第 18 卷 第 5 期
Vol. 18 No. 5

控 制 与 决 策
Control and Decision

2003 年 9 月
Sept. 2003

文章编号: 1001-0920(2003)05-0555-04

一类具有输入饱和的组合系统的半全局分散镇定

翟 丁, 张庆灵, 陈跃鹏
(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘 要: 研究具有输入饱和组合系统在分散线性状态反馈控制作用下半全局镇定问题。首先给出饱和函数和 M 矩阵的定义和性质;然后指出所研究的问题是寻找一个分散状态反馈,使得第 i 阶闭环子系统和完全闭环系统在给定条件下一致渐近稳定;进而运用 M 矩阵理论,给出了比较简单的具有输入饱和对称组合系统分散半全局镇定的充分条件。

关键词: 分散控制; 组合系统; 输入饱和; 半全局镇定
中图分类号: TP13 文献标识码: A

Semiglobal decentralized stabilization for a class of composite systems with input saturation

ZHAI Ding, ZHANG Qing-ling, CHEN Yue-peng
(College of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

Abstract: The problem of semiglobal stabilization for composite systems with input saturation is discussed by using decentralized linear state feedback control. After giving the definition of saturation function and M-matrix with their properties, the problem of finding a decentralized linear state feedback to make the ith closed-loop subsystem and the overall colsed-loop system uniformly asymptotically stable is presented. Finally, by M-matrix theory a simpler sufficient condition for the symmetric composite system with input saturation to be semiglobally decentralized stabilized is obtained.

Key words: Decentralized control; Composite system; Input saturation, Semiglobal stabilization

1 引 言

近年来,针对组合系统镇定问题的研究已取得了一些结果[1,2]。输入饱和是控制系统的一个普遍特征,为此许多学者研究了具有输入饱和的控制系统。Sussmann[3] 用非线性反馈研究了一类线性系统的全局渐近镇定问题; Saberi[4] 用线性反馈研究了同类系统的半全局镇定问题。然而,几乎没有人注意到具有输入饱和的组合系统的分散半全局镇定问题。

本文针对具有输入饱和的组合系统的分散控制问题进行探讨。利用 M 矩阵理论,给出了具有输入饱和对称组合系统分散半全局镇定的充分条件。对称组合系统大量出现在电力系统、双机提升系统、大规模并行计算以及人工神经元网络等领域,由 Lunze 提出并称之为对称组合系统[5~7]。

由于对称组合系统结构的特殊性,许多具有输入饱和的对称组合系统的分散结构分析和设计问题都可以简化。本文利用这一特点给出了简洁的有关分散半全局镇定的结论。

2 预备知识

本文中 $\lambda_m(\cdot)$ 和 $\lambda_M(\cdot)$ 分别表示矩阵的最小和

收稿日期: 2002-09-30; 修回日期: 2003-02-17。
基金项目: 辽宁省普通高校学科带头人基金资助项目(124210); 辽宁省科技基金资助项目(2001401041)。
作者简介: 翟丁(1970—),男,辽宁铁岭人,讲师,博士生,从事大系统的分散控制和鲁棒控制研究; 张庆灵(1956—),男,辽宁营口人,教授,博士生导师,从事广义系统的分散控制、容错控制与鲁棒控制等研究。

最大特征值, 定义 $\|H\| = \|H\|_2$。

首先介绍饱和函数的定义。

定义 1 若函数 $\sigma: R^m \to R^m$ 满足:

1) $\sigma(u)$ 是分散的, 即

$$\sigma(u) = [\sigma_1(u_1), \sigma_2(u_2), \cdots, \sigma_m(u_m)]^{\mathrm{T}}$$

2) σ_j 是半全局 Lipschitz 的, $j = 1, 2, \cdots, m$;

3) $s\sigma_j(s) > 0, \forall s \neq 0$;

4) $\min\left\{\lim\limits_{s\to 0^+} \dfrac{\sigma_j(s)}{s}, \lim\limits_{s\to 0^-} \dfrac{\sigma_j(s)}{s}\right\} > 0$;

