第19卷 第2期 控 制 与 决 策 2004年2月
Vol 19 No. 2 Control and Decision Feb. 2004

文章编号: 1001-0920(2004)02-0147-06

参数摄动系统的鲁棒H∞状态估计

高会军, 王常虹
(哈尔滨工业大学 惯导测试设备研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 基于Shaked提出的参数依赖型有界实引理, 研究具有凸多面体参数摄动系统的鲁棒H_∞状态估计问题. 采用线性矩阵不等式技术, 推导出此类不确定系统的全阶鲁棒H_∞滤波器存在的充分条件, 并将滤波器的设计转化为一个凸优化的求解问题. 与传统的基于二次稳定的滤波方案相比, 该滤波器设计方法具有较小的保守性.

关键词: H_∞滤波; 线性矩阵不等式; 有界实引理
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Robust H∞ state estimation for systems with uncertain parameters

GAO Hui-jun, WANG Chang-hong
(Inertial Navigation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: GAO Hui-jun, E-mail: Huijungao@sohu.com)

Abstract: The problem of robust H_∞ filtering for systems with uncertain parameters residing in a polytope is discussed based on the parameter-dependent bounded real lemma proposed by Shaked. By means of linear matrix inequality technique, the existence condition for the full-order robust H_∞ filters is derived. The filter design is transformed into a convex optimization problem in terms of linear matrix inequality, which can be solved via efficient interior point algorithms. The proposed filter design procedure is much less conservative than earlier result that is based on the quadratic stability notion.

Key words: H_∞ filtering; linear matrix inequality; bounded real lemma

1 引 言

卡尔曼滤波是线性估计理论中较为重要的方法之一, 该方法建立在精确的数学模型基础上, 并假设噪声输入为严格的高斯过程或高斯序列. 然而实际问题往往不能满足这两个条件, 经常导致滤波发散. 近年来, 国内外学者针对这一问题进行了大量研究, 提出一系列有效的滤波算法[1~8]. 鲁棒H_∞滤波[1~5]综合考虑了这两方面的不确定性, 其主要思想是针对具有不确定性的系统模型设计稳定的滤波器, 并使噪声输入到估计误差的衰减水平(H_∞范数)小于给定值. 鲁棒H_∞滤波主要有基于代数黎卡提(ARE)[1,2]和线性矩阵不等式(LMI)[3~5]两种方法. 采用ARE方法得到的结果常包含一些需要调整的参数, 而基于LMI的研究方法正受到越来越多的关注. 文献[3,4]针对一类具有凸多面体参数不确定性的系统, 提出了基于凸优化的鲁棒H_∞滤波方法. 但其滤波器设计是建立在二次稳定概念基础上, 即要求对于所有允许的不确定参数, 系统存在一个统一的Lyapunov函数. 显然, 这样的要求比较苛刻, 由此导出的结果必然具有较大的保守性. 为此, 不少学者进行了参数依赖型Lyapunov函数的研究, 试图寻找和系统的不确定性相关联的Lyapunov函数,

收稿日期: 2003-01-14; **修回日期**: 2003-04-09.
作者简介: 高会军(1976—), 男, 黑龙江集县人, 博士生, 从事鲁棒控制、滤波、时滞系统等研究; 王常虹(1961—), 男, 辽宁沈阳人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制和鲁棒控制等研究.

以减小设计的保守性[9~11].

本文将文献[9]的思想应用于滤波器的设计,研究凸多面体不确定连续系统的鲁棒H_∞滤波问题. 文中采用LMI技术,基于Shaked提出的参数依赖型有界实引理[11],推导出此类不确定系统的全阶鲁棒H_∞滤波器存在的充分条件,并将滤波器的设计转化为一个凸优化的求解问题. 由于滤波器的设计建立在参数依赖型的性能准则基础上,与传统的基于二次稳定的滤波方法[3,4]相比,本文所得结果具有较小的保守性,同时算例也验证了该滤波器设计方法的可行性.

