文章编号：1000-8152(2001)04-0597-04

基于极点与输出方差约束相容性分析的状态反馈*

王远钢　郭　治
（南京理工大学自动化系·南京，210094）

摘要：研究一类线性随机系统的满意状态反馈，期望闭环系统同时满足给定的圆形极点与输出方差约束。先分析这两类约束指标的相容性，利用线性矩阵不等式(LMI)方法，给出与极点指标相容的输出方差上界(或下界)指标的较好取值范围。然后，对具有相容极点与输出方差指标的控制问题，给出设计理论，特别对输出方差指标是区间的情形提出一种控制设计方法。算例对所得结果及所提设计方法作了说明。

关键词：状态反馈；极点配置；输出方差；相容性；LMI 方法
文献标识码：A

State Feedback Based on Consistency Analysis of Pole and Output-Variance Constraints

WANG Yuangang　and　GUO Zhi
(Automation Department, Nanjing University of Science & Technology · Nanjing, 210094, P.R.China)

Abstract: This paper studies satisfactory state-feedback control for a class of linear stochastic systems so that resulting closed-loop systems satisfy pre-specified circular-pole and output-variance constraints simultaneously. The consistency of constraint indices for output variance and pole is analyzed first. By means of linear matrix inequality (LMI) approach, a good range is presented for output-variance upper bound (and lower bound) index that is consistent to a given pole index. Then a control design theory is proposed for considered systems with consistent circular pole index and upper-bound index of output variance, furthermore, a control design technique is provided as the output-variance index is specified in terms of a certain region. Finally an example is given to illustrate the results obtained and the design scheme provided.

Key words: state-feedback; pole assignment; output-variance; consistency; LMI approach

1　引言(Introduction)

控制领域中有一大类系统，其精度指标可用系统的输出方差或其上界形式刻划[1,2]，文献[3,4]推广文献[5]提出的协方差配置控制技术，研究了受输出方差约束的控制问题。文献[6~8]将描述系统动态特性的区域极点指标融入协方差控制，讨论了具有圆形区域极点及状态(或输出)方差约束的控制问题。但其中控制设计方法都基于假设某个修正 Lyapunov 方程有正定解，这往往导致给定区域极点指标后，要求方差上界指标足够大。

本文对一类随机系统，先分析约束极点指标与输出方差指标的相容性，然后对上述两类相容约束的控制问题，给出相应的控制设计方法。具体而言，先利用 LMI 方法[9]，导出系统存在状态反馈使极点指标得以满足的两个充分必要条件，用 LMIs 约束的两个极值问题的解，给出系统的、与极点指标相容的输出方差上界及下界指标的取值范围。这可为工程论证人员设定该项精度指标提供理论依据，因为目前工程上往往只是凭经验设定这种指标的取值范围。然后对给定圆形极点指标及相容输出方差上界指标的控制问题，给出控制设计理论；并对输出方差指标是区间的情形提出一种有效设计方法，后者可为工程设计人员优化用输出方差表示的精度指标提供参考。

2　问题描述(Problem statement)

考虑如下线性时不变随机系统 (Σ)：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t), \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1}$$

的定常状态反馈控制

$$u(t) = Gx(t). \tag{2}$$

* 基金项目：南京理工大学科技发展基金(AB90836)资助项目。
收稿日期：1999-04-26；收修改稿日期：2000-04-17.

其中 $x(t)\in\mathbb{R}^{n_x}$ 为状态，$u(t)\in\mathbb{R}^{n_u}$ 为控制输入，$y(t)\in\mathbb{R}^{n_y}$ 为被控输出，$w(t)\in\mathbb{R}^{n_w}$ 为零均值、强度为 $W>0$ 的高斯白噪声，初始状态 $x(0)$ 与 $w(t)$ 不相关，G 为待定反馈增益阵，使闭环系统满足给定的极点与输出方差约束．对系统 (Σ)，作如下假设

(H_1)：(A,B) 可稳，(A,D) 可扰．

若反馈增益 G 使闭环系统 (Σ_{cl})：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=(A+BG)x(t)+Dw(t),\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}\tag{3}$$

