第19卷 第1期　　控 制 与 决 策　　2004年1月
Vol 19 No. 1　　Control and Decision　　Jan. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)01-0053-04

具有未规范化自适应律的直接型模型参考自适应反推控制器

解学军[1], 吴昭景[1,2], 张嗣瀛[2]
(1. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165; 2. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘　要: 对于相对阶 $m > 3$ 的系统, 给出了具有未规范化自适应律的直接型模型参考自适应反推控制器的设计和性能分析, 从而解决了对于任意相对阶系统, 具有未规范化自适应律的直接型模型参考自适应控制器的设计和性能分析问题

关键词: 模型参考自适应控制器; 反推; 相对阶; 未规范化自适应律
中图分类号: TP273.2　　**文献标识码**: A

Direct model reference adaptive backstepping controller with unnormalized adaptive laws

XIE Xue-jun[1], WU Zhao-jing[1,2], ZHANG Si-ying[2]
(1. Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu 273165, China; 2. School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: XIE Xue-jun, E-mail: xiexuejun@eyou.com)

Abstract: For plants with relative degree greater than 3, the design and performance analysis of a direct model reference adaptive backstepping controller (MRAC) with unnormalized adaptive laws are given. The problem on the design and performance analysis of direct MRAC with unnormalized adaptive laws for plants with arbitrary relative degree is thus solved.

Key words: model reference adaptive controller; backstepping; relative degree; unnormalized adaptive laws

1 引　　言

在自适应控制理论中, 利用必然等价原理设计相对阶 $m = 1, 2$ 的具有未规范化自适应律的直接型模型参考自适应控制器是容易的, 但将 $m = 1, 2$ 的结果推广到 $m \geq 3$, 却遇到了实质性的困难. 原因在于对相对阶 $m = 1, 2$ 设计的控制律, 涉及到 $\theta^{(m-1)}$ (θ 的 $m-1$ 阶导数), 对于 $m \geq 3$ 的情况, $\theta^{(m-1)}$ 是不可量测的.

20 世纪 90 年代初期, 这一问题引起人们的关注, 并得到一些新的设计方案[1]. 一种方案是对 $m = 3$ 的情况, $\theta^{(2)}$ 变成可量测的信号, 但这一结果的取得是以自适应律的阶次更高作为代价; 另一种设计方案是自适应律保持不变, 而控制律取为 $u_p = \theta^T\omega + u_a$, 其中 $\theta^T\omega$ 是对 $m = 1$ 设计的控制律, u_a 的设计依赖于稳定性分析. 这些方案的详细设计和分析参见文献[1～3].

本文对于相对阶 $m > 3$ 的系统, 给出了具有未规范化自适应律的直接型模型参考自适应反推控制

收稿日期: 2002-10-28; **修回日期**: 2003-02-10.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60304003); 山东省自然科学基金资助项目(Q2002G02); 山东省优秀中青年科学家科研奖励基金资助项目(03BS092).
作者简介: 解学军(1968—), 男, 山东青岛人, 教授, 从事自适应控制、复杂系统控制的研究; 张嗣瀛(1925—), 男, 山东章丘人, 教授, 博士生导师, 中科院院士, 从事微分对策、复杂系统结构和控制等研究.

器的设计,并对这种控制器给出了严格的稳定性分析. 这一工作的困难在于如何在每一步设计中间变量,以保证闭环系统的稳定性,以及如何选取 γ_i 以保证式(3.4)成立. 本文解决了对于任意相对阶系统,具有未规范化自适应律的直接型模型参考自适应控制器的设计和性能分析问题.

2 直接型模型参考自适应反推控制器的设计

考虑如下系统:

$$\begin{cases} \mathring{x}_p = A_p x_p + B_p u_p,\ x_p(0) = x_0, \\ y_p = C_p^{\mathrm{T}} x_p. \end{cases} \tag{2.1}$$

其中: $x_p \in R^n, u_p, y_p \in R^1$. 系统的传递函数为

$$y_p = G_p(s) u_p = k_p \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} u_p. \tag{2.2}$$

其中: $Z_p(s)$ 和 $R_p(s)$ 是参数未知的首一多项式, 阶次分别为 m_p 和 n_p, k_p 是常数.

选取参考模型

$$\begin{cases} \mathring{x}_m = A_m x_m + B_m u_m,\ x_m(0) = x_{m0}, \\ y_m = C_m^{\mathrm{T}} x_m. \end{cases} \tag{2.3}$$

其中: $x_m \in R^n, u_m, y_m \in R^1$. 参考模型的传递函数为

$$y_m = W_m(s) r = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} r. \tag{2.4}$$

其中: $Z_m(s)$ 和 $R_m(S)$ 是首一的 Hurwitz 多项式, 阶次分别为 q_m 和 p_m, k_m 是常数, r 是任意给定的参考输入.

