第 19 卷 第 3 期
Vol. 19 No. 3

控 制 与 决 策
Control and Decision

2004 年 3 月
Mar. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)03-0346-03

具有传感器故障的可靠圆盘极点配置

姚 波[1,2], 张庆灵[1], 王福忠[3], 张嗣瀛[3]
(1. 东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004; 2. 沈阳师范大学 数学与系统科学学院, 辽宁 沈阳 110034; 3. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 针对线性定常系统, 提出了考虑传感器故障的指定圆盘极点配置可靠控制问题. 在考虑更一般、更实际的传感器故障模型的基础上, 给出了系统将极点配置到指定圆盘内的充分条件. 通过求解 LMI 完成状态反馈控制器的设计. 仿真例子验证了该结果的可行性, 并进一步说明了对系统进行可靠设计的必要性.

关键词: 传感器故障; 可靠控制; 圆盘极点配置; 修正 Lyapunov 不等式; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP29　　**文献标识码**: A

Reliable circular disk pole placement with sensor failures

YAO Bo[1,2], *ZHANG Qing-ling*[1], *WANG Fu-zhong*[3], *ZHANG Si-ying*[3]
(1. School of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. College of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China; 3. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: YAO Bo, E-mail: yaobobo@etang.com)

Abstract: The reliable design problem of disk pole placement with sensor failures for linear systems is discussed. A more practical and general model of sensor failures is presented. A sufficient condition of pole placement in circular disk is given. A state feedback controller is designed by solving LMIs. A simulation example shows the efficiency and necessity of the design method.

Key words: sensor failures; reliable control; circular disk pole placement; redress Lyapunov inequality; LMI

1 引 言

对于线性系统, 如果所有的极点均在复平面的适当圆盘内, 那么系统将具有期望的稳态和动态特性. 近年来, 人们提出了一些将系统的极点配置在一个指定的圆盘内的方法[1,2]. 可靠控制指在设计控制器时将系统部件(执行器和传感器)的故障考虑在设计过程中, 这样可使所设计的控制系统, 无论部件是否出现故障都能保持稳定且满足一定的性能指标[3~5].

本文针对传感器可能失效的线性系统, 提出了使闭环极点配置到指定圆形区域的可靠控制问题. 利用修正的 Lyapunov 不等式给出状态反馈可靠控制器存在的充分条件, 通过求解线性矩阵不等式(LMI)完成系统控制器的设计. 文中所设计的控制器使系统不论发生故障与否, 都将使闭环极点配置在指定的圆形区域内. 同时考虑的故障模型, 不仅包含了控制部件正常工作和完全失效的情况, 而且考虑了控制输出信号值偏离正常值的故障情形. 通过仿真例子验证了可靠控制器设计的可行性、有效性和必要性.

2 问题描述

考虑如下线性系统:

收稿日期: 2003-01-22; 修回日期: 2003-04-09.
基金项目: 辽宁省教育厅资金资助项目(202263357).
作者简介: 姚波(1963—), 女, 副教授, 博士, 从事广义系统可靠控制的研究; 张庆灵(1956—), 男, 教授, 博士生导师, 从事广义系统的最优控制、生物控制的研究.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{1}$$

式中: $x(t) \in R^n$ 为系统的状态变量; $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ 为常值矩阵; $u(t) \in R^m$ 为控制输入.

控制器形式为

$$u(t) = Kx^f(t), \tag{2}$$

式中 $x^f(t)$ 为考虑传感器故障的状态变量.

传感器故障模型为

$$x^f(t) = Mx(t). \tag{3}$$

其中: $M = \mathrm{diag}[m_1, m_2, \cdots, m_n]$ 称为传感器故障矩阵, $0 \le m_{li} \le m_i \le m_{ui}$, $m_{ui} \ge 1$. 这里当 $m_i = 0$ 时, 表示第 i 条通道传感器完全失效; 当 $m_i = 1$ 时, 表示第 i 条通道传感器工作正常; 当 $0 \le m_{di} < m_i < m_{ui}$, $m_{ui} \ge 1$ 且 $m_i \ne 1$ 时, 表示第 i 条通道传感器部分失效, 部分失效意味着传感器输出信号偏离准确值.

考虑带有传感器故障的闭环系统

$$\dot{x}(t) = \hat{A}x(t), \tag{4}$$

其中 $\hat{A} = (A + BKM)$.

