in \Gamma$,则 $V_1 \cap V_2 \in \Gamma$;3) $\Gamma' \subseteq \Gamma$,则 $\cup_{V \in \Gamma'} V \in \Gamma$,则称 Γ 为 U 的拓扑,二元组 (U, Γ) 称为拓扑空间.

定理 3　设 (U, d) 为距离空间,令 Γ' 为 (U, d) 的所有开集的集合,则 Γ' 为 U 的拓扑,即 (U, Γ') 为拓扑空间.

证明　由开集的定义, $U, \varnothing \in \Gamma$,满足定义 4 的条件 1);取任意 $V_1, V_2 \in \Gamma$,由定理 2 知 $V_1 \cap V_2 \in \Gamma$,满足条件 2);取 $\Gamma' \subseteq \Gamma$, Γ' 也是开集的集合,所以由定理 2, $\cup_{V \in \Gamma'} V$ 亦为开集,故 $\cup_{V \in \Gamma'} V \in \Gamma$. 这就证明了 Γ' 为 U 的拓扑, (U, Γ') 为拓扑空间. □

定义 5　在拓扑空间 (U, Γ) 中,如果存在 $\Gamma' \subseteq \Gamma$,使得对任意非空的 $V \in \Gamma$, V 都可以表示成 Γ' 中某些开集的并,即 $V = \cup_{V' \in \Gamma'} V'$,则 Γ' 称为拓扑空间 (U, Γ) 的知识基.

定理 4　在拓扑空间 (U, Γ) 中,基本粒的集合 $\{[s] \mid s \in U\}$ 是该拓扑空间的知识基.

证明　首先证明 $\{[s] \mid s \in U\} \subseteq \Gamma$,即证明 $\{[s] \mid s \in U\}$ 为某些开集的集合. 任意取 $[s] \in \{[s] \mid s \in U\}$ 及 $s' \in [s]$,令 $\varepsilon_0 = 1$,则 $B(s',\varepsilon_0) = \{s'' \mid d(s'',s') < \varepsilon_0, s'' \in U\} = \{s'' \mid d(s'',s') = 0, s'' \in U\} = [s'] (= [s])$. 可见, $[s]$ 中每一对象 s' 的充分小的 ϵ 邻域 $B(s',\varepsilon)$ 就是 $[s]$ 本身,所以由定义 3, $[s]$ 为开集,故 $[s] \in \Gamma$,从而证明 $\{[s] \mid s \in U\} \subseteq \Gamma$.

以下证明 Γ 中的任一开集都可以表示为 $\{[s] \mid s \in U\}$ 中若干开集的并. 为此,先证明一个事实: s 的任意 ε 邻域 $B(s,\varepsilon)$ 都包含 $[s]$,即 $[s] \subseteq B(s,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. 这是因为,对任意 $\varepsilon > 0$, $B(s,\varepsilon) = \{s' \mid d(s',s) < \varepsilon, s' \in U\} \supseteq \{s' \mid d(s',s) = 0, s' \in U\} = [s]$,即 $[s] \in B(s,\varepsilon)$.

任取 $V \in \Gamma$,由于 V 为开集,对任意 $s \in V$,都存在 ε_0-邻域 $B(s,\varepsilon_0)$,使得 $s \in B(s,\varepsilon_0) \subseteq V$. 由上述事实,有 $[s] \subseteq B(s,\varepsilon_0)$,从而 $[s] \subseteq V$,于是 $V = \cup_{s \in V} [s]$. 这就证明了 Γ 中的任一开集 V 都可以表示为 $\{[s] \mid s \in U\}$ 中若干开集的并. □

2.2　拓扑空间中的商空间和 Rough 集理论

商空间理论是研究在已有等价关系下形成的粒(等价类)之间的关系、合成、分解和推理等问题. 本文讨论的拓扑空间是对商空间理论拓展的结果. 实际上,基本粒的集合 $\{[s] \mid s \in U\}$,即拓扑空间 (U, Γ) 的知识基就是论域 U 的一个划分 ——商空间. 如果说本文讨论的拓扑空间理论研究的是粒度空间的立体结构,那么商空间理论则侧重于研究该立体结

构的一个截面. 因此,本文拓扑空间理论是商空间理论的超集.

