

具有不确定噪声的随机非线性系统的鲁棒自适应跟踪

季海波, 奚宏生, 陈志福, 王 俊

(中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 研究了一类随机非线性系统的鲁棒自适应跟踪问题. 文中利用随机控制 Lyapunov 设计方法, 对于受方差不确定 Wiener 噪声干扰的参数严格反馈形式的系统, 给出了参数自适应律和控制律, 使得跟踪误差在 4 次均方意义下收敛到一个小范围内.

关键词: 随机稳定性; 扰动抑制; 自适应跟踪

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Robust adaptive tracking of stochastic nonlinear systems with uncertain noises

JI Hai-bo, XI Hong-sheng, CHEN Zhi-fu, WANG Jun

(Department of Automation, University of Science & Technology of China, Anhui Hefei 230027, China)

Abstract: Robust adaptive tracking problems for a class of stochastic nonlinear systems were investigated. A stochastic Lyapunov design method was applied for systems in the form of parametric-strict-feedback driven by Wiener noises of unknown covariance. A parameter adaptive law and a control law were obtained to ensure that the tracking error could converge to a small residual set around the origin in the sense of mean quartic value.

Key words: stochastic stability; disturbance attenuation; adaptive tracking

1 引言(Introduction)

90 年代以来, 随着 backstepping 等递归设计方法^[1]的提出, 非线性系统构造性控制设计方法的研究引起了许多学者的关注^[2~4]. 近几年来一些学者开始讨论随机非线性系统的控制问题, 其中假定系统所受的外界干扰噪声是 Wiener 过程. 与通常的理想白噪声假设相比, Wiener 噪声接近于现实中随机扰动的特征, 但其处理难度要更大一些. 具有 Wiener 噪声干扰的随机系统通常以 Itô 随机微分方程描述. 有关 Itô 随机微分方程及其稳定性理论的基本结果可以说早已存在^[5,6], 但是有关结论常常是定性的或非构造性的, 如何对 Wiener 随机系统进行控制设计的讨论很少. 一个主要困难在于, 在随机控制 Lyapunov 分析中出现了 Hessian 函数矩阵的二阶项. Florchinger 等人^[7,8]讨论了随机控制 Lyapunov 函数, 并给出了 Sontag 一般镇定公式的随机形式. Pan 和 Basar^[9]研究了风险敏感指标的最优控制问题, Krstić 和 Deng 等人^[10,11]采用 4 次型的 Lyapunov 函

数和 backstepping 设计途径, 研究了随机严格反馈系统的镇定、扰动抑制, 并给出了随机逆优化的提法.

文^[10,11]讨论的随机非线性系统本身不带未知参数, 而将 Wiener 噪声的不确定方差作为未知参数作自适应控制或采用噪声扰动抑制进行鲁棒设计. 文^[12]讨论的随机非线性系统不仅本身带有未知参数, 而且 Wiener 干扰噪声的方差也是不确定的. 需要指出的是, 现有这些工作讨论的都是镇定或平衡点控制问题, 尚没有涉及随机非线性系统的输出跟踪问题. 本文讨论参数严格反馈随机非线性系统在具有未知方差的 Wiener 噪声作用下, 如何使系统输出跟踪给定的参考信号. 作者采用对不确定噪声扰动抑制的控制机制, 实现了对任意给定信号的鲁棒自适应跟踪. 需要注意的是, 由于不确定随机扰动的存在, 通常难以做到渐近跟踪, 但是可以确保跟踪误差在概率意义下收敛到足够小的范围内. 作者还给出了仿真实例, 说明有关设计方案, 实现了状态反馈鲁棒自适应跟踪.

2 问题描述(Problem description)

考虑如下的参数严格反馈(parametric-strict-feedback)形式的随机非线性系统

$$\begin{cases} dx_i = x_{i+1}dt + \varphi_i(\bar{x}_i)^T \theta dt + g_i(\bar{x}_i)^T dw, \\ i = 1, 2, \dots, n-1, \\ dx_n = udt + \varphi_n(x)^T \theta dt + g_n(x)^T dw, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

