第 15 卷 第 5 期 控 制 与 决 策 2000 年 9 月
Vol. 15 No. 5 CONTROL AND DECISION Sept. 2000

基于评价函数的遗传算法求解非线性规划问题*

唐加福　汪定伟　许宝栋　李　露
(东北大学信息科学与工程学院　沈阳　110006)

摘　要　针对具有等式约束和非等式约束的非线性规划问题, 通过引进准可行方向、主导准可行方向和可行度等概念, 提出描述和度量非可行点(染色体)的新方法; 通过嵌入非可行染色体的信息于评价函数, 提出 3 种改进的评价非可行染色体的新方法; 基于新的评价函数方法, 提出一种沿权重梯度方向变异的遗传算法(EGA)。对测试问题的仿真结果表明了 EGA 算法的有效性。

关键词　非线性规划, 遗传算法, 非可行染色体, 评价函数, 准可行方向

分类号　O 221.2

Evaluation-based Genetic Algorithm for Non-linear Programming Problem

Tang Jiafu, Wang Dingwei, Xu Baodong, Li Lu
(Northeastern University)

Abstract　By embedding the information of infeasible points/chromosomes into the evaluation function, three improved evaluation functions are designed to formulate and evaluate the infeasible chromosomes. On the basis of introducing concepts of improved version of semi-feasible direction, dominated semi-feasible direction and feasibility degree etc, an evaluation-based genetic algorithm (EGA) is developed for solving non-linear programming (NLP) problems with inequality and equality constraints. Simulation of test problems shows that this algorithm is efficient.

Key words　non-linear programming, genetic algorithm, infeasible chromosome, evaluation function, semi-feasible direction

1 引　　言

遗传算法(GA)以其优越的性能, 已广泛应用于求解旅行商问题、运输问题、0-1 规划、多目标优化和非线性整数规划等问题[1~4]。但将其用于一般形式的非线性规划[5], 还只限于传统方法。将GA 用于非线性规划问题时, 系统约束的处理技术至关重要, 因为遗传算子产生的染色体常常突破给定问题的约束。处理这种非可行性的传统方法[2], 是给那些非可行的染色体以大的惩罚或舍弃非可行染色体, 其本质是在进化过程中淘汰非可行解而缩小搜索空间。这样用选择机理就很难找到全局好的候选解, 遗传搜索将失去效率。为克服这一问题, 文献[6, 7]针对非等式约束的非线性规划问题, 通过嵌入非可行染色体信息于适应性函数, 以度量非可行染色体脱离可行域的程度, 提出了评价非可行染色体的 3 种新方法, 并基于梯度方向搜索, 提出一种新的混合式遗传算法(HGA)。

本文将这一研究结果扩展到具有等式约束和非等式约束的非线性规划问题, 提出 3 种改进的评价非可行染色体的新方法。基于新的评价函数, 提出一种改进的遗传算法(EGA)。

* 国家自然科学基金项目(69684005)和东北大学中青年基金项目(T990302)
1999-06-29 收稿, 1999-09-07 修回

2 非可行点的描述与度量

考虑具有如下一般形式的非线性规划问题

$$\begin{cases} \max f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{s.t.} \quad x \in Q = \\ \quad \{x \in E_n \mid g_i(x) \le 0, \\ \quad i = 1, 2, \cdots, m_1; \\ \quad h_j(x) = 0, j = 1, 2, \cdots, m_2\} \end{cases} \tag{1}$$

假设 $f(x), g(x)$ 在 E_n 上连续且有一阶导数。

本文在[6,7] 的基础上,提出准可行方向和可行度的改进表达形式及评价非可行染色体的 3 种改进方法。

定义 1 点 x 与可行域 Q 之间的"距离"$d(x, Q)$ 为点 x 突破约束的最大值。

根据定义

$$d(x, Q) = \max\{0, g_{\max}(x), h_{\max}(x)\}$$

其中

$$g_{\max}(x) = \max\{g_i(x), i = 1, 2, \cdots, m_1\}$$

$$h_{\max}(x) = \max\{|h_j(x)|, j = 1, 2, \cdots, m_2\}$$

显然, $d(x, Q)$ 反映了点 x 与可行域 Q 的关系信息。如果 $d(x, Q) = 0$, 则表明 $x \in Q$; 如果 $d(x, Q) > 0$, 且 $d(x, Q)$ 越大, 则表明 $x \in Q$ 的性能越差, 即 x 越"远离"可行域 Q。

