

文章编号: 1001-0920(2001)01-0069-03

模糊判断矩阵的一致性及其性质

樊治平¹, 姜艳萍¹, 肖四汉²

(1. 东北大学 工商管理学院, 辽宁 沈阳 110006;

2. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110006)

摘 要: 针对决策者对有限方案集给出的一类两两方案比较的模糊判断矩阵, 从理论上提出关于模糊判断矩阵一致性的定义及其性质, 为进一步研究模糊判断矩阵的方案排序等问题奠定了基础。

关键词: 模糊判断矩阵; 完全一致性; 传递性

中图分类号: N 945.25

文献标识码: A

Consistency of Fuzzy Judgement Matrix and Its Properties

FAN Zhi-ping¹, JIANG Yan-ping¹, XIAO Si-han²

(1. Faculty of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110006, China; 2. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110006, China)

Abstract: With regard to a kind of fuzzy judgement matrix, i.e. preference information of pairwise comparison of alternatives provided by the decision maker, the definition and some properties on the consistency of fuzzy judgement matrix are proposed theoretically. The results lay a solid foundation for studying rankings of alternatives based on the fuzzy judgement matrix.

Key words: fuzzy judgement matrix; complete consistency; continuance

1 引言

在多属性决策问题中, 为了得到最终的方案排序结果, 常常需要决策者提供偏好信息。而在一些实际的决策问题中, 决策者给出偏好信息的形式通常是两两方案比较的判断结果, 这种偏好信息的形式可由一个判断矩阵来构成。从判断矩阵中元素表示的方法看, 判断矩阵有两大类型: 一类是 AHP (Analytic Hierarchy Process) 判断矩阵^[1]; 另一类是模糊判断矩阵^[2~5]。目前, 对于 AHP 判断矩阵的研究已趋于完善^[1,6], 而对于模糊判断矩阵的研究成果则甚少。有关模糊判断矩阵的一致性问题已成为研究的

焦点之一。

本文对模糊判断矩阵的一致性进行研究, 给出了有关的定义和性质。

2 问题描述

定义 1 设有论域 $X = \{x_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 为决策方案或指标集, 称直积 $X \times X$ 上的一个模糊子集 $P: X \times X \rightarrow [0, 1]$ 或 $P = \sum_{(x_i, x_j)} \frac{\mu_P(x_i, x_j)}{(x_i, x_j)}$ 为 X 中的 (二元) 模糊关系。记 $p_{ij} = \mu_P(x_i, x_j)$, p_{ij} 表示方案 (或元素) x_i 优于方案 x_j 的程度或 x_i 与 x_j 的相

收稿日期: 2000-03-15; 修回日期: 2000-07-05

基金项目: 国家自然科学基金项目 (70071004); 教育部高等学校骨干教师资助计划项目 (教技司[2000]65 号)

作者简介: 樊治平 (1961—), 男, 江苏镇江人, 教授, 博士生导师, 从事决策分析等研究; 姜艳萍 (1968—), 女, 辽宁沈阳人, 博士生, 从事决策分析等研究。

对重要程度, 具体规定^[5]:

- 1) $p_{ij} = 0.5$, 表示 x_i 与 x_j 同样重要;
- 2) $0 \leq p_{ij} < 0.5$, 表示 x_j 比 x_i 重要, 且 p_{ij} 越小, x_j 比 x_i 越重要;
- 3) $0.5 < p_{ij} \leq 1$, 表示 x_i 比 x_j 重要, 且 p_{ij} 越大, x_i 比 x_j 越重要。

定义2 设二元对比矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$, 若满足下列性质:

- 1) $p_{ii} = 0.5, \forall i \in I$;
- 2) $p_{ij} + p_{ji} = 1, \forall i, j \in I, i \neq j$ 。

则称矩阵 P 为模糊判断矩阵。其中性质2) 表示矩阵 P 具有互补性质。

设方案 x_i 的参考排序值(或评价值) 为 w_i , 满足 $w_i \geq 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1$ 。这里 w_i 是一个未知量。从讨论矩阵 P 的完全一致性角度看, 可认为 p_{ij} 与 w_i, w_j 之间存在某种函数关系, 即 $p_{ij} = \xi(w_i, w_j)$ 。通常, 根据矩阵 P 的互补性质, 可以分别考虑如下两种函数关系^[7,8]

$$p_{ij} = 0.5 + 0.5Q(w_i) - 0.5Q(w_j) \quad (1)$$

$i, j \in I, i \neq j$

$$p_{ij} = Q(w_i) / [Q(w_i) + Q(w_j)] \quad (2)$$

$i, j \in I, i \neq j$

其中 $Q(\cdot)$ 是单调增函数, 其值域为 $[0, 1]$ 。

需要指出的是, 基于式(1) 的矩阵 P 一致性分析已有一些研究成果^[5,9], 而基于式(2) 的一致性分析尚未见报道, 本文正是针对这方面展开分析与研究的。

