文章编号:1001-0920(2012)08-1241-05

多模态过程中新模态过程建模方法

谭 帅a, 王福利a,b, 彭 俊a, 石怀涛a

(东北大学 a. 信息科学与工程学院, b. 流程工业综合自动化教育部重点实验室, 沈阳 110819)

摘 要:多模态过程中新出现的模态过程短期内无法获得充足的建模数据,且传统统计控制方法无法有效地估计过程特性.鉴于此,提出一种基于历史模型数据相关特性建立初步模型的方法,充分利用已有多模态历史数据的相关特性,从历史数据中寻找与当前数据特征相似的数据进行补充,建立初始模型,并利用新积累的数据迭代初步模型,逐步实现准确描述过程特性的算法.通过在田纳西-伊斯曼过程中的大量仿真,表明了所提出方法的可行性和有效性.
 关键词:少量数据建模;迭代PCA;多模态过程;过程特性
 中图分类号: TP273 文献标识码: A

Modeling algorithm for new mode in multi-mode process

TAN Shuai^a, WANG Fu-li^{a,b}, PENG Jun^a, SHI Huai-tao^a

(a. College of Information Science and Engineering, b. Key Laboratory of Integrated Automation of Process Industry of Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Correspondent: TAN Shuai, E-mail: tanshuai_neu@yahoo.cn)

Abstract: The new mode in multi-mode process can not get enough modeling data in short-term process. And it is hard for traditional statistical methods to extract process characteristics effectively. Therefore, a new algorithm is proposed to solve this problem. The initial model is established based on the characteristics of history models. Historical data with the similar characteristics are found to supply the new modeling data. The iterative model based on the initial model is performed to fit the process more accurately. A large number of simulations in Tennessee Eastman process show the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: limited data modeling; iterative PCA; multi-mode process; process characteristics

1 引 言

多模态过程中, 新产品的添加或者操作条件、生 产环境的改变会导致生产过程中出现新的运行模态. 传统的主元分析 (PCA) 等监测方法不具备时变跟踪 能力, 会导致过程监测和故障诊断系统出现误报, 甚 至失效.为了提高过程监测及故障诊断系统的适应性 能, 需要对己有的监测模型进行不断扩充.因此本文 针对多模态生产过程中新模态的添加和模型更新问 题给出了一套完整的解决策略.

多模态过程是指由于外界环境等条件的变化和 生产方案的变动或是过程本身固有特性等因素,导致 生产过程具有多个稳定工况.在多模态过程中,当生 产过程从一个稳定运行模态到另外一个稳定运行模 态时,会经历一个缓慢变化的过渡模态.为了准确描 述不同模态下变量间不同的相关特性,需要对稳定模 态和过渡模态分别建立过程模型. 当多模态过程中出现新的生产模态时,会带来新的稳定模态和过渡模态的监测模型添加问题. 基于此,对未建模的新模态分两种情况进行考虑.

1)稳定模态.对于新出现的稳定模态,数据容易 获取,因为同一稳定模态内数据变量的相关特性稳定, 并且作为主要生产模式的稳定模态往往生产连续,可 以在短期内累积充足的建模数据.获得足够可信任的 新模态数据后,利用统计方法训练新的稳定模态监测 模型并进行添加.

2) 过渡模态. 新的过渡模态较为复杂, 对于运行 周期短、不容易获取的过渡数据(如短周期间歇过程 时段间的过渡过程), 可以通过反复实验来获取充足 的建模数据. 但对于运行周期长、生产成本昂贵、较 为复杂的过渡过程(如大型连续过程不同稳定生产模

收稿日期: 2011-06-08; 修回日期: 2011-11-02.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074074); 国家 973 计划项目(2009CB320601).

作者简介:谭帅(1983-),女,博士生,从事复杂工业过程监测及故障诊断的研究;王福利(1957-),男,教授,博士生导师,从事复杂工业过程建模与优化、故障诊断等研究.

态间的过渡过程),则很难在短期内获得足够理想的 建模数据.