商空间理论缺乏粒(粒度世界)与粒(粒度世界)之间转换的手段和技术方法[8]. 之所以将商空间理论拓展为拓扑空间来讨论,其目的之一就是为了探讨这个问题的解决方法.

Rough 集理论侧重于研究如何在现有的认知条件下形成对一个子集(粒)的近似表示,它不强调近似空间的结构特征,因而是无拓扑结构的商空间理论[1]. 欣慰的是,Rough 集可以拓展到所讨论的拓扑空间中[9],以下简述之.

考虑拓扑空间 (U,Γ). 假设 X 为信息系统 $\langle U, A, \{V_a\}, f_a\rangle$ 中论域 U 的一个子集,令

$$\overline{X} = \cap\{F \subseteq U \mid X \subseteq F, F \in \Gamma\},$$
$$X^{\circ} = \cup\{G \subseteq U \mid G \subseteq X, G \in \Gamma\},$$
$$X^{b} = \overline{X} - X^{\circ}.$$

显然,这是用 $\overline{X}$, X° 和 X^{b} 分别定义 X 的上近似、下近似和边界. 进一步得到:

1) X 是全可定义的,如果 $\overline{X} = X^{\circ}$(即 $X^{b} = \varnothing$).

2) X 是内可定义的,如果 $X = X^{\circ}$, $X \neq \overline{X}$.

3) X 是外可定义的,如果 $X \neq X^{\circ}$, $X = \overline{X}$.

4) X 是不可定义的,如果 $X \neq X^{\circ}$, $X \neq \overline{X}$.

通过上述方法可以在拓扑空间 (U,Γ) 中研究 Rough 集理论. 于是,Rough 集理论和商空间理论都可以统一到本文讨论的拓扑空间理论中. 但本文的工作还只是一个开头,很多问题还需要深入研究. 特别地,通过构造 U 上的模糊距离函数导出模糊拓扑空间,进而将模糊集理论、词计算理论等融合到同一个拓扑结构中,这样可望最终建立有效、统一的粒度计算理论框架. 这是研究的重点,目前这些研究工作正在引向深入.

3 粒度世界之间关系的理论和性质

粒度计算主要是模拟人类在处理问题时体现出的"能在不同粒度的世界上进行问题求解,而且能够很快地从一个粒度世界跳到另一个粒度世界"的智能行为. 所以,除了探讨同一拓扑空间的性质以外,还要研究不同拓扑空间相互转变或过渡的性质和量化关系. 这对完善粒度计算理论无疑是非常重要的,但目前在这方面所做的工作却很少.

上面是在同一个拓扑空间中进行的讨论,该拓扑空间实际上是由距离函数 d 导出的. 在该拓扑空间中能够处理的最小运算单位是基本粒,同时导出了拓扑空间的知识基. 但如何基于知识基为解决实际问题而构建适度的粒度却较少涉及. 实际上该问题可归结为如何由一个世界中的粒来表示另一世界中的粒,在本质上是粒度世界的转换问题.

由定义 1 可以看出,距离函数 d 与属性集 A 有着密切的联系. A 的变动可以产生完全不同的拓扑空间,那么这些空间之间在本质上有哪些联系呢?为研究这些问题,需要把属性 A 显式地反映到拓扑空间和距离函数的表示式中. 为此,用 (U,Γ_A) 和 $d_A(s_1,s_2)$ 分别表示上文的 (U,Γ) 和 $d(s_1,s_2)$,表明它们使用的属性值是 A.

定理 5 设 (U,Γ_A) 和 (U,Γ_B) 为两个拓扑空间,且 Γ_1 为拓扑空间 (U,Γ_A) 的知识基. 如果 $B \subseteq A$,则对任意 $V \in \Gamma_B$,存在 $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1$,使得 $V = \cup_{H\in\Gamma_2} H$,即 (U,Γ_B) 中的任意开集都可以用 (U,Γ_A) 的知识基来表示.