渐近稳定，则其稳态状态协方差 X 及输出协方差 Y 必分别满足[5]

$$(A+BG)X+X(A+BG)^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}=0,\tag{4}$$

$$Y=CXC^{\mathrm{T}}.\tag{5}$$

其中

$$X:=\lim_{t\to\infty}X(t)=\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\{x(t)x(t)^{\mathrm{T}}\},\tag{6}$$

$$Y:=\lim_{t\to\infty}Y(t)=\lim_{t\to\infty}\mathrm{E}\{y(t)y(t)^{\mathrm{T}}\}.\tag{7}$$

本文除常用标准符号外，用 $F(q,r)$ 表示复平面上中心在 $-q+j0$、半径为 r 的圆盘 $(0<r<q)$，两同维向量的不等式 $M\leqslant N$ 表示对应分量同时成立，而对方阵 P，用 $\mathrm{diag}(P)$ 表示对角元素所成向量．

定义 1 给定圆盘 $F(q,r)$ 及向量 σ^2，若系统 (Σ) 存在反馈增益阵 G，使闭环系统 (Σ_{cl}) 同时满足如下圆形极点与输出方差上界（或下界）约束：

a) 闭环矩阵的极点集 $\Lambda(A+BG)\subset F(q,r)$；

b) 输出方差矩阵 Y 满足

$$\mathrm{diag}(Y)\leqslant\sigma^2(\text{或 }\mathrm{diag}(Y)\geqslant\sigma^2),$$

则称输出方差上界（或下界）指标 σ^2 与极点指标 $F(q,r)$ 相容．

本文目的：研究与极点指标 $F(q,r)$ 相容的输出方差上界指标及下界指标 σ^2 的取值范围，并对输出方差指标是上界情形及区间情形的控制问题，给出控制设计方法．

3 主要结论(Main results)

本节先给出系统 (Σ) 存在反馈增益使约束 a) 得以满足的、用 LMI 形式表示的充分必要条件，进而给出与约束 a) 相容的输出方差上界及下界指标的取值范围．然后，对具有相容极点指标与方差指标的控制问题，给出求取反馈增益的方法．

引理 1[9] 设有适维矩阵 P,R,S，且 $R>0$，则以下两矩阵不等式等价

$$P-SR^{-1}S^{\mathrm{T}}>0,\ \begin{bmatrix}P & S\\ S^{\mathrm{T}} & R\end{bmatrix}>0.$$

引理 2 设方阵 $P\geqslant R\geqslant 0$，S 是任意适维矩阵，则

$$SPS^{\mathrm{T}}\geqslant SRS^{\mathrm{T}}\geqslant 0.$$

证 显然只需证后一不等式即可．取与 R 同维矩阵 H：$HH^{\mathrm{T}}=R$，则有 $SRS^{\mathrm{T}}=(SH)(SH)^{\mathrm{T}}\geqslant 0$．

定理 1 存在反馈增益 G 使系统 (Σ_{cl}) 满足约束 a)，当且仅当矩阵变量 Q,G 的以下不等式组

$$(A+qI+BG)Q(A+qI+BG)^{\mathrm{T}}-r^2Q<0,\tag{8}$$

$$(A+BG)Q+Q(A+BG)^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}<0,\tag{9}$$

有解且 $Q>0$．又若 (Q,G) 是式(8)和式(9)的解且 $Q>0$，则 G 作为反馈增益其相应闭环系统 (Σ_{cl}) 的稳态状态方差阵 X 必满足关系：$X<Q$．

证 充分性．假设 (Q,G) 是式(8)和式(9)的解且 $Q>0$，固定 G，则得 Q 是式(8)的正定解，从而由离散 Lyapunov 稳定性理论即可推得 $(A+BG)$ 的特征值位于圆盘 $F(q,r)$ 内．