由于 $\forall i = 1, 2, \cdots, m_1, j = 1, 2, \cdots, m_2$; $g_i(x)$ 和 $h_j(x)$ 为非常数, $\forall i = 1, 2, \cdots, m_1$, $\|\nabla g_i(x)\| \neq 0$, $\forall j = 1, 2, \cdots, m_2$, $\|\nabla h_j(x)\| \neq 0$。则令

$$G_i(x) = \frac{g_i(x)}{\|\nabla g_i(x)\|}, \quad H_j(x) = \frac{|h_j(x)|}{\|\nabla h_j(x)\|}$$

$$G_{\max}(x) = \max\{0, G_i(x), i = 1, 2, \cdots, m_1\}$$

$$H_{\max}(x) = \max\{H_j(x), j = 1, 2, \cdots, m_2\}$$

$$k_1 = \arg\{i \mid G_i(x) = G_{\max}(x), i = 1, 2, \cdots, m_1\}$$

$$k_2 = \arg\{j \mid H_j(x) = H_{\max}(x), j = 1, 2, \cdots, m_2\}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{DSFD}(x) = {} & G_{\max}(x)\nabla g_{k_1}(x) + \\ & \mathrm{sgn}(h_{k_2}(x)) H_{\max}(x) \nabla h_{k_2}(x) \end{aligned} \tag{2}$$

显然, 如果 $G_{\max}(x) = H_{\max}(x) = 0$, 则 $x \in Q$, $\mathrm{DSFD}(x) = 0$。

定义 2 非零向量 $-\mathrm{DSFD}(x)$ 为非可行点 x 的主导准可行方向。

定义 3 非零向量 z 在点 $x \notin Q$ "指向"可行域, 如果满足 $z^T(-\mathrm{DSFD}(x)) > 0$。

定义 4 非零向量 z 在点 $x \notin Q$ "远离"可行域, 如果满足 $z^T(-\mathrm{DSFD}(x)) \le 0$。

定义 5 非零向量 z 在点 $x \notin Q$ 是准可行方向, 如果 z 在点 $x \notin Q$ "指向"可行域。

显然, 主导准可行方向是准可行方向。

定义 6 非可行点 $x \notin Q$ 的准可行方向的可行度

$$\mathrm{FD}_1(x) = -D(x)^T \mathrm{DSFD}(x)$$

其中 $D(x)$ 是权重梯度方向, 由式(8) 定义。

显然, 准可行方向的可行度未反映出点 x "远离"可行域的程度, 而是权重梯度方向偏离主导准可行方向的度量。

下面用模糊的观点描述非可行点与可行域的关系, 引进非可行点"属于"可行域的可行度概念。

令 $\gamma_i(x)$, $\lambda_j(x)$ 表示 x 满足第 i 个非等式约束/第 j 个等式约束的程度, 定义

$$\gamma_i(x) = \begin{cases} 1, & g_i(x) \le 0 \\ 1 - \dfrac{g_i(x)}{g_{\max}(x)}, & 0 < g_i(x) \le g_{\max}(x) \end{cases} \tag{3}$$

$$\lambda_j(x) = \begin{cases} 1, & h_j(x) = 0 \\ 1 - \dfrac{|h_j(x)|}{h_{\max}(x)}, & \text{else} \end{cases} \tag{4}$$

定义 7 非可行点(染色体) x "属于"可行域的可行度

$$\mathrm{FD}_2(x) = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} \gamma_i(x) + \sum_{j=1}^{m_2} \lambda_j(x)}{m_1 + m_2}$$

非可行点可行度 $\mathrm{FD}_2(x)$ 的大小反映了点 x "属于"可行域的程度。可行度越大, 表示突破约束越少, "属于"可行域的希望越高。如果 $\mathrm{FD}_2(x) = 1$, 则点 x 完全属于可行域; 反之, 当且仅当 $\exists x_0 \in E_n$, $g_i(x_0) = g_{\max}(x_0)$, $i = 1, 2, \cdots, m_1$, $h_j(x_0) = h_{\max}(x_0)$, $j = 1, 2, \cdots, m_2$ 时, $\mathrm{FD}_2(x) = 0$, 点 x 完全不属于可行域。当 $0 < \mathrm{FD}_2(x) < 1$ 时, 从精确数学的意义上说, $x \notin Q$; 而从模糊的观点来理解, 表示点 x 隶属于可行域的程度(隶属度)。本文正是利用这一特点来描述和度量非可行点。

基于上述分析, 现在提出度量非可行点(染色体) 的 3 种方法:

1) 嵌入非可行点准可行方向的可行度 FD_1

$$\mathrm{eval}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{(1 + 1/\mathrm{FD}_1(x))^p}, & f(x) \ge 0 \\ f(x) * (1 + 1/\mathrm{FD}_1(x))^p, & f(x) < 0 \end{cases} \tag{5}$$