2 问题描述

考虑如下线性连续时间系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B\omega(t), \\ y(t) = Cx(t) + D\omega(t), \\ z(t) = Lx(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中:$x(t) \in R^n$为状态变量,$\omega(t) \in R^q$为噪声输入,$y(t) \in R^m$为测量输出,$z(t) \in R^p$为要估计的信号. 假设不确定性系统矩阵可以表达为若干个顶点矩阵的凸组合,即

$$M \doteq (A, B, C, D, L) \in \mathbf{R},$$

$$\mathbf{R} \doteq \Big\{(A, B, C, D, L) \,\Big|\, (A, B, C, D, L) = \sum_{i=1}^{k} \tau_i (A_i, B_i, C_i, D_i, L_i);\ \tau_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{k} \tau_i = 1\Big\}. \tag{2}$$

构造如下形式的全阶滤波器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_F \hat{x}(t) + B_F y(t), \\ \hat{z}(t) = C_F \hat{x}(t), \end{cases} \tag{3}$$

取状态变量$\xi(t) \doteq \{x(t)^{\mathrm{T}}, \hat{x}(t)^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}$,则滤波误差系统方程为

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = \bar{A}\xi(t) + \bar{B}\omega(t), \\ e(t) = \bar{C}\xi(t). \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_F C & A_F \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ B_F D \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = [L \quad -C_F], e(t) \doteq z(t) - \hat{z}(t).$$

于是噪声信号$\omega(t)$到估计误差信号$e(t)$的传递函数为

$$T(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B}. \tag{5}$$

定义 1[3,4] 式(5)中传递函数$T(s)$的H_∞范数定义为

$$\| T(s) \|_\infty \doteq \sup_{0 \neq \omega \in L_2} \frac{\| e \|_{L_2}}{\| \omega \|_{L_2}}.$$

其中

$$\| e \|_{L_2} = \Big(\int_0^\infty \| e(t) \|_2^2 \mathrm{d}t\Big)^{1/2},$$

$$\| \omega \|_{L_2} = \Big(\int_0^\infty \| \omega(t) \|_2^2 \mathrm{d}t\Big)^{1/2}.$$

本文要研究的问题是,在系统矩阵(A, B, C, D, L)满足式(2)的情况下,求出滤波器参数矩阵(A_F, B_F, C_F),使系统(4)稳定,并使噪声信号$\omega(t)$到滤波误差$e(t)$的传递函数的H_∞范数小于给定的$\gamma(\gamma > 0)$,即$\| T(s) \|_\infty < \gamma$.

注 1 针对多面体不确定系统的特点,下文中每一问题的阐述都将采用如下顺序:先阐述$M \in \mathbf{R}$为任意确定性常值矩阵的情形,然后由所得线性矩阵不等式的仿射特性将其推广到不确定系统,这种思路对此类不确定系统具有一般性.

3 主要引理

引理 1[12] 考虑系统(1),假定$M \in \mathbf{R}$为任意确定性常值矩阵,则滤波误差系统(4)稳定且$\| T(s) \|_\infty < \gamma(\gamma > 0)$的充要条件为:存在矩阵$P = P^{\mathrm{T}} > 0, P \in R^{2n \times 2n}$满足

$$\begin{bmatrix} P\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}P & P\bar{B} & \bar{C}^{\mathrm{T}} \\ * & -I & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

其中“*”代表对应块的转置矩阵.

引理1为针对确定性系统的有界实引理,由Schur补引理及凸多面体不确定系统的内在特性,很容易得到不确定系统的鲁棒H_∞性能准则.

推论 1 考虑系统(1),设$M \in \mathbf{R}$代表不确定系统矩阵,则系统(4)稳定且$\| T(s) \|_\infty < \gamma(\gamma > 0)$的充分条件为:存在矩阵$P = P^{\mathrm{T}} > 0, P \in R^{2n \times 2n}$满足

$$\begin{bmatrix} P\bar{A}_i + \bar{A}_i^{\mathrm{T}}P & P\bar{B}_i & \bar{C}_i^{\mathrm{T}} \\ * & -I & 0 \\ * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\forall i = 1, 2, \cdots, k. \tag{7}$$

其中$(\bar{A}_i, \bar{B}_i, \bar{C}_i)$为系统(4)的顶点矩阵,可由系统(1)的顶点矩阵和滤波器矩阵求出.