5) $\lim\limits_{|s|\to\infty} \inf(|\sigma_j(s)|) > 0$。

则称 σ 为饱和函数。

注 1 易知函数

$$\sigma(t) = t, \quad \operatorname{arctg}(t), \quad \operatorname{sign}(t)\min\{|t|, 1\}$$

都是饱和函数。对于饱和函数 $\sigma: R^m \to R^m$, 存在 $\Delta > 0$, 使得

$$s[\sigma_j(\alpha s) - \mathrm{sat}_\Delta(s)] \geq 0$$
$$\forall \alpha \geq 1, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, m$$

其中 $\mathrm{sat}_\Delta(s) = \operatorname{sign}(s)\min\{|s|, \Delta\}$

下面给出 M 矩阵的定义和性质。

引理 1[6] 假设 $W = [W_{ij}] \in R^{N\times N}$ 是一个非正对角实方阵, 则下面的结论等价:

1) W 的所有主子式都是正的;

2) W 的所有顺序主子式为正;

3) 存在一个所有元素都是正的向量 x(或 y), 使得 Wx(或 $W^{\mathrm{T}}y$) 非负;

4) W 是非奇异的, 且 W^{-1} 中的元素都是非负的;

5) 存在 $d_1, d_2, \cdots, d_N$ 且 $d_j > 0, j = 1, 2, \cdots, N$, 使得 $d_i w_{ii} > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} d_j |w_{ij}|$;

6) W 特征值的实部都是正的。

定义 2[6] 若矩阵 W 满足引理 1 中的任一个条件, 则称 W 为 M 矩阵。

引理 2[6] 一个非对角元素非正的实方阵 W 是 M 矩阵的充要条件是: 存在一个元素为正的对角矩阵 D, 使得 $W^{\mathrm{T}}D + DW$ 为对称正定矩阵。

3 问题描述

考虑如下具有输入饱和的线性系统

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} x_j + B_i \sigma_i(u_i)$$
$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{1}$$

其中: $x_i \in R^n, u_i \in R^m, A_i \in R^{n\times n}, B_i \in R^{n\times n}, \sigma: R^m \to R^m (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是饱和函数, $A_{ij} \in R^{n\times n} (i \neq j)$ 是交联矩阵。

本文讨论的问题是: 对于给定的有界子集 $U \in R^{Nn}$, 存在有界子集 $U_1, U_2, \cdots, U_N \in R^n$, 使得 $U \subset U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_N$。研究的问题是寻找一个分散状态反馈

$$u_i = K_i x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{2}$$

其中 $K_i \in R^{m\times n}$ 为反馈矩阵, 使得:

第 i 阶闭环子系统

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i \sigma_i(K_i x_i) \tag{3}$$

在包含点 $x_i = 0$ 的吸引域 Ω 一致渐近稳定, 且 $U_i \in \Omega$; 对于完全闭环系统, 有

$$\dot{x}_i = A_i x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{ij} x_j + B_i \sigma_i(K_i x_i)$$
$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{4}$$

在包含点 $x_i = 0$ 的附近区域 Ω 一致渐近稳定, 且 $U \in \Omega$, 即系统(1) 的分散半全局镇定问题。

在系统(1) 中, 假设: $A_1 = A_2 = \cdots = A_N, B_1 = B_2 = \cdots = B_N, A_{ij} = A_{12}$。则系统(1) 可重新表示为

$$\dot{x}_i = A_1 x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} A_{12} x_j + B_1 \sigma_i(u_i)$$
$$i = 1, 2, \cdots, N \tag{5}$$

具有形式(5) 的系统称为输入饱和对称组合系统。Lunze 等[5~7] 研究了不具有输入饱和的对称组合系统, 本文则研究具有输入饱和对称组合系统的分散半全局镇定问题。

4 主要结果

对于第 i 个子系统, 选择一个连续函数 $Q_i: (0, 1] \to R^{n\times n}$ 使得 $Q_i(\epsilon)$ 是正定的, 且 $\epsilon \in (0, 1]$, $\lim\limits_{\epsilon\to 0} Q_i(\epsilon) = 0$。一种简单的情形是取 $Q_i(\epsilon) = \epsilon I$。