这里 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 是系统状态, 并记 $\bar{x}_i = (x_1, x_2, \dots, x_i)^T$, $u \in \mathbb{R}$ 是系统的输入, $y \in \mathbb{R}$ 是系统的输出, $\theta \in \mathbb{R}^p$ 是未知常参数; φ_i 是 p 维光滑向量值函数, 满足 $\varphi_i(0) = 0$, g_i 是 r 维光滑向量值函数, 其中下标 $i = 1, 2, \dots, n$; 噪声干扰 w 是定义在概率空间 (Ω, F, P) 上的 r 维独立的 Wiener 过程, 其中 Ω 为样本空间, F 为 σ -代数, P 为概率测度, 记增量 dw 的协方差为 $\Delta \Delta^T dt$, 即均值

$$E\{dw \cdot dw^T\} = \Delta(t) \Delta(t)^T dt,$$

其中函数矩阵 $\Delta(t)$ 是有界但不确定的。

本文的控制目标是使得输出 y 跟踪一个给定的有界参考信号 $y_r(t)$ (假定是光滑的), 并保持闭环系统的其它信号都有界. 记跟踪误差

$$e_i = x_i - y_r^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

式中 $y_r^{(k)}$ 表示 y_r 的 k 阶导数, 且有 $y_r^{(0)} = y_r$. 根据式(1), 得到跟踪误差方程

$$\begin{cases} de_i = (e_{i+1} + \varphi_i^T \theta)dt + g_i^T dw, \\ i = 1, 2, \dots, n-1, \\ de_n = (u - y_r^{(n)} + \varphi_n^T \theta)dt + g_n^T dw. \end{cases} \quad (3)$$

为了研究系统(1), 先对如下的随机微分系统^[5,11]

$$dx = f(x, t)dt + g(x, t)dw \quad (4)$$

给出有关引理和记号, 式中 $x \in \mathbb{R}^n$, Wiener 噪声 w 如在系统(1)所述, 函数 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ 是光滑的。

根据 Itô 随机微分, 一个二阶连续可微函数 $V(x, t)$ 沿随机系统(4)的变化率(又称 infinitesimal generator)为

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \Delta^T g^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} g \Delta \right\}, \quad (5)$$

这里 tr 表示矩阵的迹. 与确定性系统的 Lyapunov 函数微分表达式不同的是, 式(5)里增加了二阶微分项, 这常常给随机系统的 Lyapunov 控制设计带来一定困难。

输入-状态稳定性(ISS)是非线性系统鲁棒稳定

性分析与设计的重要工具, 它首先由 Sontag 提出^[13], 文[11]将之推广到随机系统, 并引入噪声-状态稳定性(NSS)提法。

定义 1(NSS-稳定性) 随机系统(4)称为噪声-状态稳定的, 系指对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 KL 类函数 β 和 K 类函数 γ , 使得概率

$$P\{|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t) + \gamma\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |\Delta(s) \Delta(s)^T| \right)\} \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

引理 1(NSS-Lyapunov 函数) 考虑随机系统(4), 假设存在二阶连续可微函数 $V(x, t)$, 与 K_∞ 类函数 α_1, α_2 和 ρ , 以及 K 类函数 ω , 使得

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(|x|), \quad (7)$$

并且

$$|x| \geq \rho(|\Delta(t) \Delta(t)^T|) \Rightarrow LV \leq -\omega(|x|), \quad \forall t \geq 0, \quad (8)$$

则系统(4)是噪声-状态全局稳定的(NSS)。

这里的 $|\cdot|$ 表示向量或矩阵的 Euclidean 范数。

引理 1 反映了在概率意义下有界方差噪声导致有界状态的特征, 这种提法又称为随机扰动抑制问题. 在后面对随机系统(1)的控制设计中, 本文可以做到让噪声对系统的影响任意小。

引理 2(Young 不等式) 对于任意两个向量 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 如下不等式成立

$$x^T y \leq \frac{\varepsilon^p}{p} |x|^p + \frac{1}{q\varepsilon^q} |y|^q, \quad (9)$$

式中 $\varepsilon > 0$, 常数 $p > 1, q > 1$, 满足

$$(p-1)(q-1) = 1.$$

3 控制设计(Control design)

现在采用 backstepping 递归设计思想, 来设计随机系统(1)的扰动抑制自适应控制方案. 记参数 θ 的估计值 $\hat{\theta}$, 作坐标变换

$$z_i = e_i - \alpha_{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \hat{\theta}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

式中取 $\alpha_0 = 0$.