2) 嵌入非可行点"属于"可行域的可行度 FD_2

$\mathrm{eval}(x) =$

$$\begin{cases}\dfrac{f(x)}{(1+1/FD_2(x))^p}, & f(x)\ge 0\\ f(x)*(1+1/FD_2(x))^p, & f(x)<0\end{cases}\qquad(6)$$

3) 嵌入非可行点“远离”可行域的距离

$$\mathrm{eval}(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{(1+d(x,Q))^p}, & f(x)\ge 0\\ f(x)*(1+d(x,Q))^p, & f(x)<0\end{cases}\qquad(7)$$

其中 $p\ge 1$。从式(5)～(7)可以看出,如果 $x\notin Q$,则通过嵌入非可行点本身的信息构造一个评价函数,使之具有很小的目标函数值,但非零,以便在以后的迭代中有很小的概率被选取作为母体产生子个体。

3　权重梯度方向

对于个体 x,如果 $x\in Q$,则沿目标函数的梯度方向 $\nabla f(x)$ 搜索,可使目标函数得到改进。

如果 $x\notin Q$,则说明 x 不在可行域内。令

$$I^+=\{i\mid g_i(x)>0,i=1,2,\cdots,m_1;x\in E_n\}$$
$$J=\{j\mid h_j(x)\ne 0,j=1,2,\cdots,m_2;x\in E_n\}$$

对于 $i\in I^+$,如果 x 沿负梯度方向 $-\nabla g_i(x)$ 搜索,可使子个体 x 满足 $g_i(x)\le 0$。权重越大,满足 $g_i(x)\le 0$ 的搜索速度越快。类似地,对于 $j\in J$,如果 x 沿方向 $-\mathrm{sgn}(h_j(x))\nabla h_j(x)$ 搜索,可使子个体 x 满足 $h_j(x)=0$。

基于以上思想,构造权重梯度方向,用 $D(x)$ 表示,即

$$D(x)=w_0\nabla f(x)-\sum_{i=1}^{m_1}w_i\nabla g_i(x)-\sum_{j=1}^{m_2}v_j\nabla h_j(x)\qquad(8)$$

其中 w_i 和 v_j 是梯度方向权重。一般地,$w_0=1$,定义 w_i,v_j 为

$$w_i=\begin{cases}0, & g_i(x)\le 0\\ \dfrac{1}{1-\dfrac{G_i(x)}{G_{\max}(x)+\delta}}, & g_i(x)>0\end{cases}\qquad(9)$$

$$v_j=\begin{cases}0, & h_j(x)=0\\ \mathrm{sgn}(h_j(x))*\dfrac{1}{1-\dfrac{|H_j(x)|}{H_{\max}(x)+\delta}}, & \text{else}\end{cases}\qquad(10)$$

其中 δ 是用于调整的很小的正数。对梯度方向和准可行方向,有如下定理:

定理 1　对于 $\forall x\notin Q$

$$z=-\sum_{i=1}^{m_1}w_i\nabla g_i(x)-\sum_{j=1}^{m_2}v_j\nabla h_j(x)$$

是准可行方向。

证明　由于 $x\notin Q$,有如下 3 种情况:

1) $\forall i=1,2,\cdots,m_1,\quad g_i(x)\le 0$
$\exists j\in\{1,2,\cdots,m_2\},\quad h_j(x)\ne 0$

2) $\exists i\in I^+,\quad j\in J$
$g_i(x)>0,\quad h_j(x)\ne 0$

3) $\forall j=1,2,\cdots,m_2,\quad h_j(x)=0$
$\exists i\in\{1,2,\cdots,m_1\},\quad g_i(x)>0$

不失一般性,只需证明情况 1),便可类似地证明其它两种情况。

根据式(9)和(10),$\forall i=1,2,\cdots,m_1,w_i=0$,为简化起见,假设 $\exists j_0,h_{j_0}(x)\ne 0,\forall j\ne j_0,h_j(x)=0$。则

$$z=-v_{j_0}\nabla h_{j_0}(x)$$
$$\mathrm{DSFD}(x)=\mathrm{sgn}(h_{j_0}(x))H_{j_0}(x)\nabla h_{j_0}(x)$$

其中

$$v_{j_0}=\mathrm{sgn}(h_{j_0}(x))*\frac{H_{\max}(x)+\delta}{\delta}$$
$$z^{\mathrm T}(-\mathrm{DSFD}(x))=\frac{H_{j_0}(x)+\delta}{\delta}*H_{j_0}(x)\nabla h_{j_0}(x)^{\mathrm T}\nabla h_{j_0}(x)>0$$