3 一致性及其性质

定义3 对于模糊判断矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$, 若 $\forall i, j, k \in I$ 且 $i \neq j \neq k$, 有

$$p_{ik}p_{kj}p_{ji} = p_{ki}p_{jk}p_{ij} \quad (3)$$

则称矩阵 P 具有完全一致性。

由式(3) 确定的关系式的几何含义是: 在矩阵 P 中, 由元素 p_{ik}, p_{kj}, p_{ji} 构成一个三角形的3个“顶点”; 相应的互补元素 p_{ki}, p_{jk}, p_{ij} 构成另一个三角形的3个“顶点”; 并且这两个三角形的“顶点”之乘积相等。具体形式如下

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

对于一个判断矩阵 $P = (p_{ij})_{3 \times 3}$, 若存在两个三角形

的“顶点”之乘积相等, 即 $p_{12}p_{23}p_{31} = p_{21}p_{32}p_{13}$, 则该矩阵具有完全一致性。

性质1 对于 n 阶模糊判断矩阵 P , 基于式(3) 可构成的三角形个数为 $n(n-1)(n-2)/3$, 或有 $n(n-1)(n-2)/6$ 对三角形。

定义4 对于模糊判断矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$, 若 $\forall i, j, k \in I$ 且 $i \neq j \neq k$, 满足:

1) 当 $0.5 \leq p_{ik} \leq 1, 0.5 \leq p_{kj} \leq 1$ 时, 有 $0.5 \leq p_{ij} \leq 1$;

2) 当 $0 \leq p_{ik} \leq 0.5, 0 \leq p_{kj} \leq 0.5$ 时, 有 $0 \leq p_{ij} \leq 0.5$ 。

则称矩阵 P 具有弱一致性(或满意一致性)。

性质2 对于具有完全一致性的模糊判断矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$, 若 $\forall i, j, k \in I$ 且 $i \neq j \neq k$, 则满足:

1) 当 $0.5 \leq \lambda \leq 1$ 时, 若 $p_{ik} \geq \lambda, p_{kj} \geq \lambda$, 则有 $p_{ij} \geq \lambda$;

2) 当 $0 \leq \lambda \leq 0.5$ 时, 若 $p_{ik} \leq \lambda, p_{kj} \leq \lambda$, 则有 $p_{ij} \leq \lambda$ 。

证明 这里仅证明情况1), 而情况2) 的证明类似于1)。

对于给定的条件: $p_{ik} \geq \lambda$ 和 $p_{kj} \geq \lambda$, 根据判断矩阵的互补性质, 有 $p_{ki} \leq 1 - \lambda, p_{jk} \leq 1 - \lambda$ 。进一步有 $p_{ki}p_{jk} \leq (1 - \lambda)^2$, 或 $p_{ki}p_{jk}p_{ij} \leq (1 - \lambda)^2p_{ij}$ 。根据一致性关系式: $p_{ki}p_{jk}p_{ij} = p_{ik}p_{kj}p_{ji}$, 有 $p_{ik}p_{kj}p_{ji} \leq (1 - \lambda)^2p_{ij}$ 。再利用给定的条件, 有 $\lambda^2p_{ji} \leq p_{ik}p_{kj}p_{ji} \leq (1 - \lambda)^2p_{ij}$, 或 $(1 - \lambda)^2p_{ij} \geq \lambda^2(1 - p_{ij})$, 即有 $p_{ij} \geq \lambda^2/(2\lambda^2 - 2\lambda + 1)$ 。可见, 总有 $2\lambda^2 - 2\lambda + 1 > 0$ 。为了证明 $p_{ij} \geq \lambda^2/(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) \geq \lambda$, 实际上只要说明 $\lambda^2 - \lambda(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) \geq 0$ 成立即可。而事实上, $\lambda^2 - \lambda(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda(3\lambda - 2\lambda^2 - 1)$, 当 $0.5 \leq \lambda \leq 1$ 时, 必有 $\lambda(3\lambda - 2\lambda^2 - 1) \geq 0$, 故结论得证。

性质2 表明: 当模糊判断矩阵具有完全一致性时, 决策者给出的判断信息具有重要的传递性质, 它符合人们决策思维的心理特征。由性质2, 容易得到下面两个推论:

推论1 若模糊判断矩阵 P 具有完全一致性, 则 P 必具有弱一致性。

推论2 对于具有完全一致性的模糊判断矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$, 若 $\forall i, j, k \in I$ 且 $i \neq j \neq k$, 则满足:

1) 若存在 $0.5 \leq p_{ik}, p_{kj} \leq 1$, 则有 $p_{ij} = p_{ik}p_{kj} / [p_{ik}p_{kj} + (1 - p_{ik})(1 - p_{kj})]$, 且 $0.5 \leq p_{ij} \leq 1$;

2) 若存在 $0 \leq p_{ik}, p_{kj} \leq 0.5$, 则有 $p_{ij} = p_{ik}p_{kj}/[p_{ik}p_{kj} + (1 - p_{ik})(1 - p_{kj})]$, 且 $0 \leq p_{ij} \leq 0.5$.