设 $P_i(\epsilon)$ 是代数 Riccati 方程

$$A_i^{\mathrm{T}} P_i(\epsilon) + P_i(\epsilon) A_i -$$
$$P_i(\epsilon) B_i B_i^{\mathrm{T}} P_i(\epsilon) + Q_i(\epsilon) = 0$$

的唯一正定解且与 ϵ 相关。当 ϵ 取值确定时, $Q_i(\epsilon)$ 可分解为 $Q_i(\epsilon) = C_i(\epsilon) C_i^{\mathrm{T}}(\epsilon)$, $(A_i, C_i(\epsilon))$ 能观。设 (A_i, B_i) 能稳, 则该 Riccati 方程存在正定解。

从注 1 可以看出, 存在 $\Delta_i > 0$, 使得

$$s[\sigma_{ij}(\alpha s) - \mathrm{sat}_{\Delta_i}(s)] \geq 0$$
$$\forall \alpha \geq 1, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, m \tag{6}$$

其中 $\mathrm{sat}_{\Delta_i}(s) = \operatorname{sign}(s)\min\{|s|, \Delta_i\}$

设 $c_i^2 = \sup\{x_i^{\mathrm{T}} P_i(\epsilon) x_i : x_i \in U_i, \epsilon \in (0, 1]\}$, 可以看出 $\epsilon^* > 0$, 使得

$$\|B_i^{\mathrm{T}} P_i^{1/2}(\epsilon^*) z_i\| \leq \Delta_i$$
$$\forall z_i \in \{z_i \in R^n : \|z_i\| \leq c_i\} \tag{7}$$

则由文献[4] 中定理 1, $\forall \epsilon \in (0, \epsilon^*]$, $\forall p_i > 0$, 状

态反馈

$$u_i = -(1+\rho_i)B_i^{\mathrm T}P_i(\epsilon)x_i \tag{8}$$

满足式(3)。

下面给出状态反馈(8) 满足式(4) 的充分条件。

定理1　如果存在$Q_i(\epsilon)$, $\epsilon\in(0,\epsilon^*]$, $i=1,2,\cdots,N$, 使得矩阵 $W=[w_{ij}]$, 其中

$$w_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_m(Q_i(\epsilon))}{2\lambda_M(P_i(\epsilon))}, & i=j\\ -\|A_{ij}\|, & i\neq j\end{cases} \tag{9}$$

是 M 矩阵, 则状态反馈(8) 满足式(3) 和(4)。

证明　设 $P_i=P_i(\epsilon)$, $z_i=P_i^{1/2}x_i$, $u_{Li}=-B_i^{\mathrm T}P_ix_i=-B_i^{\mathrm T}P_i^{1/2}z_i$, 令

$$V(x)=\sum_{i=1}^N f_i x_i^{\mathrm T}P_ix_i=\sum_{i=1}^N f_i z_i^{\mathrm T}z_i$$

其中: $f_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为正数, $x^{\mathrm T}=[x_1^{\mathrm T},x_2^{\mathrm T},\cdots,x_N^{\mathrm T}]$。对 $V(x)$ 求导, 得

$$\begin{aligned}\dot V ={}& \sum_{i=1}^N f_i(\dot z_i^{\mathrm T}z_i+z_i^{\mathrm T}\dot z_i)=\\ &\sum_{i=1}^N f_i\Big[\big(z_i^{\mathrm T}P_i^{1/2}A_i^{\mathrm T}P_i^{1/2}+\\ &\sum_{j=1,j\neq i}^N z_j^{\mathrm T}P_j^{-1/2}A_{ij}^{\mathrm T}P_i^{1/2}+\\ &\sigma_i^{\mathrm T}(u_i)B_i^{\mathrm T}P_i^{1/2}\big)z_i+z_i^{\mathrm T}\big(P_i^{1/2}A_iP_i^{-1/2}z_i+\\ &\sum_{j=1,j\neq i}^N P_i^{1/2}A_{ij}P_j^{-1/2}z_j+P_i^{1/2}B_i\sigma_i(u_i)\big)\Big]=\\ &-\sum_{i=1}^N f_i[z_i^{\mathrm T}(P_i^{-1/2}Q_iP_i^{-1/2}+\\ &P_i^{1/2}B_iB_i^{\mathrm T}P_i^{1/2})z_i]-\\ &\sum_{i=1}^N 2u_{Li}^{\mathrm T}[\sigma_i(1+\rho_i)u_{Li}-u_{Li}]+\\ &2\sum_{i=1}^N f_i\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^N x_i^{\mathrm T}P_iA_{ij}x_j\Big)\end{aligned}$$