控制目标是设计具有未规范化自适应律的直接型模型参考自适应控制律 u_p, 使得闭环系统的所有信号都有界, 且输出尽可能接近参考模型的输出 y_m.

对于上述系统及参考模型,需作如下假设:

假设 1(系统假设)

1) $Z_p(s)$ 是首一的 Hurwitz 多项式;

2) n_p 的上界 n 已知;

3) $G_p(s)$ 的相对阶 $m = n_p - m_p > 3$ 已知;

4) k_p 的符号已知.

假设 2(参考模型假设)

1) $P_m \leq n$;

2) 参考模型的相对阶 $p_m - q_m = m$.

注 1 通过某些方法可放宽假设 1 中的 1)~4)[1]. 为同 $m = 3$ 的情况进行比较, 本文仍采用假设 1. 为简单起见, 本文有时记时间 t 的函数 $x(t)$ 为 X, 传递函数 $H(s)$ 为 H. 值得注意的是, 式(2.2)和(2.4)中的 s 是微分算子, 详细解释参见文献[1]. 显然, 对于任意函数 $a(t)$ 和 $b(t)$, $s(a(t)b(t)) = (sa(t))b(t) + a(t)(sb(t)) = \mathring{a}(t)b(t) + a(t)\dot{b}(t)$.

根据文献[1], 误差方程为

$$\begin{cases} \mathring{e} = A_c e + B_c(u_p - \theta^{*\mathrm{T}}\omega),\ e(0) = e_0, \\ e_1 = C_c^{\mathrm{T}} e. \end{cases} \tag{2.5}$$

$$C_c^{\mathrm{T}}(sI - A_c)^{-1} B_c c_0^* = W_m(s). \tag{2.6}$$

其中

$$c_0^* = k_m / k_p,\ e = Y_c - Y_m,$$

$$\theta^* = [\theta_1^{*\mathrm{T}}, \theta_2^{*\mathrm{T}}, \theta_3^*, c_0^*]^{\mathrm{T}},$$

$$\omega = [\omega_1^{\mathrm{T}}, \omega_2^{\mathrm{T}}, y_p, r]^{\mathrm{T}},$$

$$\omega_1 = a(s)/\Lambda(s) u_p,\ \omega_2 = a(s)/\Lambda(s) y_p.$$

$a(s), \Lambda(s), e, A_c, B_c, C_c$ 的定义参见文献[1]. 由式(2.5)和(2.6)得

$$e_1 = W_m(s)\rho^*(u_p - \theta^{*\mathrm{T}}\omega) + C_c^{\mathrm{T}}(sI - \Lambda_c)^{-1} e_0, \tag{2.7}$$

其中 $\rho^* = 1/c_0^*$.

下面给出直接型模型参考自适应控制器(MRAC)的系统化设计. 不失一般性, 设 $e(0) = 0$, 并选取

$$W_m(s) = \frac{1}{(s + p_0)\cdots(s + p_{m-1})}. \tag{2.8}$$

其中: $p_i > 0$, $i = 0, 1, \cdots, m - 1$. 注意到 ρ^* 和 θ^* 是常数, 将式(2.8)代入(2.7), 得

$$e_1 = W_m(s)(s + p_1)\cdots(s + p_{m-1}) \times \rho^*(u_f - \theta^{*\mathrm{T}}\varphi) = \frac{1}{s + p_0}\rho^*(u_f - \theta^{*\mathrm{T}}\varphi). \tag{2.9}$$

其中

$$\begin{cases} u_f = \dfrac{u_p}{(s + p_1)\cdots(s + p_{m-1})}, \\ \varphi = \dfrac{\omega}{(s + p_1)\cdots(s + p_{m-1})}. \end{cases} \tag{2.10}$$

设 ρ^* 和 θ^* 的估计分别为 ρ 和 θ, 则 e_1 的估计 $\hat{e}_1$ 为

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{s + p_0}\rho(u_f - \theta^{\mathrm{T}}\varphi). \tag{2.11}$$

引入中间变量

$$r_1 = u_f - \theta^{\mathrm{T}}\varphi \tag{2.12}$$

由式(2.9),(2.11)和(2.12)得

$$\epsilon = e_1 - \hat{e}_1 = \frac{1}{s + p_0}(\rho^*\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\varphi - \tilde{\rho} r_1). \tag{2.13}$$