本文研究的问题是确定控制器(2)的增益矩阵 K, 使闭环系统(4)极点配置到指定的圆盘区域内.

3　主要结果

引进如下记号:

$$M_0 := \mathrm{diag}[m_{01}, m_{02}, \cdots, m_{0n}],$$
$$J := \mathrm{diag}[j_1, j_2, \cdots, j_n],$$
$$L := \mathrm{diag}[l_1, l_2, \cdots, l_n],$$
$$L^s := \mathrm{diag}[\mathrm{sgn}\ l_1, \mathrm{sgn}\ l_2, \cdots, \mathrm{sgn}\ l_n],$$
$$m_{0i} = \frac{1}{2}(m_{li} + m_{ui}),\ j_i = \frac{m_{ui} - m_{li}}{m_{li} + m_{ui}},$$
$$l_i = \frac{m_i - m_{0i}}{m_{0i}},\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{5}$$

由此得

$$M = M_0(I + L),\ |L| \le J \le I, \tag{6}$$

其中 $|L| := \mathrm{diag}[|l_1|, |l_2|, \cdots, |l_n|]$.

定义 1　如果存在控制器(2)使闭环系统(4)极点配置到指定的圆盘区域内, 则称控制器(2)为圆盘极点配置的可靠控制.

引理 1[6]　对于适当维数矩阵 X 和 Y, 及 $\epsilon > 0$, 不等式 $X^TY + Y^TX \le \epsilon X^TX + (1/\epsilon)Y^TY$ 成立.

引理 2[2]　对于闭环系统(4), 存在圆盘极点配置可靠控制器 K 的充分必要条件为矩阵不等式

$$(A + BKM - aI)P(A + BKM - aI)^T - r^2P < 0 \tag{7}$$

有解 $P > 0$. 式中: $a + 0\mathrm{i}$ 为极点所在圆域 D 的圆心, $r > 0$ 为圆域 D 的半径.

定理 1　记 $\Theta = BKM_0$, 则

$$\begin{bmatrix} 0 & \Theta LP \\ (\Theta LP)^T & 0 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \Theta J\Theta^T & 0 \\ 0 & PJP \end{bmatrix}. \tag{8}$$

其中: P 为正定矩阵; M_0, L, J 由式(5)给出.

限于篇幅, 证明略.

定理 2　记

$$\Xi = (A - aI + BKM)P(A - aI + BKM)^T - r^2P, \tag{9}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -r^2P & Z \\ Z^T & -P \end{bmatrix}. \tag{10}$$

其中: $Z = (A - aI)P + BKMP$; 若 $\Psi < 0$, 则 $\Xi < 0$.

限于篇幅, 证明略.

定理 3　如果存在正定矩阵 $P > J$ 及 $\Pi < 0$, 其中

$$\Gamma = KM_0P,$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} -r^2P & (A - aI)P + B\Gamma & B\Gamma & 0 \\ \left((A - aI)P + B\Gamma\right)^T & -P & 0 & P \\ (B\Gamma)^T & 0 & -P & 0 \\ 0 & P & 0 & -J^{-1} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

则 $\Psi < 0$.

证明　因为

$$\Psi = \begin{bmatrix} -r^2P & Z \\ Z^T & -P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r^2P & Z_0 \\ Z_0^T & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & BKM_0LP \\ (BKM_0LP)^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r^2P & Z_0 \\ Z_0^T & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Theta LP \\ (\Theta LP)^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

其中 $Z_0 = (A - aI)P + BKM_0P$. 将定理 1 及 $P > J$ 代入式(12), 得

$$\Psi \le \begin{bmatrix} -r^2P & Z_0 \\ Z_0^T & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta^T & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \le$$
$$\begin{bmatrix} -r^2P & Z_0 \\ Z_0^{TT} & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta^T & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -r^2P & Z_0 \\ Z_0^T & -P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -P & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Theta^T & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -r^2P & Z_0 \\ Z_0^{\mathrm{T}} & -P \end{bmatrix} -$$
$$\begin{bmatrix} BKM_0P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (BKM_0P)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \leq$$
$$\begin{bmatrix} -r^2P & ((A-aI)P+B\Gamma) \\ ((A-aI)P+B\Gamma)^{\mathrm{T}} & -P \end{bmatrix} -$$
$$\begin{bmatrix} B\Gamma & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (B\Gamma)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

由于 $\Pi < 0$, 由 Schur 补可得

$$\begin{bmatrix} -r^2P & ((A-aI)P+B\Gamma) \\ ((A-aI)P+B\Gamma)^{\mathrm{T}} & -P \end{bmatrix} -$$
$$\begin{bmatrix} B\Gamma & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P^{-1} & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (B\Gamma)^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} < 0, \qquad (14)$$

即 $\Psi < 0$.