即 z 是准可行方向。

如果 $\exists j_1\ne j_2,h_{j_1}(x)\ne 0,h_{j_2}(x)\ne 0,H_{j_1}(x)>H_{j_2}(h)$,则可通过调整 $\delta=\delta/2$,得到准可行方向。因为 δ 越小,沿 $\nabla h_{j_1}(x)$ 的权重较任何其它 $\nabla h_{j_2}(x)$ 方向的权重越大,$-z$ 越偏向主导准可行方向,因而能确保得到准可行方向。

类似地,可以证明定理 2 对于 $\forall x\notin Q$,按式(8)构造的 $D(x)$ 是准可行方向。

4　GA 基本要素及测试结果

1) 基因表达式:用决策变量 x 的 n 维实向量表示子个体,即染色体 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

2) 初始种群:为了提高搜索速度,依据具体问题,选取每个基因 x_i 的上限(u_i)和下限(l_i),采用均匀分布随机数发生器产生染色体的初始种群。

3) 交叉:交叉操作主要发生在迭代的后期,这时大部分染色体都在可行域内,且都在最优解的邻域内。对于 $x\in Q$ 的一对染色体,以很小的概率 p_c 按算术组合交叉算子进行交叉。

4) 变异: 变异操作是 EGA 的主要操作。$x_i^{(k)}$ 沿权重梯度方向 $D(x_i^k)$ 变异产生子个体 $x_i^{(k+1)}$, 可以描述为

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \beta^{(k)} D(x_i^{(k)})$$

其中 $\beta^{(k)}$ 是均值衰减的 Erlang 分布随机数步长, 由随机数发生器产生。

5) 染色体评价与选择策略: 把非可行染色体的信息嵌入适应性函数, 以度量非可行染色体脱离可行域的程度。选取适应性函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in Q \\ \mathrm{eval}(x), & \text{else} \end{cases}$$

其中 eval(x) 参见式(5) ～(7), 用滚动轮策略选择个体。

6) 停止准则: 根据计算精度的要求, 确定最大的迭代步数 NG。

对具有线性约束和非线性约束、凸目标和非凸目标的测试实例[6] 进行仿真, 其结果表明最好解与问题的最优解之间的误差在 0.1% ～ 12.4%。对 3 种评价函数进行比较, 第 2 种和第 3 种方法效果明显。另外, 步长 β^k 的初值和 p 的选取对算法有效性的影响, 还有待于进一步研究。

5 结 论

本文针对具有等式约束和非等式约束的非线性规划问题, 提出 3 种改进的评价非可行染色体的新方法。基于新的评价函数, 提出了改进的遗传算法(EGA)。通过对测试问题的实例计算和仿真分析, 表明了 EGA 算法的有效性。

参 考 文 献

1 Fred Glover. Genetic algorithm and Tabu search: Hybrid for optimizations. Computers & Operations Research, 1995, 22: 111～134

2 Michalewicz Z. A survey of constraint handling techniques in evolutionary computation methods. In: Evolutionary Programming IV. MIT Press, 1995. 135～155

3 Takao Y, Mitsuo G, Takeaki T *et al*. A method for interval 0-1 number non-linear programming problems using genetic algorithm. Computers & Industrial Engineering, 1995, 29: 531～535

4 Li Y, M Gen. Non-linear mixed integer programming problems using genetic algorithm and penalty function. In: Proc of 1996 IEEE Int Conf on SMC. Beijing, 1996. 2677～2682

5 Bazaraa M S, L M Shetty. Non-linear programming: Theory and algorithms. New York: John Wiley & Sons, 1985

6 Tang J, Wang D. A hybrid genetic algorithm for a type of nonlinear programming problems. Computers & Mathematics with Applications, 1998, 36(5): 11～21

7 唐加福, 汪定伟, 高振, 等. 面向非线性规划问题的混合式遗传算法. 自动化学报, 2000, 26(3): 401～404

作 者 简 介

唐加福 男, 1965 年生。1999 年于东北大学控制理论与控制工程专业获工学博士学位, 1998 年在香港城市大学作访问学者, 现为东北大学系统工程系副教授。研究方向为 fuzzy 优化理论与方法, 智能化优化方法。

汪定伟 男, 1948 年生。1993 年于东北大学自动控制理论及应用专业获工学博士学位, 1994 年在美国北卡州大学作博士后研究工作, 现为东北大学系统工程系教授, 博士生导师。研究方向为 CIMS 中生产存储管理的建模, 优化与控制, 软计算方法等。

许宝栋 男, 1943 年生。东北大学系统工程系教授。主要研究方向为多目标决策理论方法及应用, CIMS, DSS, MIS 构造及应用等。

李 露 女, 1962 年生。1985 年毕业于东北大学, 现为东北大学信息科学与工程学院工程师。研究方向为计算机管理信息系统。