注意, 式(10)中的 α_{i-1} 在某些文献取成

$$\alpha_{i-1} = \alpha_{i-1}(\bar{x}_{i-1}, \hat{\theta}, y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(i-1)})$$

的形式, 然而因 $y_r(t)$ 是 t 的已知函数, 它们与式(10)里的取法是等效的。

利用 Itô 随机微分公式得到

$$\begin{aligned} dz_i &= (e_{i+1} + \varphi_i^T \theta)dt + g_i^T dw - d\alpha_{i-1} = \\ &= \left[z_{i+1} + \alpha_i + \varphi_i^T \theta - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} - \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (x_{j+1} + \varphi_j^T \theta) - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta} \dot{\theta} - \right. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} g_p^T \Delta \Delta^T g_q \Big] dt +$$

$$\left(g_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} g_j^T \right) dw.$$

式中 $i = 1, 2, \dots, n$, 为了记号方便约定 $z_{n+1} = 0$ 和 $\alpha_n = u - y_r^{(n)}$.

由于式(5)中的二阶微分项, 本文选择状态4次和参数2次的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n z_i^4 + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^T \tilde{\theta}, \quad (11)$$

式中参数估计误差 $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$, 常数 $\gamma > 0$.

下面计算 V 沿随机系统(1)的时间变化率

$$LV = \sum_{i=1}^n z_i^3 \left[z_{i+1} + \alpha_i + \varphi_i^T \tilde{\theta} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} - \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (x_{j+1} + \varphi_j^T \tilde{\theta}) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} g_p^T \Delta \Delta^T g_q - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta} \dot{\theta} \right] +$$

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(g_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} g_j^T \right) \cdot$$

$$\Delta \Delta^T \left(g_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} g_j \right) - \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta}^T \dot{\tilde{\theta}} \leq$$

$$\sum_{i=1}^n z_i^3 \left[\left(\frac{4}{3} \delta_i^4 + \frac{1}{4\delta_{i-1}^4} \right) z_i + \alpha_i + \tau_i^T \tilde{\theta} - \right.$$

$$\left. \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} - \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \right.$$

$$\left. \lambda z_i^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left(\frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 g_p^T g_p g_q^T g_q + \mu z_i (\sigma_i^T \tilde{\sigma}_i)^2 \right] +$$

$$k \|\Delta\|^4 - \tilde{\theta}^T \left(\frac{1}{\gamma} \dot{\tilde{\theta}} - \sum_{i=1}^n z_i^3 \tau_i \right), \quad (12)$$

式中定义

$$\tau_i = \varphi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \varphi_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\sigma_i = g_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} g_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

需要注意的是, 式(12)的推导过程中运用了以下的 inequality, 它们是从 Young 不等式得到的:

$$\sum_{i=1}^n z_i^3 z_{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^3 z_{i+1} \leq$$

$$\frac{3}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^4 z_i^4 + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\delta_i^4} z_{i+1}^4 =$$

$$\frac{3}{4} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i^4 z_i^4 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^n \frac{1}{\delta_{i-1}^4} z_i^4 =$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{3}{4} \delta_i^4 + \frac{1}{4\delta_{i-1}^4} \right) z_i^4.$$

其中 $\delta_0 = \infty, \delta_n = 0$, 而 $\delta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n-1$.

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} g_p^T \Delta \Delta^T g_q \leq$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda z_i^6 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left(\frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 \|g_p\|^2 \|g_q\|^2 +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{p,q=1}^{i-1} \frac{1}{16\lambda} \|\Delta \Delta^T\|^2 =$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda z_i^6 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left(\frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 g_p^T g_p g_q^T g_q +$$

$$\frac{\|\Delta \Delta^T\|^2}{96\lambda} (n-1)n(2n-1),$$

$$\frac{3}{2} \sum_{i=1}^n z_i^2 \left(g_i^T - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} g_j^T \right) \Delta \Delta^T (g_i -$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} g_j) \leq$$

$$\sum_{i=1}^n \mu z_i^4 \left[\left(g_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} g_j \right)^T (g_i - \right.$$

$$\left. \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} g_j) \right]^2 + \sum_{i=1}^n \frac{9}{16\mu} \|\Delta \Delta^T\|^2.$$