推论1为基于二次稳定概念的凸多面体不确定系统的有界实引理,要求对于系统的所有不确定参数,存在统一的正定矩阵P满足以上条件. 文献[11]通过将系统矩阵与Lyapunov矩阵分离给出了一个具有较小保守性的参数依赖型有界实引理.

引理 2[11] 考虑系统(1),假定$M \in \mathbf{R}$为任意确定性常值矩阵,则滤波误差系统(4)稳定且

$\| T(s) \|_\infty < \gamma (\gamma > 0)$ 的充要条件为: 对于 $0 < \epsilon \ll 1$, 存在矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} > 0, P \in R^{2n \times 2n}$ 及矩阵 $G \in R^{2n \times 2n}$ 满足

$$\begin{bmatrix} P - G^{\mathrm{T}} - G & G^{\mathrm{T}} + \epsilon G^{\mathrm{T}} \bar{A}^{\mathrm{T}} & 0 & G^{\mathrm{T}} \bar{C}^{\mathrm{T}} \\ * & -P & \bar{B} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 \epsilon^{-1} I & 0 \\ * & * & * & -\epsilon^{-1} I \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

推论 2　考虑系统(1), 设 $M \in \mathbf{R}$ 代表不确定系统矩阵, 则系统(4) 稳定且 $\| T(s) \|_\infty < \gamma (\gamma > 0)$ 的充分条件为: 对于 $0 < \epsilon \ll 1$, 存在矩阵 $P_i = P_i^{\mathrm{T}} > 0, P_i \in R^{2n \times 2n} (i = 1, 2, \cdots, k)$ 及矩阵 $G \in R^{2n \times 2n}$ 满足

$$\begin{bmatrix} P_i - G^{\mathrm{T}} - G & G^{\mathrm{T}} + \epsilon G^{\mathrm{T}} \bar{A}_i^{\mathrm{T}} & 0 & G^{\mathrm{T}} \bar{C}_i^{\mathrm{T}} \\ * & -P_i & \bar{B}_i & 0 \\ * & * & -\gamma^2 \epsilon^{-1} I & 0 \\ * & * & * & -\epsilon^{-1} I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\forall i = 1, 2, \cdots, k. \tag{9}$$

注 2　对于确定性系统而言, 引理 1 和引理 2 是等价的, 其差别仅在于引理 2 通过引入一个附加矩阵 G, 消除了引理 1 中 Lyapunov 函数与系统矩阵之间的耦合, 即引理 2 中不再含有正定矩阵 P 与系统矩阵的乘积项, 这使得当将其应用于凸多面体不确定系统时可以得到和系统不确定性相关联的 Lyapunov 函数, 即对于凸多面体的每个顶点 i 允许有不同的正定矩阵 P_i 满足要求(见推论 2), 这是与传统的二次稳定条件(见推论 1) 的主要区别, 类似的处理方法见文献[9～11].

通过解除 Lyapunov 矩阵和系统矩阵之间的耦合来减小设计的保守性的思想最早在文献[9] 中提出, 但受线性矩阵不等式特点的限制, 该方法只能应用于不确定离散系统. 随后文献[11] 借助投影定理将这种思想扩展到连续系统, 提出了与文献[9] 具有相同特性的稳定条件, 但该条件仍具有一定的局限性, 无法应用于鲁棒 H_∞ 性能问题. 文献[11] 则将这种思想继续扩展到连续系统的 H_∞ 性能问题.

4　主要结果

文献[3, 4] 给出了系统(1) 基于引理 1 的鲁棒 H_∞ 滤波器的设计方法, 下面将推导系统(1) 基于引理 2 的鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件.

首先考虑系统(1) 中 $M \in \mathbf{R}$ 代表任意确定性常值矩阵. 由引理 2 知, 保证滤波误差系统(4) 稳定且 $\| T(s) \|_\infty < \gamma (\gamma > 0)$ 的充要条件为: 对于 $0 < \epsilon \ll 1$, 存在矩阵 $P = P^{\mathrm{T}} > 0, P \in R^{2n \times 2n}$ 及矩阵 $G \in R^{2n \times 2n}$ 满足线性矩阵不等式(8).