其中: $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$, $\tilde{\rho} = \rho - \rho^*$. 选取类 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\tilde{\theta}^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}\tilde{\theta}}{2}|\rho^*| + \frac{\tilde{\rho}^2}{2\gamma} \tag{2.14}$$

自适应律为

$$\dot{\theta} = -\Gamma\epsilon\varphi\,\mathrm{sgn}(\rho^*),\quad \dot{\rho} = \gamma\epsilon r_1. \qquad (2.15)$$

注意到式(2.13) **中的** s **为微分算子, 因此** $\dot{\epsilon} = -p_0\epsilon + \rho^*\theta^{\mathrm T}\varphi - \tilde{\rho}r_1$. **将式**(2.13) **和**(2.15) **代入** V_1 **的导数, 得**

$$\dot{V}_1 = \epsilon(-p_0\epsilon + \rho^*\theta^{\mathrm T}\varphi - \tilde{\rho}r_1) + \theta^{\mathrm T}\Gamma^{-1}\dot{\theta}\,|\rho^*| + \tilde{\rho}\dot{\rho}/\gamma = -p_0\epsilon^2 \le 0.$$

其中 Γ **和** γ **是自适应增益. 下面给出直接型** MRAC **的设计步骤:**

第 1 步　**注意到** s **是微分算子,** p_1 **是常数, 由注** 1 **和式**(2.10), (2.12), (2.15) **得**

$$r_1 = \frac{1}{s+p_1}[u_1 + \varphi^{\mathrm T}\Gamma\varphi\epsilon\,\mathrm{sgn}(\rho^*) - \theta^{\mathrm T}\varphi_1]. \qquad (2.16)$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{u_p}{(s+p_2)\cdots(s+p_{m-1})} = (s+p_1)u_f, \\ \varphi_1 = \dfrac{\omega}{(s+p_2)\cdots(s+p_{m-1})} = (s+p_1)\varphi \end{cases} \qquad (2.17)$$

由式(2.16) **得**

$$\dot{r}_1 = sr_1 = -p_1r_1 + u_1 + \varphi^{\mathrm T}\Gamma\varphi\epsilon\,\mathrm{sgn}(\rho^*) - \theta^{\mathrm T}\varphi_1. \qquad (2.18)$$

选取中间变量

$$u_1 = \theta^{\mathrm T}\varphi_1 - \alpha_1(\varphi^{\mathrm T}\Gamma\varphi)^2r_1 + r_2. \qquad (2.19)$$

其中: $\alpha_1 > 0$ **是设计参数,** r_2 **待定. 将式**(2.19) **代入**(2.18), **得**

$$\dot{r}_1 = -[p_1 + \alpha_1(\varphi^{\mathrm T}\Gamma\varphi)^2]r_1 + \varphi^{\mathrm T}\Gamma\varphi\epsilon\,\mathrm{sgn}(\rho^*) + r_2. \qquad (2.20)$$

第 i 步 ($i = 2,\cdots,m-3$)　**类似于上面的设计步骤, 有**

$$\dot{r}_i = -[p_i + \alpha_i(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{i-1})^2]r_i + \varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi\epsilon\,\mathrm{sgn}(\rho^*) + r_{i+1}, \qquad (2.21)$$

$$u_i = \theta^{\mathrm T}\varphi_i - \alpha_1(\varphi^{\mathrm T}\Gamma\varphi)^2r_1 - \cdots - \alpha_i(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{i-1})^2r_i + r_{i+1}. \qquad (2.22)$$

$$\begin{cases} u_i = \dfrac{u_p}{(s+p_{i+1})\cdots(s+p_{m-1})} = (s+p_1)\cdots(s+p_i)u_f, \\ \varphi_i = \dfrac{\omega}{(s+p_{i+1})\cdots(s+p_{m-1})} = (s+p_1)\cdots(s+p_i)\varphi \end{cases} \qquad (2.23)$$

$\alpha_j > 0$ ($j = 1,\cdots,i$) **是设计参数.**

第 m - 2 步　**当** $i = m-3$ **时, 由式**(2.10) **和**(2.22) **得**

$$r_{m-2} = \frac{1}{s+p_{m-2}}[u_{m-2} + \varphi_{m-3}^{\mathrm T}\Gamma\varphi\epsilon\,\mathrm{sgn}(\rho^*) - \theta^{\mathrm T}\varphi_{m-2}] + \sum_{i=1}^{m-3}\alpha_i(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{i-1})^2r_i. \qquad (2.24)$$

$$\begin{cases} u_{m-2} = (s+p_1)\cdots(s+p_{m-2})u_f, \\ \varphi_{m-2} = (s+p_1)\cdots(s+p_{m-2})\varphi \end{cases} \qquad (2.25)$$