必要性．设系统 (Σ) 存在反馈增益 G 使约束 a) 得以满足，则由离散 Lyapunov 稳定性理论可得不等式(8)必有正定解．设 Q 是式(8)的任一正定解，展开式(8)，注意到 $q>r>0$，可得

$$(A+BG)Q+Q(A+BG)^{\mathrm{T}}<0.$$

对充分大的正数 λ，必有 λQ 同时满足式(8)和式(9)．

而比较式(4)与式(9)即得定理的最后部分．证毕．

令 $S:=GQ$，并利用引理 1，可得定理 1 的如下 LMI 形式的等价描述．

定理 2 系统 (Σ) 存在控制增益 G 使约束 a) 得以满足的充分必要条件是变量 (Q,S) 的以下 LMIs

$$\begin{bmatrix}-rQ & (A+qI)Q+BS\\ Q(A+qI)^{\mathrm{T}}+S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -rQ\end{bmatrix}<0,\tag{10}$$

$$AQ+QA^{\mathrm{T}}+BS+S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}+DWD^{\mathrm{T}}<0\tag{11}$$

有解．又若 (Q,S) 满足式(10)和式(11)，则 $G:=SQ^{-1}$ 作为反馈增益必使 (Σ_{cl}) 满足约束 a)，且相应稳态状态方差阵 X 必满足：$X<Q$．

记

$$\Omega_1=\{(Q,S):\text{满足式(10)和式(11)}\},$$

则 Ω_1 是凸集，可用 Matlab-LMI[10] 求出 Ω_1 中相应 $\min\{\mathrm{tr}(Q)\}$ 的极小阵 Q_L，从而 $\mathrm{diag}(Q_L)$ 可作为约束 a) 下闭环系统稳态状态方差的较小的上界指标，$\mathrm{diag}(CQ_LC^{\mathrm{T}})$ 则是稳态输出方差的较小上界指标．

推论 1 设系统 (Σ) 满足条件 (H_1)，则所有满

足 $\sigma^2 > \mathrm{diag}(CQ_LC^{\mathrm{T}})$ 的向量 σ^2 作为输出方差上界指标都与极点指标 $F(q,r)$ 相容.

证　由 Q_L 的定义,对任意 $\varepsilon > 0$,必有 $(Q,S) \in \Omega_1$,使得 $Q_L \leqslant Q \leqslant Q_L + \varepsilon I$. 从而由引理2得

$$\mathrm{diag}(CQC^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{diag}(CQ_LC^{\mathrm{T}}) + \varepsilon\,\mathrm{diag}(CC^{\mathrm{T}}).$$

选取较小正数 ε 可使上式右端小于σ^2,再由定理2得相应反馈增益 $G: = SQ^{-1}$,使约束 a) 被满足,且 $X < Q$,从而输出方差 Y 满足

$$\mathrm{diag}(Y) = \mathrm{diag}(CXC^{\mathrm{T}}) < \mathrm{diag}(CQC^{\mathrm{T}}) < \sigma^2.$$

于是可得如下定理,它对具有相容极点和输出方差上界指标的控制问题,提供了求取期望反馈增益的有效途径.

定理 3　设条件(H_1)成立,并给定极点和输出方差上界指标 a)和 b),且 $\sigma^2 > \mathrm{diag}(CQ_LC^{\mathrm{T}})$,则变量$(Q,S)$的以下 LMIs

$$\begin{bmatrix} -rQ & (A+qI)Q+BS \\ Q(A+qI)^{\mathrm{T}}+S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -rQ \end{bmatrix} < 0, \tag{12}$$

$$AQ + QA^{\mathrm{T}} + BS + S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} < 0, \tag{13}$$

$$\mathrm{diag}(CQC^{\mathrm{T}}) \leqslant \sigma^2 \tag{14}$$

有解,且由其任一可行解 (Q,S) 所构造的反馈增益 $G: = SQ^{-1}$ 必使闭环系统(Σ_{cl})同时满足约束 a)和 b).

又若系统 (Σ) 还满足条件

$$(\mathrm{H}_2):\qquad DWD^{\mathrm{T}} > 0,$$

则可得如下定理,其证明与定理1的类似.