其中 $\lambda > 0, \mu > 0$, 并记

$$k = \frac{(n-1)n(2n-1)}{96\lambda} + \frac{9n}{16\mu}. \quad (13)$$

根据式(12), 可取参数自适应律

$$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma \sum_{i=1}^n z_i^3 \tau_i \quad (14)$$

和虚拟控制

$$\alpha_i = -c_i z_i - \left(\frac{3}{4} \delta_i^4 + \frac{1}{4\delta_{i-1}^4} \right) z_i - \tau_i^T \tilde{\theta} +$$

$$\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta} \dot{\theta} -$$

$$\lambda z_i^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left(\frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 g_p^T g_p g_q^T g_q - \mu z_i (\sigma_i^T \tilde{\sigma}_i)^2. \quad (15)$$

选定参数自适应律(14)后, 由于在 α_i 求解式

(15) 中包含了 $\dot{\theta}$, 它与 $z_1, \dots, z_n$ 有关, 于是式(15)不能直接递归求解 α_i . 为此本文对 LV 表达中含 $\dot{\theta}$ 的项进行如下处理

$$\sum_{i=1}^n z_i^3 \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta} \dot{\theta} =$$

$$\sum_{i=1}^n z_i^3 \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta} \gamma \left(\sum_{j=1}^i z_j^3 \tau_j + \sum_{j=i+1}^n z_j^3 \tau_j \right) =$$

$$\sum_{i=1}^n z_i^3 \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta} \gamma \sum_{j=1}^i z_j^3 \tau_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} z_i^3 \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta} \gamma z_j^3 \tau_j =$$

$$\sum_{i=1}^n z_i^3 \left[\frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta} \gamma \sum_{j=1}^i z_j^3 \tau_j + \left(\sum_{j=1}^{i-1} z_j^3 \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \theta} \right) \gamma \tau_i \right]. \quad (16)$$

其中第二个等式通过交换求和顺序得到,而第三个等式通过交换求和指标得到.

将式(16)代入 LV 表达式(12),设计可递归计算的虚拟控制

$$\begin{aligned} \alpha_i = & -c_i z_i - \left(\frac{3}{4} \delta_i^4 + \frac{1}{4\delta_{i-1}^4} \right) z_i - \tau_i \ddot{\theta} + \\ & \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} x_{j+1} + \\ & \gamma \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \theta} \sum_{j=1}^i z_j^3 \tau_j + \gamma \sum_{j=1}^{i-1} z_j^3 \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \theta} \tau_i - \\ & \lambda z_i^3 \sum_{p,q=1}^{i-1} \left(\frac{\partial^2 \alpha_{i-1}}{\partial x_p \partial x_q} \right)^2 g_p^T g_p g_q^T g_q - \mu z_i (\sigma_i^T \sigma_i)^2, \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $z_i = x_i - y_r^{(i-1)} - \alpha_{i-1}$, 常数 $c_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. 实际控制输入为

$$u = \alpha_n + y_r^{(n)}. \quad (18)$$

将式(14),(17)和(18)代入 LV 表达式(12),并考虑到式(16),可得到

$$LV \leq - \sum_{i=1}^n c_i z_i^4 + k |\Delta|^4 \leq -c \sum_{i=1}^n z_i^4 + k |\Delta|^4, \quad (19)$$

式中 $c = \min \{c_i | 1 \leq i \leq n\}$.

考虑到

$$\frac{d}{dt} [E V(x(t))] = E [LV(x(t))],$$

从式(19)可推出

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} E(|z|^4_4) + \frac{1}{2\gamma} E(|\dot{\theta}|^2) \right] \leq -c E(|z|^4_4) + k |\Delta|^4, \quad (20)$$

式中 $|\cdot|_4$ 表示 4-范数

如果系统(1)中的参数已知,则随机形式的耗散不等式(19)意味着闭环系统是噪声-状态全局稳定的(NSS)^[10,11]. 现在系统(1)中的参数是未知的,为了便于分析,本文假定参数 $\theta \in B$ 有界,其中 $B = \{\theta | \theta^T \theta \leq \rho\}$ ($\rho > 0$ 为常数),令 $B_\delta = \{\theta | \theta^T \theta \leq \rho + \delta\}$ ($\delta > 0$ 为适当选择的常数). 这里修正式(14)而采用参数投影自适应律^[14]

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \text{Proj} \left(\hat{\theta}, \sum_{i=1}^n z_i^3 \tau_i \right), \quad (21)$$