由式(8) 有 $G^{\mathrm{T}} + G > 0$, 则 G 可逆. 将 G, G^{-1} 及 P 表示为分块矩阵的形式, 即

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}, G^{-1} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22} \end{bmatrix},$$

则有下式成立:

$$GG^{-1} = \begin{bmatrix} G_{11} S_{11} + G_{12} S_{21} & G_{11} S_{12} + G_{12} S_{22} \\ G_{21} S_{11} + G_{22} S_{21} & G_{21} S_{12} + G_{22} S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$G^{-1} G = \begin{bmatrix} S_{11} G_{11} + S_{12} G_{21} & S_{11} G_{12} + S_{12} G_{22} \\ S_{21} G_{11} + S_{22} G_{21} & S_{21} G_{12} + S_{22} G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{10}$$

不失一般性, 假设 G_{21} 和 S_{21} 为可逆方阵[13]. 引入矩阵

$$J_G \doteq \begin{bmatrix} G_{11} & I \\ G_{21} & 0 \end{bmatrix}, J_S \doteq \begin{bmatrix} I & S_{11} \\ 0 & S_{21} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

则 J_G, J_S 可逆, 且有关系式 $G^{-1} J_G = J_S, G J_S = J_G$.

定义

$$\hat{P} \doteq \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \hat{P}_{22} \end{bmatrix} = J_s^{\mathrm{T}} P J_s,$$

$$J_1 \doteq \mathrm{diag}\{J_s, J_s, I, I\}.$$

用 J_1^{T} 左乘、J_1 右乘不等式(8), 可得

$$\begin{bmatrix} J_s^{\mathrm{T}} (P - G^{\mathrm{T}} - G) J_s & J_s^{\mathrm{T}} (G^{\mathrm{T}} + \epsilon G^{\mathrm{T}} \bar{A}^{\mathrm{T}}) J_s & 0 & J_s^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} \bar{C}^{\mathrm{T}} \\ * & -J_s^{\mathrm{T}} P J_s & J_s^{\mathrm{T}} \bar{B} & 0 \\ * & * & -\gamma^2 \epsilon^{-1} I & 0 \\ * & * & * & -\epsilon^{-1} I \end{bmatrix} < 0,$$

代入矩阵变量可得

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_{11} - G_{11}^{\mathrm{T}} - G_{11} & \begin{bmatrix} \hat{P}_{12} - I - \\ G_{11}^{\mathrm{T}} S_{11} - G_{21}^{\mathrm{T}} S_{21} \end{bmatrix} & G_{11}^{\mathrm{T}} (I + \epsilon A^{\mathrm{T}}) & \begin{bmatrix} G_{11}^{\mathrm{T}} (I + \epsilon A^{\mathrm{T}}) S_{11} + \epsilon G_{21}^{\mathrm{T}} A_F^{\mathrm{T}} S_{21} + \\ \epsilon G_{11}^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} B_F^{\mathrm{T}} S_{21} + G_{21}^{\mathrm{T}} S_{21} \end{bmatrix} & 0 & G_{11}^{\mathrm{T}} L^{\mathrm{T}} - G_{21}^{\mathrm{T}} C_F^{\mathrm{T}} \\ * & \hat{P}_{22} - S_{11}^{\mathrm{T}} - S_{11} & I + \epsilon A^{\mathrm{T}} & \epsilon A^{\mathrm{T}} S_{11} + \epsilon C^{\mathrm{T}} B_F^{\mathrm{T}} S_{21} + S_{11} & 0 & L^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\hat{P}_{11} & -\hat{P}_{12} & B & 0 \\ * & * & * & -\hat{P}_{22} & S_{11}^{\mathrm{T}} B + S_{21}^{\mathrm{T}} B_F D & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2 \epsilon^{-1} I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon^{-1} I \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

由不等式(12) 有 $G_{11} + G_{11}^{\mathrm{T}} > 0$, 则 G_{11} 可逆, 定义 $J_2 \doteq \mathrm{diag}\{G_{11}^{-1}, I, G_{11}^{-1}, I, I, I\}$, 用 J_2^{T} 左乘, J_2 右乘不等式(12), 得