对于建模数据充分的新模态过程,通过分析数 据的波动特性来建立可准确体现新模态潜在过程相 关特性的统计模型,本文不做深入探讨,主要针对建 模数据较少的多模态过程新过渡模态进行研究.对于 小样本建模问题,目前常用的方法有基于数据变换 法、贝叶斯方法和过程建模法等.数据变换技术通过 数据变换来构造服从同一分布的统计量以达到增加 样本容量的目的,进而在相似生产工序中获取更多的 质量信息[1]. 针对数据变化技术得到控制图的效能无 法直接确定,由此文献[2]提出了数据变化与控制图 效能相结合的 shewhart 控制图聚类方法. 随后, [3]利 用贝叶斯方法假设统计分布的参数是一个具有一定 分布的随机变量,依据先验分布及样本,运用数据推 导对参数进行了统计推断.近几年,[4]提出了一种基 于最少建模数据的子时段PCA建模算法,最初的建 模数据仅是一次正常间歇操作下的运行批次. 在此基 础上, [5] 构建了泛化滑动窗口作为数据单元, 融合了 若干批次的信息,充分利用现有的少量几个建模批次 合理划分子时段,进而建立起初始有效的多时段模型, 初步实现过程监测的功能.但上述方法均存在一定缺 陷,他们仅依赖于数据本身的特性,没有充分利用同 一过程下已获得的大量历史数据. 多模态过程的不同 模态依赖于相同的生产过程背景,已有的历史模态数 据中必然包含一部分与新模态数据一致的信息.可以 充分利用已有的多模态历史过渡数据的相关特性,提 取少量数据的初始特征,从历史数据中寻找与当前数 据特征相似的数据进行补充的思想,建立初始模型; 同时利用新的过渡数据在线更新初始模型,使之包含 更为丰富的过程潜在信息, 增强监测模型的可靠性.

2 初始模型的建立

2.1 新数据初始模态的划分

假设得到一次新模态过渡数据为 $X_0(K \times J)$.其中: J为过程变量个数, K为过渡过程的采样个数.利用长度为W, 滑动步长为1的滑动窗口, 滑动窗口中的数据排列成二维矩阵 $X_r(W \times J)$, 其中 $r = 1, 2, \cdots$, J - W + 1为滑动窗口的个数, 窗口中的数据按时间顺序排列, 每一行是过程变量的测量值样本. PCA方法完全可以提取时间窗口内的过程变量间的协方差信息, 负载矩阵P表征了过程变量之间的相关性信息, 选用下式定义的距离作为度量两个负载矩阵相似性程度的指标, 进而对数据 X 进行模态划分:

$$\gamma(P_1, P_2) = \exp\left(-\left(\sum_{j=1}^{J} (p_{j,1} - p_{j,2})^{\mathrm{T}} (p_{j,1} - p_{j,2})\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

其中: $p_{j,1}$ 和 $p_{j,2}$ 分别为负载矩阵 P_1 和 P_2 的第j个向 量; $\gamma \in [0,1]$ 定量指示了 P_1 和 P_2 的相似度,数值由 小到大代表相似关系由疏到亲, $\gamma = 1$ 表示 $P_1 = P_2$, $\gamma = 0$ 反之.利用文献[6]提出的改进减聚类算法对滑 动窗口的负载矩阵 P聚类,得到 C_0 种聚类模式.每种 聚类模式的数据具有相似的负载矩阵,即每种模式下 的数据具有相似的过程特性,可以用同一个模型描述. 将一次新过渡数据聚类得到的 C_0 种模式定义为新模 态的 C_0 个初始子模态.

2.2 历史数据特性匹配

策

设新过渡过程 X₀ 对应的是从稳定模态 A 到另 一个稳定模态 X 的过渡过程,则历史数据库中已有 的从稳定模态 A 开始的过渡过程 (如从稳定模态 A 过 渡到另一个稳定模态 B 的过渡过程,或者从稳定模 态 A 过渡到另一个稳定模态 C 的过渡过程等)必然与 该次过渡具有部分相似的过程特性.

不同模态间的过渡过程是具有一定动态特性的 复杂过程,很难用一个模型描述,需要用一系列的过 渡子模型来描述.假设历史数据库中含有M种从稳 定模态A开始的过渡过程,每种过程含有 $N_m(m = 1, 2, \dots, M)$ 个对应的过渡子模态模型.根据负载矩 阵的相似性,将新过渡数据分成 C_0 个子类,代表 C_0 个不同的过程相关性特征.设第c个子模态内的数据 为 $X_c(K_c \times J), c = 1, 2, \dots, C_0, 其中 K_c$ 是第c个子 模态内数据的采样个数.