式中定义投影函数

$$\text{Proj}(\hat{\theta}, \psi) = \begin{cases} \psi, & \hat{\theta}^T \hat{\theta} \leq \rho \text{ 或 } \hat{\theta}^T \hat{\theta} > \rho, \hat{\theta}^T \psi \leq 0, \\ \bar{\psi}, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

其中

$$\bar{\psi} = \psi - \frac{(\hat{\theta}^T \hat{\theta} - \rho) \hat{\theta}^T \psi}{\delta \hat{\theta}^T \hat{\theta}} \hat{\theta}.$$

式(21)中的投影函数是 Lipschitz 连续的,在需要微分时可先对原光滑函数微分后再进行投影. 在参数自适应律(21)之下,可以证明式(12)中的参数项

$$-\hat{\theta}^T \left(\frac{1}{\gamma} \dot{\hat{\theta}} - \sum_{i=1}^n z_i^3 \tau_i \right) \leq 0, \quad (22)$$

这时虚拟控制的计算难以化为递归形式,只采用式(15),然而式(19)与(20)也一样成立. 这样的参数估计是有界的,即

$$\hat{\theta}(0) \in B \Rightarrow \hat{\theta}(t) \in B_\delta, \quad \forall t \geq 0.$$

这也导致了估计误差 $\bar{\theta}(t)$ 有界.

一旦 $\bar{\theta}(t)$ 有界,从不等式(20)以及 $\Delta(t)$ 有界性,考虑到输入-状态稳定性(ISS)性质^[13],不难得出状态 4 次均方值 $E(|z(t)|_4^4)$ 也有界. 对式(20)两边积分,由于状态、参数和方差的有界性,可得到

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(|z(t)|_4^4) dt \leq \frac{k}{c} \sup_t |\Delta(t)|^4. \quad (23)$$

注意到 $z_1 = y - y_r$, 并因式(13)可选择 λ 与 μ 使 k 足够小(或者 c 取得足够大),以便对噪声进行扰动抑制,同时式(23)也说明了跟踪说明的 4 次均方值在平均意义下可以充分小. 于是得到如下定理.

定理 1 随机非线性系统(1)在控制律(17),(18)和参数自适应律(14)的作用下,获得具有随机扰动抑制的自适应跟踪;特别在控制律(15),(18)和自适应律(21)的作用下,跟踪误差的 4 次均方值在时间平均意义下可以充分小.

在下面的实际计算中,为了消除“峰值”现象,可利用饱和函数将控制方程改写为

$$u = u_{\max} \text{sat} \left(\frac{\alpha_n(\hat{x}, \hat{\theta}, t) + y_r^{(n)}}{u_{\max}} \right).$$

式中 $u_{\max}$ 是 $|u|$ 的最大可能值,饱和函数即为

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ -1, & x < -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

4 算例(Examples)

考查一个二阶系统

$$\begin{cases} dx_1 = x_2 dt + x_1^2 \theta dt, \\ dx_2 = u dt + x_1 x_2 \theta dt + \sin x_2 dw, \\ y = x_1. \end{cases}$$

按照前面所给出的方法,推出该系统的控制律

和参数自适应律如下(取 $\delta_1 = 1$)

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -(c_1 + 3/4)z_1 - \tau_1\hat{\theta}, \\ \alpha_2 &= -(c_2 + 1/4 + \mu\sigma_2^4)z_2 - \tau_2\hat{\theta} + (c_1 + 3/4)\dot{y}_r - \\ &\quad (c_1 + 3/4 + 2x_1\hat{\theta})x_2 - \gamma\tau_1(z_1^3\tau_1 + z_2^3\tau_2), \\ u &= \alpha_2 + \dot{y}_r, \\ \dot{\hat{\theta}} &= \gamma(z_1^3\tau_1 + z_2^3\tau_2),\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0, \sigma_2 = \sin x_2, \tau_1 = x_1^2, \\ \tau_2 &= x_1x_2 + (c_1 + 3/4 + 2x_1\hat{\theta})x_1^2, \\ z_1 &= x_1 - y_r, z_2 = x_2 - \dot{y}_r - \alpha_1.\end{aligned}$$