4 一致性模糊判断矩阵的构造

通常情况下, 决策者给出的模糊判断矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$ 不具有完全一致性或弱一致性, 因此希望将一个不一致的模糊判断矩阵转化(或修正)为一致性矩阵。下面给出一个定理:

定理 1 对于模糊判断矩阵 $P = (p_{ij})_{n \times n}$, 若进行如下数学变换

$$r_{ij} = \sum_{l=1}^n p_{il} / \sum_{l=1}^n (p_{il} + p_{jl}), \quad \forall i, j \in I \quad (4)$$

则由此构造的矩阵 $R = (r_{ij})_{n \times n}$ 具有完全一致性。

证明 不难看出, 矩阵 R 具有互补性质。由于

$$\begin{aligned} r_{ik}r_{kj}r_{ji} &= \frac{\sum_{l=1}^n p_{il}}{\sum_{l=1}^n p_{il} + \sum_{l=1}^n p_{kl}} \times \frac{\sum_{l=1}^n p_{kl}}{\sum_{l=1}^n p_{kl} + \sum_{l=1}^n p_{jl}} \times \frac{\sum_{l=1}^n p_{jl}}{\sum_{l=1}^n p_{jl} + \sum_{l=1}^n p_{il}}, \quad \forall i, j, k \in I, \quad i \neq j \neq k \\ r_{ki}r_{jk}r_{ij} &= \frac{\sum_{l=1}^n p_{kl}}{\sum_{l=1}^n p_{kl} + \sum_{l=1}^n p_{il}} \times \frac{\sum_{l=1}^n p_{jl}}{\sum_{l=1}^n p_{jl} + \sum_{l=1}^n p_{kl}} \times \frac{\sum_{l=1}^n p_{il}}{\sum_{l=1}^n p_{il} + \sum_{l=1}^n p_{jl}}, \quad \forall i, j, k \in I, \quad i \neq j \neq k \end{aligned}$$

显然有 $r_{ik}r_{kj}r_{ji} = r_{ki}r_{jk}r_{ij}$ 。由定义 3 可知, 矩阵 R 具有完全一致性。

5 算 例

例 1 假设决策者针对决策方案集 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ 提供的模糊判断矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 \\ 0.4 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

由定义 3 知, 矩阵 P 具有完全一致性。

例 2 假设决策者针对方案集 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$,

$x_4\}$ 提供的模糊判断矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.6 & 0.7 \\ 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 & 0.9 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

可以发现, 在该矩阵中, 由于 $p_{12}p_{23}p_{31} = 0.1 \times 0.8 \times 0.4 = 0.032$, 而 $p_{21}p_{32}p_{13} = 0.9 \times 0.2 \times 0.6 = 0.108$, 所以不满足式(3), 故矩阵 P 不具有完全一致性。根据式(4) 可将矩阵 P 改造成具有完全一致性的模糊矩阵 R , 即

$$R = \begin{bmatrix} 0.500 & 0.422 & 0.487 & 0.559 \\ 0.578 & 0.500 & 0.565 & 0.634 \\ 0.513 & 0.435 & 0.500 & 0.571 \\ 0.441 & 0.366 & 0.429 & 0.500 \end{bmatrix}$$

6 结 语

本文针对决策者给出的模糊判断矩阵这类偏好信息, 给出了关于模糊判断矩阵一致性的定义及其性质, 为进一步研究有关方案排序等问题奠定了基础。需要指出的是, 关于模糊判断矩阵完全一致性的定义并非唯一, 本文给出的分析结果有别于文献[5]。今后的研究工作在于分析两种完全一致性定义之间的内在联系。

参考文献:

- [1] Satty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw-Hill, 1980.
- [2] Orłowski S A. Decision making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(2): 155-167.
- [3] Kacprzyk J. Group decision making with a fuzzy linguistic majority[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 18(2): 105-118.
- [4] Tanino T. Fuzzy preference orderings in group decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12(2): 117-131.
- [5] 姚敏. 计算机模糊信息处理技术[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1999.
- [6] 王蓬芳, 许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1990.
- [7] Chiclana F, Herrera F, Herrera Viedma E. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97(1): 33-48.
- [8] 陈守煜. 系统模糊决策理论与应用[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1994.
- [9] 姚敏, 黄燕君. 模糊决策方法研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(11): 61-64.