对于子模态 *X_c*, 计算对应各历史子模态模型的 平均 SPE (square prediction error) 来描述历史子模态 数据相关特性与新过程子模态 *X_c* 的相似程度, 即

$$\overline{\text{SPE}}_{n}^{(m)} = \frac{1}{K_{c}} \sum_{k=1}^{K_{c}} \text{SPE}_{k} = \frac{1}{K_{c}} \sum_{k=1}^{K_{c}} \sum_{j=1}^{J} (x_{j} - x_{j} P_{n}^{(m)} P_{n}^{(m)\text{T}})^{2}.$$
 (1)

其中: $n = 1, 2, \dots, N_m$; $m = 1, 2, \dots, M$; $\overline{SPE}_n^{(m)}$ 为 子模态 X_c 对应的第 m 种过渡模态中第 n 个子模型 的平均 SPE; $P_n^{(m)}$ 为第 m 种过渡模态中第 n 个子模 型的负载矩阵. 根据 SPE 的定义不难发现,最小的平 均 SPE 所对应的模型可以最准确地描述新过程子模 态 X_c 的相关特性.

2.3 基于历史数据特性的初始模型建立

选择新数据 X_c 对应最小 SPE 的历史过渡模型 作为参考, X_c 为待学习样本, 定义相似度为遗忘因子, 利用递归的思想基于历史模型学习新数据特性. 将新 数据以一定权值包含到待处理的数据协方差矩阵中, 建立初始模型. 相似度决定了历史数据信息对当前初 始模型的贡献大小, 其值取决于 SPE. 建立新过渡子 模态 X_c 初始模型的具体步骤如下:

Step 1: 与子模态数据 $X_c(K_c \times J)$ 最相似的历史 过渡子模型的均值、方差和相关矩阵分别为 $\tilde{b}_c, \sum_{c}^{\sim} =$ diag $(\tilde{\sigma}_{c,1}, \tilde{\sigma}_{c,2}, \cdots, \tilde{\sigma}_{c,J}), \tilde{R}_c$.

Step 2: 定义第*c*个子模态的遗忘因子 $\mu_c = \exp(-\overline{SPE}_c)$,其中 \overline{SPE}_c 为子模态 X_c 对应的最小 SPE. μ_c 越大,表明历史模型与新数据的相似度越高,历史模型起的作用越大; μ_c 越小,表明历史模型与新数据的相似度越低,新数据对模型的贡献越大.

Step 3: 经过迭代^[7], 第c个子模态的均值、方差和相关矩阵分别为

$$b_c = \mu_c \tilde{b}_c + (1 - \mu_c) \frac{1}{K_c} X_c^{\rm T} \mathbf{1}_{K_c}, \qquad (2)$$

$$\sum_{c} = \operatorname{diag}(\sigma_{c,1}, \sigma_{c,2}, \cdots, \sigma_{c,J}), \tag{3}$$

$$R_{c} = \mu_{c} \sum_{c}^{-1} \left(\sum_{c} \tilde{R}_{c} \sum_{c}^{\sim} + (b_{c} - \tilde{b}_{c})(b_{c} - \tilde{b}_{c})^{\mathrm{T}} \right) \sum_{c}^{-1} + (1 - \mu_{c}) \frac{1}{K_{c}} X_{c}^{0\mathrm{T}} X_{c}^{0}.$$
(4)

其中

$$1_{K_c} = [1, 1, \cdots, 1]^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{K_c}, \ \sigma_{c,i}^2 = \sigma_{c,i}^{(1)} + \sigma_{c,i}^{(2)},$$

$$\sigma_{c,i}^{(1)} = \mu_c (\sigma_{c,i}^2 + (b_c(i) - \tilde{b}_c(i))^2),$$

$$\sigma_{c,i}^{(2)} = (1 - \mu_c) \frac{1}{K_c} \|X_c(:,i) - 1_{K_c} b_c(i)\|^2,$$

$$X_c^0 = (X_c - 1_{K_c} b_c^{\mathrm{T}}) \sum_c^{-1}.$$

Step 4: 对相关系数进行特征向量分析,可以得到 第c个子模态的特征值矩阵 Λ_c 和特征向量矩阵 P_c .