定理4 对于系统(1), 如果存在正定矩阵 P 和矩阵 S 满足如下LMIs:

$$P > J, \Pi < 0, \qquad (15)$$

则存在控制增益阵 $K = \Gamma P^{-1}M_0^{-1}$, 使闭环系统(4)的所有极点均在圆域 D 内. 其中 D 为以 $a+0\mathrm{i}$ 为圆心, $r > 0$ 为半径的圆域.

证明 由 $P > J$ 和 $\Pi < 0$ 满足定理3的条件可得 $\Psi < 0$; 再由定理2, 可得 $\Xi < 0$; 由引理2可得定理4成立. □

4 仿真数例

考虑线性系统

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.2361 & -1.3454 & 0.5426 \\ 0.1669 & -1.7522 & -0.1989 \\ 0.8811 & -0.8681 & -1.4006 \end{bmatrix} x(t) +$$
$$\begin{bmatrix} 6.6422 & -6.4263 \\ -0.6341 & -2.2412 \\ 3.8187 & -7.3330 \end{bmatrix} u(t). \qquad (16)$$

极点集合为{0.0482, -1.8426, -1.5945}, 故障变化范围为: $0.6918 \leq m_1 \leq 1.6745$, $0.4467 \leq m_2 \leq 1.0525$, $0.4360 \leq m_3 \leq 1.8395$. 在此范围内, 取特定故障矩阵

$$M = \begin{bmatrix} 1.4396 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7153 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0268 \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

配置极点所在圆形区域 D 的圆心为 $-5+0\mathrm{i}$, 半径为 $r = 4$.

如果不考虑故障, 利用文献[2], 对系统设计控制增益阵为

$$K = \begin{bmatrix} -1.7979 & 6.9672 & 6.8934 \\ 0.7021 & 6.3932 & 8.9430 \end{bmatrix}. \qquad (18)$$

由闭环系统的极点集合{-2.0482, -3.8526, -4.585}可知, 极点配置到要求的圆盘内.

但当系统(16)发生故障时, 且故障矩阵为(17), 则系统的极点将出现在圆盘之外, 极点集合为

{47.2778, 13.8628, -0.6547}.

如果对系统利用本文方法进行可靠控制设计, 得到的控制增益阵为

$$K = \begin{bmatrix} -0.3763 & 0.6362 & 0.2750 \\ -0.0994 & 0.3663 & 0.4346 \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

此时的闭环系统如果发生故障, 故障矩阵为式(17), 极点{-1.6830, -1.6830, -4.3271}虽然发生变化, 但仍然在所要求的圆盘内.

5 结 论

通过以上论证可看出, 利用修正的Lyapunov不等式, 得到了圆盘极点配置的可靠控制. 通过求解LMIs实现了对系统控制器的设计. 所设计的可靠控制器, 不仅使无故障系统的极点保持在该圆盘内, 而且当系统发生故障时仍能使极点保持在相同的圆盘内. 通过仿真可进一步看出, 如果不对系统进行可靠控制, 一旦发生故障, 系统的极点将跳出指定的圆盘, 这说明了对系统进行可靠设计的必要性.

参考文献(References):

[1] Furuta K, Kim S B. Pole assignment in a specified disk [J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1987, 32(5): 423-427.

[2] Wang Z D, Chen X M, Guo Z. Controllers design with variance and circular pole constraints for continuous time systems[J]. *Int J Systems Science*, 1995, 26(5): 1249-1256.

[3] Veillette R J, Medanic J V, Perkins W R. Design of reliable control system [J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1992, 37(3): 770-784.

[4] Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Reliable H_∞ design for linear system[J]. *Automatica*, 2001, 37(3): 717-725.

[5] 张华春, 谭民. 状态反馈控制系统的容错控制器设计. 控制与决策, 2000, 15(6): 724-726.
(Zhang H C, Tan M. Design of fault-tolerant controller to state feedback control systems[J]. *Control and Decision*, 20000, 15(6): 724-726.)

[6] Khargoneker P P, Petersen I R, Zhou K. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H_∞ control theory[J]. *IEEE Trans Automatic Control*, 1990, 35(3): 356-361.