证明 令 Γ_3 表示拓扑空间 (U,Γ_B) 的知识基. 因为对任意 $V \in \Gamma_B$,V 都可以利用 Γ_3 来表示,所以只需证明:对任意 $H \in \Gamma_3$,存在 $\Gamma_4 \subseteq \Gamma_1$,$H = \cup_{V'\in\Gamma_4} V'$.

由于拓扑空间的知识基为基本粒的集合,对于 $H \in \Gamma_3$,可假设 $[s]_B = H \in \Gamma_3$,$s \in H$. 由 $[s]_B = \{s' \mid d_B(s', s) = 0, s' \in U\}$,得对任意 $s_1, s_2 \in [s]_B$,$d_B(s_1, s_2) = 0$. 现通过下列步骤构造 Γ_4:

1) 取 $s_1 \in [s]_B$,令 $V_1' = \{s' \mid d_B(s', s_1) = 0$ 且 $d_{A-B}(s', s_1) = 0, s' \in U\} = \{s' \mid d_A(s', s_1) = 0, s' \in U\} = [s_1]_A$;

2) 如果 $[s]_B - [s_1]_A \neq \varnothing$,取 $s_2 \in [s]_B - [s]_A$,令 $V_2' = \{s' \mid d_B(s', s_2) = 0$ 且 $d_{A-B}(s', s_2) = 0, s' \in U\} = \{s' \mid d_A(s', s_2) = 0, s' \in U\} = [s_2]_A$;

3) 如果 $[s]_B - [s_1]_A - [s_2]_A \neq \varnothing$,取 $s_3 \in [s]_B - [s_1]_A - [s_2]_A$,令 $V_3' = \{s' \mid d_B(s', s_3) = 0$ 且 $d_{A-B}(s', s_3) = 0, s' \in U\} = \{s' \mid d_A(s', s_3) = 0, s' \in U\} = [s_3]_A$;

…

在上述步骤中,$[s]_B$ 中的对象是有限的,所以必存在正整数 n 使得在 n 步骤时 $[s]_B - [s_1]_A - [s_2]_A - \cdots - [s_n]_A = \varnothing$,即 $[s]_B = [s_1]_A \cup [s_2]_A \cup \cdots \cup [s_n]_A$. 令 $\Gamma_4 = \{[s_1]_A, [s_2]_A, \cdots, [s_n]_A\}$,显然 $\Gamma_4 \subseteq \Gamma_1$,使得 $H = \cup_{V'\in\Gamma_4} V'$. □

基于定理 5,利用幂代数的基本思想进一步定义不同拓扑空间之间的关系运算.

定义 6 令 **P** 为论域 U 的所有可能的拓扑空间的集合,即 $\mathbf{P} = \{(U,\Gamma_C) \mid C \subseteq A\}$,其中 A 为信息系统 $\langle U, A\rangle$ 的属性集,则 **P** 称为拓扑世界空间. 任取 (U,Γ_A), $(U,\Gamma_B) \in \mathbf{P}$,定义它们之间的两种关系运算:

1) $(U,\Gamma_A) \subseteq^{+} (U,\Gamma_B)$ 当且仅当 $V_A \in \Gamma_A$,$\exists V_B \in \Gamma_B$,使得 $V_A \subseteq V_B$;

2) $(U,\Gamma_A) \supseteq^+ (U,\Gamma_B)$ 当且仅当 $V_B \in \Gamma_B$, $\exists V_A \in \Gamma_A$,使得 $V_B \subseteq V_A$.

在论域 U 已知的情况下, $(U,\Gamma_A) \subseteq^+ (U,\Gamma_B)$ 和 $(U,\Gamma_A) \supseteq^+ (U,\Gamma_B)$ 可以分别简写为 $\Gamma_A \subseteq^+ \Gamma_B$ 和 $\Gamma_A \supseteq^+ \Gamma_B$.