Step 5: 第 c 个子模态的统计量为

$$T_{c}^{2} = t_{c}(S_{c})^{-1} t_{c}^{\mathrm{T}},$$

SPE_c = $(X_{c} - \hat{X}_{c})(X_{c} - \hat{X}_{c})^{\mathrm{T}}.$ (5)

其中: $t_c = x_c P_c$, S_c 为前 A_c 个特征值构成的对角矩 阵, $\hat{X}_c = X_c P_c P_c^{\text{T}}$. T_c^2 和 SPE_c 的统计量控制限可以 分别利用 F 分布和 χ^2 分布按下式计算^[8]:

$$T_c^2 \sim \frac{A_c(K_c - 1)}{K_c - A_c} F_{A_c, K_c - A_c, \alpha},$$

SPE_c ~ $g_c \chi^2(h_c)$. (6)

其中: $g = \theta_2/\theta_1, \ h = \theta_1^2/\theta_2, \ \theta_i = \sum_{j=A_c+1}^J \lambda_j^i.$

3 初始模型的更新

初始的监测系统通过一次过渡数据和历史模型 的补充获得,可靠建模数据的缺乏必然导致初始模型 对过渡过程复杂特性的刻画有所欠缺.因此,随着同 一过渡过程数据的累积,应对初始监测系统及时调整, 包括数据标准化信息、监测模型结构、统计量控制限 等,使之准确描述过渡过程的正常运行情况. 当完成一次相同的新模态过渡后,获得建模数 据 $X_0^*(K \times J)$.其中: J为过程变量个数, K为过渡 过程的采样个数.根据初始过渡过程的聚类结果,将 新数据划分为 C_0 个子模态,第c个子模态内的数据 为 $X_c^*(K_c \times J), c = 1, 2, \cdots, C_0$.计算新数据对应于 初始模型的平均 SPE,利用下式更新遗忘因子:

$$\mu_{c}^{*} = \exp(-\overline{\text{SPE}}_{c}) = \exp\left(-\frac{1}{K_{c}}\sum_{k=1}^{K_{c}}\sum_{j=1}^{J}(x_{j}^{*} - x_{j}^{*}P_{c}P_{c}^{\mathrm{T}})^{2}\right).$$
(7)

利用式(2)~(4)更新初始模型的均值、方差和相关系数矩阵,同时更新统计量控制限.

4 仿真结果

4.1 田纳西-伊斯曼过程

以田纳西-伊斯曼过程(TE)为研究对象,其包括 5个主要单元:反应器、冷凝器、压缩机、分离器和汽 提塔,如图1所示.该过程共有41个测量变量和12个 控制变量.气体成分A,C,D,E和惰性组分B被喂入 反应器,液态产物G和H在反应器中形成.反应器的 产品通过冷凝器冷却,然后送入到汽/液分离器.从分 离器出来的蒸汽通过压缩机再循环送入反应器^[9].



图1 TE 过程工艺流程

4.2 初始模型建立

研究表明, TE 过程的反应器压力和反应器液位 设定值对生产成本有较大影响. TE 过程的操作点可 以根据生产要求进行调整, 该情况下的 TE 过程即为 典型的多模式过程. 以反应器压力和液位设定值变化 这两种操作模式改变的过程为对象, 对提出的方法进 行验证. 一个设定值的改变会对很多过程变量产生较 大影响, 共选择 15 个过程连续变量作为被监控变量, 将其列于表 1.

反应器压力和液位初始设定值分别为2800kPa

表1 TE 过程变量表

序号	变量名称	序号	变量名称
1	A 进料量(流1)	9	产品分离器温度
2	D 进料量 (流 2)	10	产品分离器压力
3	E进料(流3)	11	产品分离器塔底流量(流10)
4	A, C 混合物料流量	12	汽提塔压力
5	再循环流量(流8)	13	汽提塔温度
6	反应器进料速度(流6)	14	反应器冷却水出口温度
7	反应器温度	15	分离器冷却水出口温度
8	排放速度(流9)		

和65%,过程运行至T = 10.99h时,将反应器压力设定值改变为2705kPa,采集过渡过程数据320组.首先采用滑动窗口特征矩阵聚类方法,将一次过渡新数据划分成6个子模态:第1子模态为(1~47),第2子模态为(48~88),第3子模态为(89~93),第4子模态为(94~98),第5子模态为(99~104),第6子模态为(105~320).可以看出,大部分过渡子模态的数据不满足统计算法大样本的要求,不能准确描述子模态的过程潜在特性.数据库中已有历史过渡模型为3种,过渡类型和过渡模型子模态的个数如表2所示.