定理 4　假设条件(H_1)和(H_2)成立,则系统(Σ)存在控制增益 G 使约束 a)得以满足,当且仅当矩阵变量 (Q,G) 的以下不等式

$$(A+qI+BG)Q(A+qI+BG)^{\mathrm{T}} - rQ < 0, \tag{15}$$

$$(A+BG)Q + Q(A+BG)^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} > 0 \tag{16}$$

有解且 $Q > 0$;若(Q,G)是式(15)和式(16)的解,且 $Q > 0$,则 G 作为反馈增益,其相应闭环(Σ_{cl})的稳态状态方差阵必满足 $X > Q$.

令 $S: = GQ$,则定理4可等价地描述如下.

定理 5　系统(Σ)存在反馈增益 G 使约束 a)被满足的充分必要条件是(Q,S)以下 LMIs

$$\begin{bmatrix} -rQ & (A+qI)Q+BS \\ Q(A+qI)^{\mathrm{T}}+S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & -rQ \end{bmatrix} < 0, \tag{17}$$

$$AQ + QA^{\mathrm{T}} + BS + S^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} > 0 \tag{18}$$

有解;又若 (Q,S) 是上述不等式组的解,则反馈增益 $G: = SQ^{-1}$必使(Σ_{cl})满足约束 a),且相应稳态状态方差阵 X 满足关系 $X > Q$.

令

$$\Omega_2 = \{(Q,S): 满足式(17)和式(18)\},$$

则 Ω_2 是凸矩阵集,记 Ω_2 中相应$\max\{\mathrm{tr}(Q)\}$的极大阵为 Q_U,则可得如下推论.

推论 2　设系统(Σ)满足条件(H_1)和(H_2),则对给定极点指标 $F(q,r)$,满足 $\sigma^2 < \mathrm{diag}(CQ_UC^{\mathrm{T}})$ 的向量 σ^2 作为输出方差下界指标都与极点指标相容.

某些实际系统往往希望输出方差位于某个区间范围内时某项性能更佳[1,2],所以下面对输出方差以如下区间形式给出的相应反馈控制问题,本文基于以上讨论,提出一种可行的控制设计方法.

$$\mathrm{b}')\qquad \rho^2 \leqslant \mathrm{diag}(Y) \leqslant \sigma^2,$$

其中 σ^2 满足 $\sigma^2 > \mathrm{diag}(CQ_LC^{\mathrm{T}})$.

步骤 1　找尽可能大的正定阵 Q_1,使 $Q_1 > Q_L$ 且

$$\mathrm{diag}(CQ_1C^{\mathrm{T}}) \leqslant \sigma^2.$$

步骤 2　用 Matlab-LMI[10] 求解受约束(12),(13)及 $Q < Q_1$ 的极值问题 $\max\{\mathrm{tr}(Q)\}$,并记 Q_* 为相应极大阵.

步骤 3　再用 Matlab-LMI 求解如下约束极值问题

$\min\{\mathrm{tr}(P)\}:(P,G)$ 满足

$$\begin{bmatrix} -r^2Q_* & A+qI+BG \\ (A+qI+BG)^{\mathrm{T}} & -Q_*^{-1} \end{bmatrix} < 0, \tag{19}$$

$$-P < (A+BG)Q_* + Q_*(A+BG)^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} < 0, \tag{20}$$

$$P > 0, \tag{21}$$

其中式(19)是式(8)在 $Q = Q_*$ 时的等价形式.

记(P_*, G_*)是相应极小值的矩阵对,则有

$$-P_* \leqslant (A+BG_*)Q_* + Q_*(A+BG_*)^{\mathrm{T}} + DWD^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \tag{22}$$

从而相应增益阵 G_* 的稳态状态方差矩阵 X_* 满足

$$-P_* \leqslant (A+BG_*)(Q_*-X_*) + (Q_*-X_*)(A+BG_*)^{\mathrm{T}} \leqslant 0, \tag{23}$$

通过上述处理,可降低 $\mathrm{diag}(X)$与 $\mathrm{diag}(Q_*)$(从而可降低 $\mathrm{diag}(Y)$与 $\mathrm{diag}(CQ_*C^{\mathrm{T}})$)的间隔.

4　算例(Numerical example)

设系统 (Σ) 中的系数矩阵如下

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ W = I,$$

而极点约束区域为 $F(q,r) = F(3,2)$. 可以验证系统满足条件(H_1)和(H_2).