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} - G_{11}^{-\mathrm{T}} - G_{11}^{-1} & \begin{bmatrix} \bar{P}_{12} - G_{11}^{-\mathrm{T}} - \\ S_{11} - G_{11}^{-\mathrm{T}}G_{21}^{\mathrm{T}}S_{21} \end{bmatrix} & \epsilon A^{\mathrm{T}}G_{11}^{-1} + G_{11}^{-1} & \begin{bmatrix} \epsilon A^{\mathrm{T}}S_{11} + S_{11} + G_{11}^{-\mathrm{T}}G_{21}^{\mathrm{T}}S_{21} + \\ \epsilon C^{\mathrm{T}}B_F^{\mathrm{T}}S_{21} + \epsilon G_{11}^{-\mathrm{T}}G_{21}^{\mathrm{T}}A_F^{\mathrm{T}}S_{21} \end{bmatrix} & 0 & L^{\mathrm{T}} - G_{11}^{-\mathrm{T}}G_{21}^{\mathrm{T}}C_F^{\mathrm{T}} \\ * & \bar{P}_{22} - S_{11}^{\mathrm{T}} - S_{11} & G_{11}^{-1} + \epsilon A^{\mathrm{T}}G_{11}^{-1} & \epsilon A^{\mathrm{T}}S_{11} + \epsilon C^{\mathrm{T}}B_F^{\mathrm{T}}S_{11} + S_{11} & 0 & L^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\bar{P}_{11} & -\bar{P}_{12} & G_{11}^{-\mathrm{T}}B & 0 \\ * & * & * & -\bar{P}_{22} & S_{11}^{\mathrm{T}}B + S_{21}^{\mathrm{T}}B_FD & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2\epsilon^{-1}I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon^{-1}I \end{bmatrix} < 0, \tag{13}$$

$$\bar{P} \doteq \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^{-\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} \\ \hat{P}_{12}^{\mathrm{T}} & \hat{P}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \tag{14}$$

定义如下矩阵变量:

$$R \doteq G_{11}^{-1}, F \doteq S_{11}, U \doteq S_{21}^{\mathrm{T}}G_{21}R, \bar{A}_F \doteq S_{21}^{\mathrm{T}}A_FG_{21}R, \bar{B}_F \doteq S_{21}^{\mathrm{T}}B_F, \bar{C}_F \doteq C_FG_{21}R. \tag{15}$$

将式(15) 代入矩阵不等式(13) 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{11} - R^{\mathrm{T}} - R & \bar{P}_{12} - R^{\mathrm{T}} - F - U^{\mathrm{T}} & \epsilon A^{\mathrm{T}}R + R & \begin{bmatrix} \epsilon A^{\mathrm{T}}F + \epsilon C^{\mathrm{T}}\bar{B}_F^{\mathrm{T}} + \\ \epsilon\bar{A}_F^{\mathrm{T}} + F + U^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} & 0 & L^{\mathrm{T}} - \bar{C}_F^{\mathrm{T}} \\ * & \bar{P}_{22} - F^{\mathrm{T}} - F & \epsilon A^{\mathrm{T}}R + R & \epsilon A^{\mathrm{T}}F + \epsilon C^{\mathrm{T}}\bar{B}_F^{\mathrm{T}} + F & 0 & L^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\bar{P}_{11} & -\bar{P}_{12} & R^{\mathrm{T}}B & 0 \\ * & * & * & -\bar{P}_{22} & F^{\mathrm{T}}B + \bar{B}_FD & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2\epsilon^{-1}I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon^{-1}I \end{bmatrix} < 0. \tag{16}$$

总结以上推导, 可得如下定理:

定理 1 考虑系统(1), 设 $M \in \mathbf{R}$ 为任意确定性常值矩阵, 则保证滤波误差系统(4) 稳定且 $\|T(s)\| < \gamma(\gamma > 0)$ 的滤波器(3) 存在的充要条件为: 对于 $0 < \epsilon \ll 1$, 存在矩阵 $\bar{P}_{11} = \bar{P}_{11}^{\mathrm{T}} > 0, \bar{P}_{11} \in R^{n\times n}, \bar{P}_{22} = \bar{P}_{22}^{\mathrm{T}} > 0, \bar{P}_{22} \in R^{n\times n}, \bar{P}_{12} \in R^{n\times n}, R \in R^{n\times n}, F \in R^{n\times n}, U \in R^{n\times n}, \bar{A}_F \in R^{n\times n}, \bar{B}_F \in R^{n\times m}, \bar{C}_F \in R^{p\times n}$ 满足线性矩阵不等式(16).