表 2 历史过渡模型类别

	开始模态		结束		
历史模型	压力值/kPa	液位值/%	压力值/kPa	液位值/%	子模态个数
第1类 过渡模型	2 800	65	2750	65	7
第2类 过渡模型	2 800	65	2 705	75	7
第3类 过渡模型	2 800	65	2 800	60	6

表 3 新过渡数据对应历史过渡模型的平均 SPE 值

	子模态	子模态					
历史过渡		1	2	3	4	5	6
	1	0.0015	0.1753	0.403 1	0.4034	0.4466	0.3912
	2	0.0111	0.8576	1.9584	2.1573	2.2613	1.9062
	3	0.0211	0.0026	0.0223	0.0308	0.0345	0.0488
第1类	4	0.0096	0.0125	0.0186	0.023 5	0.0172	0.0129
	5	0.3723	0.3891	0.6563	0.7157	0.6925	0.244 1
	6	0.5721	0.3472	0.3639	0.3898	0.4206	0.1866
	7	0.0428	0.0559	0.0292	0.0232	0.0233	0.0090
	1	0.0642	0.2529	0.2765	0.2823	0.2747	0.1765
	2	0.0089	0.0197	0.0037	0.004 5	0.0047	0.0119
	3	0.0288	0.0261	0.0495	0.0561	0.0696	0.0750
第2类	4	0.0553	0.0087	0.0042	0.005 5	0.0044	0.0070
	5	0.1094	0.0811	0.045 5	0.0469	0.0476	0.0431
	6	0.6734	0.2533	0.0941	0.1094	0.0968	0.2581
	7	1.0878	1.0664	0.3545	0.3320	0.298 2	0.1915
	1	0.0020	0.005 8	0.0114	0.0122	0.0138	0.0176
	2	0.4496	0.0213	0.0536	0.0454	0.0459	0.0370
第3米	3	0.1671	0.0190	0.0187	0.0207	0.0217	0.0156
77 3天	4	0.7095	0.1522	0.0805	0.0843	0.0765	0.0300
	5	0.7032	0.1506	0.0427	0.0520	0.0516	0.0221
	6	0.1562	0.0721	0.0107	0.0083	0.0076	0.008 1

通过计算每一组子模态数据对应历史模型的平均 SPE 值来选择与当前新数据相关关系最相近的历 史统计模型,计算结果如表 3 所示.表 3 中,对应平均 SPE 最小的历史模型为 (x₁, x₂). x₁ 为第 x₁ 类历史过 渡过程, x₂ 为第 x₁ 类历史过渡过程中的第 x₂ 个子模 态.通过对过程机理进行分析可以发现,反应器压力 的下降首先会引起分离器温度和汽提塔温度的波动, 这与历史第 1 类过渡的前几个子模态过程特性类似, 因此新过渡前 2 个子模态的匹配结果与第 1 类过渡类 似;新模态过渡结束时反应器压力为 2 705 kPa,与历 史第 2 类过渡状况类似,所以由反应器压力降低带来 的各主要单元温度、压力以及流量的调整所引起的过 程特性变化类似于第 2 类过渡模型.

4.3 初始模型的精度验证

为了验证初始模型的精度,采用两种典型的初始 模型建模方法:基于数据变换技术建模算法和Lu等 人提出的基于最少建模数据的子时段PCA建模算法, 分别对过渡新数据的6个子模态建立初始模型.重新 模拟一组新过渡过程的数据X_{test},分别计算对应不 同算法模型的平均SPE值,结果如表4所示.

衣4 举于个问异本初始候空时十均 SFE 值						
过渡子模态	基于数据变 换的方法	基于最少建 模数据方法	基于历史过 渡特性方法			
第1子模态	1.7554	2.4121	1.4883			
第2子模态	3.5549	1.951	0.4591			
第3子模态	2.445 9	1.3464	0.4772			
第4子模态	4.245 1	1.5874	0.4786			
第5子模态	0.8101	1.4606	0.464 1			
第6子模态	1.3986	0.5898	0.0177			
平均 SPE	2.3683	1.5579	0.5642			

表 4 基于不同算法初始模型的平均 SPE 值

由表4可见, SPE值越小, 对应模型可以越准确 地描述过程的相关特性. 对比基于不同算法模型计算 的6个子模态的平均 SPE值, 基于历史过渡特性的初 始模型建模方法可以更准确地描述新模态过程特性.

4.4 模型的更新

重新模拟得到3次新过渡过程的数据,对初始模型进行迭代更新,得到模型的迭代误差如表5所示.