定理 6　在拓扑世界空间 **P** 中,对任意 (U,Γ_A), $(U,\Gamma_B) \in \mathbf{P}$,如果 $B \subseteq A$, $(U,\Gamma_A) \subseteq^+ (U,\Gamma_B)$.

定义 7　对任意 (U,Γ_A), $(U,\Gamma_B) \in \mathbf{P}$,如果 $B \subseteq A$,则称 (U,Γ_A) 内包含于 (U,Γ_B),记为 $(U,\Gamma_A) \subseteq^* (U,\Gamma_B)$.

显然,由定理 6 可知,如果 $(U,\Gamma_A) \subseteq^* (U,\Gamma_B)$,则必然有 $(U,\Gamma_A) \subseteq^+ (U,\Gamma_B)$;反之不然.

定理 7　在拓扑世界空间 **P** 中,拓扑空间及其之间的关系 $\subseteq^*$ 构成一个格,用二元组 $\langle \mathbf{P}; \subseteq^* \rangle$ 表示.

证明　对 $\forall (U,\Gamma_A)$, (U,Γ_B), $(U,\Gamma_C) \in \mathbf{P}$,显然 $(U,\Gamma_A) \subseteq^* (U,\Gamma_A)$,故 $\subseteq^*$ 是自反的;如果 $(U,\Gamma_A) \subseteq^* (U,\Gamma_B)$ 且 $(U,\Gamma_B) \subseteq^* (U,\Gamma_A)$,则 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq B$,所以 $A = B$,于是 $(U,\Gamma_A) = (U,\Gamma_B)$;如果 $(U,\Gamma_A) \subseteq^* (U,\Gamma_B)$ 且 $(U,\Gamma_B) \subseteq^* (U,\Gamma_C)$,则 $B \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$,从而 $C \subseteq A$,于是 $(U,\Gamma_A) \subseteq^* (U,\Gamma_C)$,这说明 $\subseteq^*$ 具有传递性. 因此, $\subseteq^*$ 是 **P** 上的偏序关系, $\langle \mathbf{P}; \subseteq^* \rangle$ 为偏序集.

其次,对 $\forall (U,\Gamma_A)$, $(U,\Gamma_B) \in \mathbf{P}$,显然 $(U,\Gamma_A) \subseteq^* (U,\Gamma_{A\cap B})$, $(U,\Gamma_B) \subseteq^* (U,\Gamma_{A\cap B})$. 如果 $\exists (U,\Gamma_C) \in \mathbf{P}$,使得 $(U,\Gamma_A) \subseteq^* (U,\Gamma_C)$, $(U,\Gamma_B) \subseteq^* (U,\Gamma_C)$,则 $C \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$,于是 $C \subseteq A \cap B$,从而 $(U,\Gamma_{A\cap B}) \subseteq^* (U,\Gamma_C)$. 这说明,在拓扑世界空间 **P** 中任意两个拓扑空间 (U,Γ_A) 和 (U,Γ_B) 都有最小上界 $(U,\Gamma_{A\cap B})$. 同理可证,任意两个拓扑空间 (U,Γ_A) 和 (U,Γ_B) 也都有最大下界 $(U,\Gamma_{A\cup B})$. 综上所述, $\langle \mathbf{P}; \subseteq^* \rangle$ 是一个格. □

求两个拓扑空间 (U,Γ_A), (U,Γ_B) 的最大下界和最小上界可分别看作是两种运算,记为 $\cap^*$ 和 $\cup^*$. 最大下界 $(U,\Gamma_{A\cup B}) = (U,\Gamma_A) \cap^* (U,\Gamma_B)$,最小上界 $(U,\Gamma_{A\cap B}) = (U,\Gamma_A) \cup^* (U,\Gamma_B)$. 另外,在拓扑世界空间 **P** 上定义一个"补"运算 $\sim^*$: $\sim^* (U,\Gamma_B) = (U,\Gamma_{A-B})$,其中 A 为信息系统 $\langle U, A\rangle$ 的属性集. 于是进一步得到关于拓扑世界空间 **P** 的下列性质.