将定理 1 推广到凸多面体不确定系统, 可得系统(1) 鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件:

推论 3 考虑系统(1), 设 $M \in \mathbf{R}$ 代表不确定性矩阵, 则保证滤波误差系统(4) 稳定且 $\|T(s)\|_\infty < \gamma(\gamma > 0)$ 的滤波器(3) 存在的充分条件为: 对于 $0 < \epsilon \ll 1$, 存在矩阵 $\bar{P}_{11i} = \bar{P}_{11i}^{\mathrm{T}} > 0, \bar{P}_{11i} \in R^{n\times n}, \bar{P}_{22i} = \bar{P}_{22i}^{\mathrm{T}} > 0, \bar{P}_{22i} \in R^{n\times n}, \bar{P}_{12i} \in R^{n\times n}, i = 1, 2, \cdots, k, R \in R^{n\times n}, F \in R^{n\times n}, U \in R^{n\times n}, \bar{A}_F \in R^{n\times n}, \bar{B}_F \in R^{n\times m}, \bar{C}_F \in R^{p\times n}$ 满足如下线性矩阵不等式组:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_{11i} - R^{\mathrm{T}} - R & \bar{P}_{12i} - R^{\mathrm{T}} - F - U^{\mathrm{T}} & \epsilon A_i^{\mathrm{T}}R + R & \begin{bmatrix} \epsilon A_i^{\mathrm{T}}F + \epsilon C_i^{\mathrm{T}}\bar{B}_F^{\mathrm{T}} + \\ \epsilon\bar{A}_F^{\mathrm{T}} + F + U^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} & 0 & L_i^{\mathrm{T}} - \bar{C}_F^{\mathrm{T}} \\ * & \bar{P}_{22i} - F^{\mathrm{T}} - F & \epsilon A_i^{\mathrm{T}}R + R & \epsilon A_i^{\mathrm{T}}F + \epsilon C_i^{\mathrm{T}}\bar{B}_F^{\mathrm{T}} + F & 0 & L_i^{\mathrm{T}} \\ * & * & -\bar{P}_{11i} & -\bar{P}_{12i} & R^{\mathrm{T}}B_i & 0 \\ * & * & * & -\bar{P}_{22i} & F^{\mathrm{T}}B_i + \bar{B}_FD_i & 0 \\ * & * & * & * & -\gamma^2\epsilon^{-1}I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\epsilon^{-1}I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\forall i = 1, 2, \cdots, k. \tag{17}$$

注 3 推论 3 将系统(1) 的鲁棒 H_∞ 滤波器存在的充分条件转化为一个线性矩阵不等式组的可解性问题. 若式(17) 具有可行解, 则系统(1) 存在形如式(3) 的鲁棒 H_∞ 滤波器. 此时由式(17) 有

$$\begin{bmatrix} R^{\mathrm{T}} + R & F + R^{\mathrm{T}} + U^{\mathrm{T}} \\ * & F^{\mathrm{T}} + F \end{bmatrix} > 0, \tag{18}$$

显然 U 可逆; 否则存在向量 $x \neq 0$, 满足 $Ux = 0$, 则有

$$[x^T \quad -x^T]\begin{bmatrix} R^T + R & R^T + F + U^T \\ * & F^T + F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = 0,$$

这与式(18) 矛盾, 因此矩阵 U 非奇异. 又由 R 非奇异, 可得 UR^{-1} 可逆. 于是由 $UR^{-1} = S_{21}^T G_{21}$, 可保证分解出非奇异方阵 S_{21} 和 G_{21}[13]. 此时由式(15) 可唯一构造出滤波器矩阵 (A_F, B_F, C_F) 为

$$A_F = S_{21}^{-T}\bar{A}_F R^{-1}G_{21}^{-1}, B_F = S_{21}^{-T}\bar{B}_F,$$
$$C_F = \bar{C}_F R^{-1}G_{21}^{-1}. \tag{19}$$