表5中,误差的计算方式是将下一次新的模态数

表5 迭代模型的平均 SPE 值

		• • •	-
计演了描大		迭代误差	
过极于快态	第1次	第2次	第3次
第1子模态	0.878	0.041 5	0.001
第2子模态	0.2798	0.0166	0.0104
第3子模态	0.28	0.0176	0.0087
第4子模态	0.2798	0.0167	0.0087
第5子模态	0.2798	0.0169	0.008 2
第6子模态	0.0034	0.0087	0.003 1

据带入迭代模型计算对应的平均 SPE 值. 通过对比不 难发现,除了第6子模态有微小波动外,大部分迭代 误差呈现逐渐减少的趋势,这表明迭代算法可以越来 越准确地描述新过渡过程的正常运行情况.

5 结 论

本文针对多模态过程中未建模的新模态过程,提 出了一种基于历史数据特性的少数据建模方法,充分 利用已有模型中蕴含的过程特性,弥补因新过程数据 不足而无法准确描述过程运行状态的缺点.随着数据 的累积,对初始监测系统及时调整,使之准确描述过 渡过程的正常运行情况,但对子模态的划分没有迭代 更新能力,需要进一步改进.

参考文献(References)

- Lin Y J, Lai Y J, Chang S I. Short-run statistical process control: Multicriteria part family formation[J]. Quality and Reliability Engineering Int, 1997, 13(1): 9-24.
- [2] Chang S I, Lin S Y. A study of part family formation for short run SPC[C]. Proc of the 4th Industrial Engineering Research Conf. Nashville, 1995: 309-314.
- [3] Tannock J D T. Automating quality system[M]. Michigan: Chapman and Hall Press, 1992: 128-137.

- [4] Lu N Y, Yang Y, Wang F L, et al. A stage-based monitoring method for batch process with limited reference data[C].
 Proc of the Int Symposium on Dynamics and Control of Process Systems. Boston: IEEE, 2004: 471-476.
- [5] Zhao C H, Wang F L, Lu N Y, et al. Stage-based softtransition multiple PCA modeling and on-line monitoring strategy for batch processes[J]. J of Process Control, 2007, 17(9): 728-741.
- [6] Chiu S L. Fuzzy model identification based on cluster estimation[J]. Intelligent Fuzzy Systems, 1994, 2(3): 267-278.
- [7] 刘世成, 王海清, 李平. 基于秩-1 矩阵摄动的递归主元分析算法[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2009, 43(5): 827-831.
 (Liu S C, Wang H Q, Li P. Recursive PCA algorithm based on rank-one matrix perturbation[J]. J of Zhejiang University: Engineering Science, 2009, 43(5): 827-831.)
- [8] Jackson J E. Multivariate quality control[J]. Communications in Statistics: Theory and Methods, 1985, 14(10): 2657-2688.
- [9] Downs J J, Vogel E F. A plant-wide industrial process control problem[J]. Computers and Chemical Engineering, 1993, 17(3): 245-255.

(上接第1240页)

- [4] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed norm[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2009, 52(1): 289-301.
- [5] Donoho D L, Elad M. Maximal sparsity representation via minimization[J]. Proc of the National Academy of Sciences, 2003, 100(5): 2197-2202.
- [6] Rémi G. Fast matching pursuit with a multiscale dictionary of Gaussian chirps[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2001, 49(5): 994-1001.
- [7] Wright J, Yang A Y, Ganesh A, et al. Robust face recognition via sparse representation[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(2): 210-227.
- [8] Shi G, Lin J, Chen X, et al. UWB echo signal detection with ultra-low rate sampling based on compressed sensing[J].
 IEEE Trans on Circuits and Systems: Express Briefs, 2008, 55(4): 379-383.

- [9] Jokar S, Mehrmann V, Pfetsc M E, et al. Sparse approximate solution of partial differential equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2010, 60(4): 452-472.
- [10] Chen S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. J of Society for Industrial and Applied Mathematics on Scientific Computing, 1999, 20(1): 33-61.
- [11] Daubechies I. Time-frequency localization operators: A geometric phase space approach[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1998, 34(4): 605-612.
- [12] Coifman R R, Wicherhauser M V. Entropy-based algorithms for best-basis selection[J]. IEEE Trans on Information Theory, 1992, 38(2): 713-718.
- [13] Sacha Krstulovic, Remi Gribonval. A comparison of two extension of the matching pursuit algorithm for the harmonic decomposition of sounds[C]. Proc of IEEE Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics. New Paltz: IEEE Press, 2005: 259-262.