定理 8　代数系统 $\langle \mathbf{P}; \cup^*, \cap^*, \sim^* \rangle$ 是有限布尔代数,其 0 元和 1 元分别是 (U,Γ_A) 和 $(U,\Gamma_\varnothing)$,其中 A 为信息系统 $\langle U, A\rangle$ 的属性集, $\Gamma_\varnothing = \{U\}$.

定理 9　$\langle \mathbf{P}; \cup^*, \cap^*, \sim^* \rangle$ 具有布尔代数所具有的性质,如对 $\forall (U,\Gamma_A)$, $(U,\Gamma_B) \in \mathbf{P}$, $(U,\Gamma_A) \cup^* (U,\Gamma_B) = (U,\Gamma_B) \cup^* (U,\Gamma_A)$, $(U,\Gamma_A) \cap^* (U,\Gamma_B) = (U,\Gamma_B) \cap^* (U,\Gamma_A)$ 等.

这样,布尔代数 $\langle \mathbf{P}; \cup^*, \cap^*, \sim^* \rangle$ 的许多性质都可以在粒度计算中发挥作用,丰富了粒度计算的理论体系.

4　结　　语

粒度计算已经成为人工智能研究的热点之一,已在许多领域中得到了应用. Rough 集和商空间等都是粒度计算的方法. 虽然它们都已形成了自己的理论体系,但是 Rough 集理论只是把论域当作一个点集来研究,没有考虑元素之间没有拓扑关系;商空间理论主要是将论域划分成若干个等价类而形成新的论域 ——粒度空间,但商空间理论也仅仅限于同一个粒度世界进行研究,而没有涉及不同粒度世界之间关系的理论分析. 所以,粒度计算的理论基础仍然比较欠缺,很多问题还无法完成定性或定量的理论分析,众多的粒度计算方法也很难统一到同一个理论框架. 但完备的粒度计算理论体系的构建是一项复杂而艰巨的工作,作者将会尽最大的努力,进一步把该课题研究引向深入,更希望有兴趣的同行加入这个研究当中.

参考文献(References)

[1] 张铃, 张钹. 模糊商空间理论: 模糊粒度计算方法[J]. 软件学报, 2003, 14(4): 770-776.
(Zhang Ling, Zhang Bo. Theory of fuzzy quotient space: Methods of fuzzy granular computing[J]. J of Software, 2003, 14(4): 770-776.)

[2] Yao Y Y, Zhong N. Granular computing using information tables[C]. Data Mining, Rough Sets and Granular Computing. Heidelberg: Physica-Verlag, 2002: 102-124.

[3] Yao Y Y, Liau C J. A generalized decision logic language for granular computing[C]. FUZZ-IEEE '02 in the 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence. 2002: 1092-1097.

[4] Yao Y Y. On modeling data mining with granular computing[C]. 25th Annual Int Computer Software and Applications Conf. Chicago, 2001: 638-643.

[5] Yao Y Y, Zhong N. Potential applications of granular computing in knowledge discovery and data mining[C]. Proc of World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics. Orlando, 1999: 573-580.

[6] 张钹, 张铃. 问题求解的理论及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
(Zhang Bo, Zhang Ling. Theory of problem solving and its applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1990.)

(下转第 1026 页)

子神经网络对反应器建模,最大训练次数 50 000,网络结构为 7-25-1. 表 5 显示出 4 种模型泛化结果,图 4 是这 4 种模型收率预测值. 可以看出,QNN 能够很好地跟踪丙烯腈收率的变化.