当跟踪信号取为 $y_r(t) = 1$, 噪声方差 $\Delta(t) =$

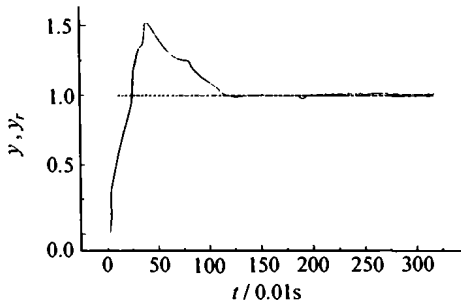


图1 常设定值跟踪
Fig. 1 Set point tracking

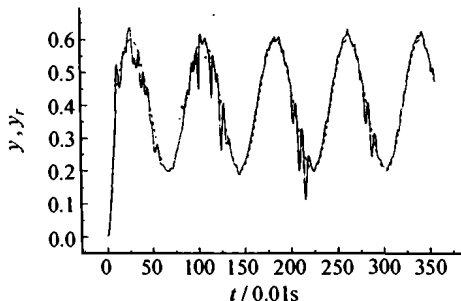


图3 周期信号跟踪
Fig. 3 Periodic signal tracking

在计算中,虽然参数估计值并不收敛到参数真值,但跟踪误差可控制在较小的范围内.计算结果反映了控制方案良好的扰动抑制和跟踪性能.

5 结论(Conclusion)

本文针对一类参数严格反馈形的随机非线性系统,在含有未知参数及不确定方差的 Wiener 噪声干扰的情况下,采用 4 次随机控制 Lyapunov 函数和递归设计方法,获得了对任意给定信号的依概率全局稳定的自适应跟踪,控制方案有效地抑制了不确定噪声的影响,使得跟踪误差在 4 次均方意义下收敛到一个可调整的小范围内.

$\sin t$, 参数真值 $\theta = 2$, 有关设计常数取 $c_1 = c_2 = 5$, $\mu = 120$, $\gamma = 0.5$, $u_{\max} = 200$, 计算初始值取为零, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $\hat{\theta}(0) = 0$. 设定值跟踪曲线如图 1 所示,其中实线是实际输出信号 y ,虚线是给定的需跟踪信号 y_r . 控制曲线如图 2 所示. 计算时间步长取 0.01 s, 时间轴以时间步长为单位. 为了保证计算稳定性,时间步长在计算过程中可作些调整.

当跟踪信号取成正弦信号 $y_r = 0.4 + 0.2\sin(t/2)$, 噪声方差 $\Delta(t) = 1$, 参数真值 $\theta = 2$, 饱和常数 $u_{\max} = 30$, 其它计算和设计常数取值不变, 计算初始值全取为零, 周期信号跟踪曲线如图 3 所示, 相应的控制曲线如图 4 所示.

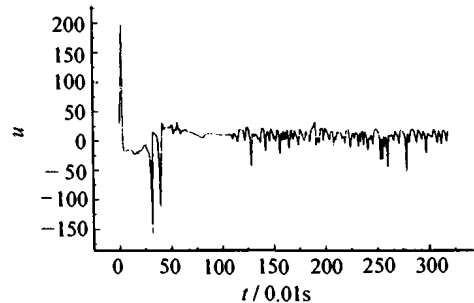


图2 跟踪常设定值的控制量
Fig. 2 Control in set point tracking

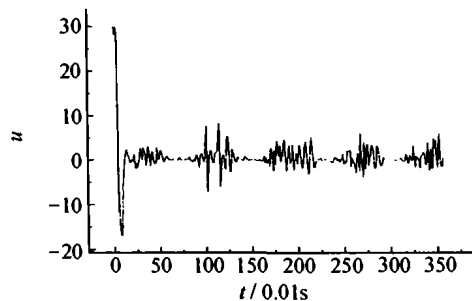


图4 跟踪周期信号的控制量
Fig. 4 Control in periodic signal tracking

参考文献(References):

- [1] KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P V, MORSE A S. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1991, 36(11): 1241 - 1253.
- [2] KRSTIC M, KOKOTOVIC P V. Adaptive nonlinear design with controller-identifier separation and swapping [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1995, 40(3): 426 - 440.
- [3] KOKOTOVIC P V, ARCAK M. Constructive nonlinear control: a historical perspective [J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 637 - 662.
- [4] SEPULCHRE R, JANKOVIC M, KOKOTOVIC P V. Integrator forwarding: a new recursive nonlinear robust design [J]. *Automatica*,