对于 $x\in U\subset U_1\times U_2\times\cdots\times U_N$, $x_i\subset U_i$, 有 $\|z_i\|\le c_i$。由式(7), 得 $\|u_{Li}\|\le\Delta_i$, 因此 $u_{Li}=\mathrm{sat}_{\Delta_i}(u_{Li})$。由式(6) 得 $2u_{Li}^{\mathrm T}[\sigma_i(1+\rho_i)u_{Li}-u_{Li}]>0$, 所以

$$\begin{aligned}\dot V\le{}&\\ &-\sum_{i=1}^N f_i\lambda_m(Q_i)\|x_i\|^2+\\ &2\sum_{i=1}^N f_i\Big(\sum_{j=1,j\neq i}^N\|A_{ij}\|\,\|P_i\|\,\|x_i\|\,\|x_j\|\Big)\le\\ &-X^{\mathrm T}(W^{\mathrm T}PF+FPW)X\end{aligned}$$

其中 W 由式(9) 给出, 且

$$\begin{aligned}X={}&(\|x_1\|,\|x_2\|,\cdots,\|x_N\|)^{\mathrm T}\\ P={}&\mathrm{diag}(\|P_1\|,\|P_2\|,\cdots,\|P_N\|)=\\ &\mathrm{diag}(\lambda_M(P_1),\lambda_M(P_2),\cdots,\lambda_M(P_N))\\ F={}&\mathrm{diag}(f_1,f_2,\cdots,f_N)\end{aligned}$$

W 是一个 M 矩阵, 因此 PW 也是 M 矩阵。由引理 2, 存在矩阵 F 使得 $W^{\mathrm T}PF+FPW$ 正定。这样, 对于任意的 $x\in U$, 有 $\dot V<0$。□

下面给出一个简单的系统(5) 的分散半全局镇定充分条件。

首先给出如下引理:

引理3　矩阵

$$G=\begin{bmatrix}a & b & \cdots & b & b\\ b & a & \cdots & b & b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ b & b & \cdots & b & a\end{bmatrix}$$

是 M 矩阵的充要条件为 $b<0$ 且 $a+(N-1)b>0$。

证明　令

$$S=\frac{1}{N}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1\end{bmatrix}\in R^{N\times N}$$

计算得

$$S^{-1}=\frac{1}{N}\begin{bmatrix}N-1 & -1 & \cdots & -1 & -1\\ -1 & N-1 & \cdots & -1 & -1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & N-1 & -1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{bmatrix}\in R^{N\times N}$$

且

$$S^{-1}GS=\begin{bmatrix}a-b & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & a-b & 0\\ 0 & \cdots & 0 & a+(N-1)b\end{bmatrix}\in R^{N\times N}$$

由于相似变换不改变矩阵的特征值, 矩阵 G 的特征值为 $a-b$ 和 $a+(N-1)b$。由定义 2 和引理 2 得, G 是 M 矩阵的充要条件为 $a>0$, $b<0$, $a-b>0$ 和 $a+(N-1)b>0$。□

定理2　假设 $U\subset U_1\times U_1\times\cdots\times U_1\in R^{Nn}$, 如果存在 $Q_1(\epsilon_1)$, $\epsilon_1\in(0,\epsilon_1^*]$, 使得

$$\frac{\lambda_m(Q_1(\epsilon_1))/2\lambda_M(P_1(\epsilon_1))}{\|A_{12}\|}>N-1$$

则系统(5) 的半全局分散控制问题可解。此时, 状态反馈为

$$u_i = -(1+\rho_1)B_1^{\mathrm{T}}P_1(\epsilon_1)x_i$$
$$\rho_1 > 0,\quad i = 1, 2, \cdots, N \qquad (10)$$

证明 对于系统(5), 由于

$$w_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_m(Q_1(\epsilon_1))}{2\lambda_M(P(\epsilon_1))}, & i = j \\ -\|A_{12}\|, & i \neq j \end{cases}$$