表 5　模型泛化结果对比

模型	泛化误差 GMSE	泛化最大误差 MAXE	误差绝对值 $\|e\| \leq 1$
BP	0.649 0	2.924 2	54
RBF	0.940 6	4.047 0	53
Qubit NN	0.776 3	2.339 8	45
QNN	0.309 3	2.048 0	59

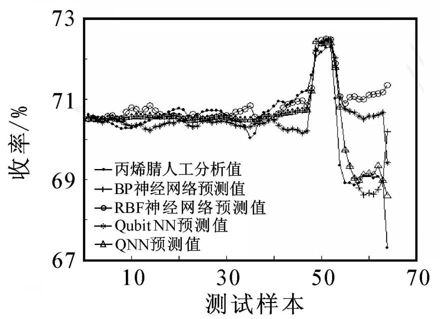

图 4　4 种网络收率预测值

5　结　　语

本文在量子理论的框架下,解释了神经元处理信息的机制,提出了量子神经元计算模型. 采用人工数据集和实际数据集作为分类对象,实验结果显示该神经元组成的网络与其他经典神经元组成的网络相比,在相同的网络结构和训练算法下,具有较好的分类结果和较短的训练时间. 以丙烯腈数据作为建模对象,仿真实验也显示出该神经元网络具有较强的泛化能力,能够很好地跟踪丙烯腈的变化. 进一步的研究主要有:1) 量子神经元是模拟量子受控非门的,这是它的理论基础,希望能够在数学上进一步证明这种模拟的科学性. 2) 拓展量子神经元的应用领域.

参考文献(References)

[1] Kak S. On quantum neural computation[J]. Information Sciences, 1995, 83(3/4): 143-160.

[2] Perus M. Neuro-quantum parallelism in brain-mind and computers[J]. Informatica, 1996, 20(2): 173-183.

[3] Narayanan A, Menneer T. Quantum artificial neural etwork architectures and components[J]. Information Sciences, 2000, 128(3/4): 231-255.

[4] Ventura D, Martinez T. Quantum associative memory [J]. Information Sciences, 2000, 124(1/4): 273-296.

[5] Kouda N, Matsui N, Nishimura H. Qubit neural network and its learning efficiency [J]. Neural Computation and Application, 2005, 14(8): 114-121.

[6] Kouda N, Matsui N, Nishimura H. Image compression by layered quantum neural networks [J]. Neural Processing Letters, 2002, 16(1): 67-80.

[7] Nielsen M A, Chuang I L. Quantum computing and quantum information[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.

[8] 魏海坤. 神经网络结构设计的理论与方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
(Wei Hai-kun. Theory and method for structure design of neural network[M]. Beijing: Defense Industry Press, 2005.)

[9] Cohn D, Atlas L, Ladner R. Improving generalization with active learning[J]. Machine Learning, 1994, 15 (2): 201-221.

[10] Zhou Z H, Chen S F, Chen Z Q. FANNC: A fast adaptive neural network classifier[J]. Knowledge and Information Systems, 2000, 2(1): 115-129.

[11] Wolensky G. Analysis of neural network issues: Scaling, enhanced nodal processing, comparison with standard classification[J]. DARPA Neural Network Program Review, 1990, 14(10): 29-30.

(上接第 1021 页)

[7] 张燕平, 张铃, 吴涛. 不同粒度世界的描述法 ——商空间法[J]. 计算机学报, 2004, 27(3): 328-333.
(Zhang Yan-ping, Zhang Ling, Wu Tao. The representation of different granular worlds: A Quotient Space[J]. Chinese J of Computers, 2004, 27(3): 328-333.)

[8] 李道国, 苗夺谦, 张东星, 等. 粒度计算研究综述[J]. 计算机科学, 2005, 32(9): 1-11.
(Li Dao-guo, Miao Duo-qian, Zhang Dong-xing, et al. An overview of granular computing [J]. Computer Science, 2005, 32(9): 1-11.)

[9] Lashin E F, Kozae A M, Khadra A A, et al. Rough set theory for topological spaces[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2005, 40(1/2): 35-43.

[10] 蒙祖强, 蔡自兴. 个性化决策规则的发现:一种基于 Rough Set 的方法[J]. 控制与决策, 2004, 19(9): 994-998.
(Meng Zu-qiang, Cai Zi-xing. Discovery of personalized dec ision rule: A rough-set-based approach [J]. Control and Decision, 2004, 19(9): 994-998.)