- 1997, 33(5): 979 - 984.
- [5] KHASMINSKII R Z. *Stochastic Stability of Differential Equations* [M]. Rockville, Maryland: Sijthoff & Noordhoff, 1980.
- [6] KUSHNER H J. Stochastic stability [A]. *Stability of Stochastic Dynamical Systems* [M]. [s. l.]: Springer-Verlag, 1972: 97 - 124.
- [7] FLORCHINGER P. A universal formula for the stabilization of control stochastic differential equations [J]. *Stochastic Analysis & Applications*, 1993, 11(12): 155 - 162.
- [8] FLORCHINGER P. Lyapunov-like techniques for stochastic stability [J]. *SIAM J Control Optimization*, 1995, 33(4): 1151 - 1169.
- [9] PAN Z, BASAR T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risksensitive cost criterion [A]. *Proc 1997 American Control Conf* [C]. [s. l.]: Albuquerque, NM, 1997: 1278 - 1282.
- [10] DENG H, KRSTIC M, WILLIAMS R J. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2001, 46(8): 1237 - 1253.
- [11] KRSTIC M, DENG H. *Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems* [M]. London: Springer-Verlag, 1998.
- [12] 季海波, 陈志福, 奚宏生, 等. 具有不确定 Wiener 噪声的随机非线性系统的自适应控制 [A]. 第 21 届中国控制会议 [C]. 杭州: 浙江大学出版社, 2002: 69 - 73.
- (JI H B, CHEN Z F, XI H S, et al. The adaptive control of stochastic nonlinear systems with uncertain Wiener noises [A]. *The 21th Chinese Control Conf* [C]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2002: 69 - 73.)
- [13] SONTAG E D. Smooth stabilization implies coprime factorization [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1989, 34(4): 435 - 443.
- [14] KHALIL H K. Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1996, 41(2): 177 - 188.
- [15] TEEL A R, PRALY L. Global stabilizability and observability imply semi-global stabilizability by output feedback [J]. *Systems and Control Letters*, 1994, 22(5): 313 - 325.

作者简介:

季海波 (1964 —), 男, 中国科技大学自动化系副教授, 主要从事非线性系统计算方法, 非线性控制, 鲁棒自适应控制等方面的研究. E-mail: jihb@ustc.edu.cn;

奚宏生 (1950 —), 男, 中国科技大学自动化系教授(博导), 主要从事于随机控制, 鲁棒控制, 离散事件动态系统等方面的研究. E-mail: xihs@ustc.edu.cn;

陈志福 (1976 —), 男, 中国科技大学自动化系硕士研究生. E-mail: zfcchen23@ustc.edu.cn;

王俊 (1963 —), 男, 中国科技大学自动化系博士研究生. E-mail: wangjun@ustc.edu.cn.

下期要目

- 参数未知的多个操作器的一种自适应控制算法 王永忠, 王红
- 电子超市网站链接结构优化的多目标模型 王有为, 汪定伟
- 多变量线性模型不确定系统终端滑模分解控制方法 冯勇, 郑雪梅, 鲍晟
- 一种新的免疫算法及其在多模态函数优化中的应用 张著洪, 黄席樾
- 带线性输出的一般非线性系统的观测器设计 潘海鹏, 柯挺, 戴文战
- 一类 Flow Shop 调度问题最优调度区间摄动鲁棒性 李建更, 涂肇生
- 离散系统状态和参数鲁棒滤波分离算法 史忠科
- 基于免疫算法的混沌多模型微扰控制 陆益民, 毛宗源, 张波
- 混合 H_2/H_∞ 鲁棒控制器设计 王进华
- 基于吸引域的总体极小化问题的神经网络求解 张全举, 曲小钢, 陈开周
- 直接转矩控制系统的稳定性问题和鲁棒控制器设计 夏超英
- 基于胞腔排除双种群遗传算法的泵站优化调度 廖莉, 张承慧, 林家恒, 李洪斌
- 模糊神经网络在移动机器人信息融合中的应用 张明路, 丁承君, 段萍
- 无级变速汽车的自适应模糊控制研究 王红岩, 王立公, 孙冬野
- 基于智能集成策略的烧结块残硫软测量模型 陈晓方, 桂卫华, 王雅琳, 吴敏, 阳春华