对式(2.24) **两边同时作用** $(s+p_{m+2})$, **得**

$$\dot{r}_{m-2} = -p_{m-2}r_{m-2} + u_{m-2} + \varphi_{m-3}^{\mathrm T}\Gamma\varphi\epsilon\,\mathrm{sgn}(\rho^*) - \theta^{\mathrm T}\varphi_{m-2} + \sum_{i=1}^{m-3}\alpha_i(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{i-1})^2r_i. \qquad (2.26)$$

选取中间变量

$$u_{m-2} = \theta^{\mathrm T}\varphi_{m-2} - \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{i-1})^2r_i. \qquad (2.27)$$

将式(2.27) **代入**(2.26), **得**

$$\dot{r}_{m-2} = -[p_{m-2} + \alpha_{m-2}(\varphi_{m-3}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{m-3})^2]r_{m-2} + \varphi_{m-3}^{\mathrm T}\Gamma\varphi\epsilon\,\mathrm{sgn}(\rho^*). \qquad (2.28)$$

注意到式(2.15), (2.20), (2.21), (2.25), (2.27), (2.28), **则控制律为**

$$\begin{aligned} u_p &= (s+p_{m-1})u_{m-2} = \\ &\theta^{\mathrm T}\omega - \varphi_{m-2}^{\mathrm T}\Gamma\epsilon\varphi\,\mathrm{sgn}(\rho^*) - \\ &\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i[2(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{i-1})(\dot{\varphi}_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{i-1} + \varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\dot{\varphi}_{i-1})r_i + \\ &p_{m-1}(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{i-1})^2r_i] - \sum_{i=1}^{m-3}\alpha_i(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{i-1})^2[-(p_i + \\ &\alpha_i(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{i-1})^2)r_i + \varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi\epsilon\,\mathrm{sgn}(\rho^*) + r_{i+1}] - \\ &\alpha_{m-2}(\varphi_{m-3}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{m-3})^2[-(p_{m-2} + \\ &\alpha_{m-2}(\varphi_{m-3}^{\mathrm T}\Gamma\varphi_{m-3})^2)r_{m-2} + \varphi_{m-3}^{\mathrm T}\Gamma\varphi\epsilon\,\mathrm{sgn}(\rho^*)]. \end{aligned} \qquad (2.29)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \dfrac{s}{(s+p_1)\cdots(s+p_{m-1})}\omega, \\ \dot{\varphi}_{i-1} = \dfrac{s}{(s+p_i)\cdots(s+p_{m-1})}\omega \end{cases} \qquad (2.30)$$

3　性能分析

下面给出相对阶 $m > 3$ **的具有未规范化自适应律的直接型模型参考自适应反推控制器的性能分析.**

定理 1　**考虑系统**(2.2) **和参考模型**(2.4), **若假设 1 中** 1)～4) **和假设 2 中** 1), 2) **成立, 则由式**(2.10), (2.12), (2.13), (2.15), (2.17), (2.20), (2.21), (2.23), (2.28)～(2.30) **构成的** MRAC **方**

案具有如下性质:

1) 闭环系统的所有信号都有界, $\lim\limits_{t\to\infty} e_1(t) = 0$, 且 $\lim\limits_{t\to\infty} r_i(t) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, m-2$;

2) 如果 k_p 已知, r 是 $2n$ 阶充分丰富的(2n 阶充分丰富的定义参见文献[1]), 且 $R_p(s)$ 和 $Z_p(s)$ 是互质的, 则参数估计 $|\tilde\theta| = |\theta - \theta^*|$ 和跟踪误差 e_1 以指数速率收敛于零;

3) 若 k_p 未知, r 是 $2n$ 阶充分丰富的, 且 $R_p(s)$ 和 $Z_p(s)$ 是互质的, 则 $|\tilde\theta|$ 和 e_1 渐近收敛于零;

4) 参数估计 ρ 独立于 r 的丰富性渐近收敛于常数 $\bar\rho$.