式(19) 给出了构造滤波器(3) 参数矩阵的方法. 因该方法所需的矩阵变量 S_{21} 和 G_{21} 并未直接包含在线性矩阵不等式组(17) 中, 下面给出一种更为简便的方法. 首先将滤波器(3) 从 $y(t)$ 到 $\hat{z}(t)$ 的传递函数表示为

$$T_{\hat{z}y} = C_F(sI - A_F)^{-1}B_F,$$

将滤波器的参数矩阵(19) 代入上式并考虑关系式 $U = S_{21}^T G_{21} R$, 可得

$$T_{\hat{z}y} =$$
$$\bar{C}_F R^{-1}G_{21}^{-1}(sI - S_{21}^{-T}\bar{A}_F R^{-1}G_{21}^{-1})^{-1}S_{21}^{-T}\bar{B}_F =$$
$$\bar{C}_F(sS_{21}^T G_{21}R - \bar{A}_F)^{-1}\bar{B}_F =$$
$$\bar{C}_F(sI - U^{-1}\bar{A}_F)^{-1}U^{-1}\bar{B}_F.$$

由此可知, 满足要求的滤波器参数矩阵亦可由下式给出:

$$A_F = U^{-1}\bar{A}_F, B_F = U^{-1}\bar{B}_F, C_F = \bar{C}_F, \tag{20}$$

而式(20) 中构造滤波器参数矩阵所需的矩阵变量全部包含在式(17) 中.

注 4　对于给定的 $0 < \epsilon \ll 1$, 式(17) 不仅是关于矩阵变量, 也是关于标量 γ^2 的线性矩阵不等式组. 因此可将 γ^2 作为一个优化变量来得到最优扰动衰减水平, 即可通过求解如下的凸优化问题来设计系统(1) 的最优全阶鲁棒 H_∞ 滤波器.

$$\min_{\bar{P}_{11i}, \bar{P}_{12i}, \bar{P}_{22i}, R, F, \bar{A}_F, \bar{B}_F, \bar{C}_F, \delta} \delta,$$
$$\text{s.t. 式(17)}, \delta \doteq \gamma^2, 0 < \epsilon \ll 1. \tag{21}$$

则最优扰动衰减水平为 $\gamma^* = \sqrt{\delta^*}$, δ^* 为 δ 的最优值, 且满足要求的滤波器参数矩阵可由式(20) 求出.

5　算　　例

考虑如下二阶线性不确定连续系统[6]:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 + 0.3\alpha \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\omega(t),$$
$$y(t) = [-100 \quad 100]x(t) + [0 \quad 1]\omega(t),$$
$$z(t) = [1 \quad 0]x(t),$$

其中 α 为不确定参数且满足 $-1 \leq \alpha \leq 1$.

采用文献[3, 4] 提出的鲁棒 H_∞ 滤波器设计方法, 可得最优 γ 值为 5.461 1 及相应的滤波器参数矩阵为

$$A_F = 10^6 \times \begin{bmatrix} 1.123\,4 & -1.123\,4 \\ 1.129\,9 & -1.129\,9 \end{bmatrix},$$
$$B_F = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.123\,4 \\ 1.129\,9 \end{bmatrix}, C_F = [1 \quad 0.999\,3]. \tag{22}$$

通过求解式(21) 所示的凸优化问题设计此系统的鲁棒 H_∞ 滤波器, 对于 $\epsilon = 0.01$ 可得最优 γ 值为 5.401 2 以及相应的滤波器参数矩阵为

$$A_F = 10^3 \times \begin{bmatrix} 4.508\,0 & -4.508\,9 \\ 4.668\,9 & -4.668\,5 \end{bmatrix},$$
$$B_F = \begin{bmatrix} 45.077\,7 \\ 46.680\,1 \end{bmatrix}, C_F = [1 \quad 0.999\,5]. \tag{23}$$

由此可见, 采用本文方法可以获得较低的最优扰动衰减指标.

下面对滤波误差系统的 H_∞ 扰动衰减特性作以简要分析. 图 1 给出了由以上两种滤波器构成的滤波误差系统在 α 取不同值时的 H_∞ 扰动衰减性能指标. 图中曲线(其中: ① 为文献[3, 4] 的二次稳定方法, ② 为本文方法) 的计算方法为: 令 α 在区间 $[-1, 1]$ 上取值, 逐点采用引理 1 计算滤波误差系统的 H_∞ 扰动衰减性能指标. 由图可见, 两种方法设计出的滤波器均能保证滤波误差系统的 H_∞ 范数小于所设计的指标.