根据定理 1 和引理 3, 系统(5) 分散半全局镇定的充分条件是

$$-\|A_{12}\| < 0$$
$$\lambda_m(Q)/2\lambda_M(P) - (N-1)\|A_{12}\| > 0$$

即
$$\frac{\lambda_m(Q)/2\lambda_M(P)}{\|A_{12}\|} > N-1 \qquad \square$$

5 结 语

本文运用 M 矩阵理论, 研究了一类具有输入饱和的组合系统在半全局分散状态反馈控制作用下的镇定问题, 得到了该系统可镇定的充分条件。这一方法同样适用于广义系统[8]。

参考文献(References):

[1] Yang G H, Zhang S Y. Decentralized control of a class of large scale systems with symmetrically inter-con-nected subsystems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(5): 710-713.

[2] Yang G H, Zhang S Y. Stabilizing controllers for uncertain symmetric composite systems[J]. *Auto-matica*, 1995, 31(2): 337-340.

[3] Sussmann H J, Sontag E D, Yang Y D. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2411-2425.

[4] Saberi A, Lin Z, Teel A R. Control of linear systems with saturating actuator[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(3): 368-378.

[5] Lunze J. Dynamics of strongly coupled symmetric composite systems[J]. *Int J Control*, 1986, 44(6): 1617-1640.

[6] Sundareshan M K, Elbanna R M. Qualitative analysis and decentralized controller synthesis for a class of large-scale systems with symmetrically interconnected subsystem[J], *Automatica*, 1991, 27(2): 383-388.

[7] Hovd M, Skogestad S. Control of symmetrically interconnected plants[J]. *Automatica*, 1994, 30: 957-973.

[8] 张庆灵. 广义大系统的分散控制与鲁棒控制[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1997.

(上接第 516 页)

参考文献(References):

[1] Goldratt E M, Cox J. *The Goal*[M]. 2nd ED. Aldershot: Gower, 1993.

[2] Goldratt E M. *It's Not Luck*[M]. Aldershot: Gower, 1994.

[3] Goldratt E M. *Critical Chain*[M]. MA: The North River Press, 1997.

[4] Rand G K. Critical chain: The theory of constraints applied to project management [J]. *Int J of Project Management*, 2000, 18(3): 173-177.

[5] Steyn H. An investigation into the fundamentals of critical chain project scheduling[J]. *Int J of Project Management*, 2000, 19(6): 363-369.

[6] Herroelen W, Leus R. On the merits and pitfalls of critical chain scheduling[J]. *J of Operations Management*, 2001, 19(5): 559-775.

[7] Wei C C, Liu P H, Tsai Y C. Resource-constrained project management using enhanced theory of constraint[J]. *Int J of Project Management*, 2002, 20(7): 561-567.

[8] Yeo K T, Ning J H. Integrating supply chain and critical chain concepts in engineer-procure-construct (EPC) projects[J]. *Int J of Project Management*, 2002, 20(4): 253-262.

[9] 刘士新, 王梦光, 唐加福. 资源受限工程调度问题的优化方法综述[J]. 控制与决策, 2001, 16(增刊): 647-651.
(Liu S X, Wang M G, Tang J F. The optimization algorithms for solving resource-cons-trained project scheduling problem: A review [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(Supp1): 647-651.)

[10] 刘士新, 王梦光, 唐加福. 求解资源受限工程调度问题的遗传算法[J]. 系统工程学报, 2002, 17(1): 1-7.
(Liu S X, Wang M G, Tang J F. GA for solving resource-constrained project scheduling problem [J]. *J of Systems Engineering*, 2002, 17(1): 1-7.)

[11] Brucker P, Drexl A, Mohring R, et al. Resource-constrained project scheduling: Notation, classifi-cation, models, and methods[J]. *European J of Operational Research*, 1999, 112(1): 3-41.

[12] 刘士新, 王梦光. 多执行模式资源受限工程调度问题的优化算法[J]. 系统工程学报, 2001, 16(1): 55-60.
(Liu S X, Wang M G. Optimization algorithm for solving multi-mode resource-constrained project scheduling problem[J]. *J of Systems Engineering*, 2001, 16(1): 55-60.)