证明 由式(2.13) 得

$$\dot\epsilon = -p_0\epsilon + \rho^*\tilde\theta^{\mathrm T}\varphi - \tilde\rho r_1. \tag{3.1}$$

考虑由式(2.15), (2.20), (2.21), (2.28) 和(3.1) 构成的自适应闭环系统, 选取Lyapunov 函数

$$V = V_1 + \sum_{i=1}^{m-2}\gamma_i\frac{r_i^2}{2}. \tag{3.2}$$

其中: V_1 由式(2.14) 定义, $\gamma_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, m-2)$ 是待定参数. V 沿式(2.15), (2.20), (2.21), (2.28) 和(3.1) 的导数为

$$\begin{aligned}\dot V \le\ & -\frac{p_0}{m-1}\epsilon^2 - \sum_{i=1}^{m-2}\frac{\gamma_i p_i r_i^2}{2} - \\ & \sum_{i=1}^{m-2}\frac{p_0}{m-1}\Big[|\epsilon| - \frac{(m-1)\gamma_i|\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi||r_i|}{2p_0}\Big]^2 + \\ & \sum_{i=1}^{m-2}\Big[-\gamma_i\alpha_i(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi)^2 r_i^2 + \\ & \frac{(m-1)\gamma_i^2(\varphi_{i-1}^{\mathrm T}\Gamma\varphi)^2 r_i^2}{4p_0}\Big] + \\ & \Big[\gamma_1|r_1r_2| - \frac{\gamma_1p_1r_1^2}{2} - \frac{\gamma_2p_2r_2^2}{4}\Big] + \\ & \sum_{i=2}^{m-4}\Big[\gamma_i|r_ir_{i+1}| - \frac{\gamma_ip_ir_i^2}{4} - \frac{\gamma_{i+1}p_{i+1}r_{i+1}^2}{4}\Big] + \\ & \Big[\gamma_{m-3}|r_{m-3}r_{m-2}| - \frac{\gamma_{m-3}p_{m-3}r_{m-3}^2}{4} - \\ & \frac{\gamma_{m-2}p_{m-2}r_{m-2}^2}{2}\Big]\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $\varphi_0 = \varphi$. 对于上面给定的 α_i 和 p_i, 选取 γ_i 满足 $0 < \gamma_i \le 4p_0\alpha_i/m-1,\ i = 1, 2, \cdots, m-2$, $\gamma_2 \ge 2\gamma_1/p_1p_2$, $\gamma_{i+1} \ge 4\gamma_i/p_ip_{i+1}$, $i = 2, \cdots, m-4$, $\gamma_{m-2} \ge 2\gamma_{m-3}/p_{m-3}p_{m-2}$, 则

$$\dot V \le -\frac{p_0}{m-1}\epsilon^2 - \sum_{i=1}^{m-2}\frac{\gamma_ip_ir_i^2}{2}. \tag{3.4}$$

由此利用文献[1] 的常规方法便可证得定理 1(详细证明略). □

4 几点说明

1) 本文结果同样适用于相对阶 $m \le 3$ 的情况.

2) 考虑初值条件 $e(0) \ne 0$ 对自适应系统的影响. 对于式(2.7), 因为 A_c 是稳定的, 从而对于任意给定的 $e(0)$, $C_c^{\mathrm T}(sI - A_c)^{-1}e(0)$ 以指数速率收敛于零, 所以初值不会影响自适应系统的稳定性.

3) 由文献[4] 的结果知, 自适应系统(2.15), (2.20), (2.21), (2.28) 和(3.1) 的解存在且唯一.

参考文献(References):

[1] Ioannou P A, Sun J. *Robust Adaptive Control*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

[2] Morse A S. High-order parameter tuners for the adaptive control of linear and nonlinear systems[A]. *Proc of the US-Italy Joint Seminar on Systems, Models and Feedback: Theory and Applications*[C]. Capri, 1992. 81-85.

[3] Morse A S. A comparative study of normalized and unnormalized tuning errors in parameter-adaptive control[A]. *Proc of the 30th IEEE Conf on Decision and Control*[C]. Brighton, 1991. 135-138.

[4] Polycarpou M M, Ioannou P A. On the existence and uniqueness of solutions in adaptive control systems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1993, 38(3): 474-480.

(上接第 52 页)

[11] Shi Y H, Eberhart R C. Fuzzy adaptive particle swarm optimization [A]. *IEEE Int Conf on Evolutionary Computation*[C]. Seoul, 2001. 101-106.

[12] Deb K. An efficient constraint handling method for genetic algorithms [J]. *Comput Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 186(2-4): 311-338.

[13] Nicolis G, Prigogine I. *Self-organization in Nonequilibrium Systems: From Dissipative Systems to Order through Fluctuations*[M]. New York: John Wiley, 1977.