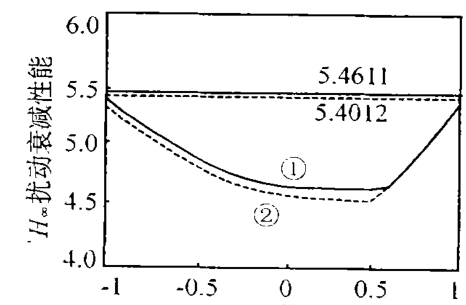

图 1　滤波误差系统的 H_∞ 扰动衰减性能指标

6　结　　语

本文在 Shaked 提出的参数依赖型有界实引理的基础上, 研究了具有凸多面体参数摄动系统的鲁棒 H_∞ 滤波器的设计方法. 文献[10] 指出, 通过将系统矩阵和 Lyapunov 矩阵分离来构造参数依赖型 Lyapunov 函数的方法在多目标设计中具有明显的优点. 如何将参数依赖稳定性的思想引入具有极点

约束以及其他性能指标约束的多目标滤波器设计中, 从而得出具有较小保守性的滤波器设计方法是有待于进一步研究的课题

参考文献(References):

[1] De Souza C E, Shaked U, Fu M. Robust H_∞ filter for continuous time varying uncertain systems with deterministic input signals[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1995, 43(3): 709-719.

[2] Fu M, De Souza C E, Xie L. H_∞ estimation for uncertain systems[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 1992, 2(1): 87-105.

[3] Jin S H, Park J B. Robust H_∞ filter for polytopic uncertain systems via convex optimization[J]. *IEE Proc——Control Theory and Applications*, 2001, 148(1): 55-59.

[4] Palhares R M, Peres P L D. Robust H_∞ filtering design with pole placement constraint via linear matrix inequalities[J]. *J of Optimization Theory and Applications*, 1999, 102(2): 239-261.

[5] Li H, Fu M. A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1997, 45(9): 2338-2350.

[6] Geromel J C. Optimal linear filtering under parameter uncertainty[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1999, 47(1): 168-175.

[7] Gao H, Wang C. Robust L_2-L_∞ filtering for uncertain systems with multiple time-varying state delays[J]. *IEEE Trans on Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*, 2003, 50(4): 594-599.

[8] 高会军, 王常虹. 不确定离散系统的鲁棒 l_2-l_∞ 及 H_∞ 滤波新方法[J]. 中国科学, 2003, 33(8): 695-706.
(Gao H J, Wang C H. New approaches to robust l_2-l_∞ and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems[J]. *Science in China (Series E)*, 2003, 333(8): 695-706.)

[9] De Oliveira M C, Bernussou J, Geromel J C. A new discrete-time robust stability condition[J]. *Systems and Control Letters*, 1999, 37(2): 261-265.

[10] Apkarian P, Tuan H D, Bernussou J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(12): 1941-1946.

[11] Shaked U. Improved LMI representations for the analysis and the design of continuous-time systems with polytopic type uncertainty[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(4): 652-656.

[12] Xie L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. *Int J of Control*, 1996, 63(4): 741-750.

[13] Scherer C, Gahinet P, Chilali M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1997, 42(7): 896-911.

(上接第 146 页)

参考文献(References):

[1] Bashir H A, Thomson V. Models for estimating design effort and time[J]. *Design Studies*, 2001, 22(2): 141-155.

[2] Griffin A. Modeling and measuring product development cycle time across industries[J]. *J of Engineering and Technology Management*, 1997, 14(1): 1-24.

[3] Zirger B J, Hartley J L. The effect of acceleration techniques on product development time[J]. *IEEE Trans on Engineering Management*, 1996, 43(2): 143-151.

[4] Prasad B. Review of QFD and related deployment techniques[J]. *J of Manufacturing System*, 1998, 17(3): 221-234.

[5] Gupta M M, Rao D H. On the principles of fuzzy neural networks[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1994, 61(1): 1-18.

[6] Bezdek J C. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*[M]. New York: Plenum Press, 1981.

[7] 丛爽. 面向MATLAB 工具箱的神经网络理论与应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998. 45-71.