算得 Ω_1 中相应 $\min\{\mathrm{tr}(Q)\}$ 的极小阵 Q_L 为

$$Q_L = \begin{bmatrix} 0.3603 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1003 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1003 \end{bmatrix},$$

从而所有满足

$$\sigma^2 > \sigma_L^2 := \mathrm{diag}(CQ_LC^T) = [0.1003, 0.1003]$$

的 σ^2 作为输出方差上界指标都与极点指标 $F(3,2)$ 相容. 而 Ω_2 中相应 $\max\{\mathrm{tr}(Q)\}$ 的极大阵 Q_U 为

$$Q_U = \begin{bmatrix} 0.3591 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4984 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4984 \end{bmatrix}.$$

因而所有满足

$$\sigma^2 < \sigma_U^2 := \mathrm{diag}(CQ_UC^T) = [0.4984, 0.4984]$$

的 σ^2 作为输出方差下界指示都与极点指标 $F(3,2)$ 相容.

再设 b′)类约束 $\rho^2 \leqslant \mathrm{diag}(Y) \leqslant \sigma^2$ 中

$$\rho^2 = [0.35, 0.40],\ \sigma^2 = [0.4, 0.45].$$

下面利用所提方法求期望反馈增益. 取对角阵 Q_1:

$$\mathrm{diag}(Q_1) = [0.361, 0.4, 0.45],$$

求得

$$Q^* = \begin{bmatrix} 0.3605 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3998 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3997 \end{bmatrix},\ P_* = \begin{bmatrix} 0.0020 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_* = \begin{bmatrix} 0 & -2.2506 & -1.0000 \\ 0 & 0 & -2.111 \end{bmatrix},\ X_* = \begin{bmatrix} 0.36 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3998 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4497 \end{bmatrix},$$

此时 $A + BG_*$ 的特征值分别为 $-1.1119, -1.2506, -2$, 而 $\mathrm{diag}(Y_*) = \mathrm{diag}(CX_*C^T) = [0.3998, 0.4497]$. 可见 G_* 是一个期望的状态反馈增益阵.

5 总结(Conclusion)

本文利用LMI方法,对一类线性随机系统的约束状态反馈控制,先研究了稳态输出方差指标与极点指标的相容性,给出了与圆形极点指标相容输出方差指标的较好取值范围,在此基础上给出了有效的控制设计方法,使闭环系统同时满足给定的相容极点指标与输出方差上界(或区间)指标. 所提控制设计方法,可用流行的计算软件,如 Matlab-LMI[10] 有效求解.

参考文献(References)

[1] Guo Zhi and Xu Gang. Shooting response time of image stabilizer tank fire control system [J]. Fire and Command Control, 1988, 13(1): 14 - 18 (in Chinese)

[2] Meerkov S M and Runolfsson T. Output residence time control [J]. IEEE Trans. Automatic Control, 1989, 34(11): 1171 - 1176

[3] Wang Zidong, Li Luowen and Guo Zhi. Spacecraft intercept control with output covariance assignment [J]. Journal of Astronautics, 1996, 17(3): 9 - 14 (in Chinese)

[4] Wang Zidong, Shan Ganling and Guo Zhi. Design of vehicle vibration control systems based on output covariance assignment [J]. Fire and Command Control, 1996, 21(4): 27 - 31 (in Chinese)

[5] Hotz A and Skelton R E. Covariance control thorey [J]. Int. J. Control, 1987, 46(1): 13 - 32

[6] Wang Zidong, Chen Xueming, Guo Zhi. Controller design for continuous systems with variance and circular pole constraints [J]. Int. J. Systems Science, 1995, 26(5): 1249 - 1256

[7] Wang Zidong and Guo Zhi. Circular pole and variance constrained design for linear discrete systems [J]. Control Theory and Applications, 1997, 14(1): 105 - 111

[8] Zhu Jihong and Guo Zhi. Design of PI regulator with output variance and circular region pole assignment constraints [J]. J. of Nanjing University of Science and Technology, 1995, 19(6): 529 - 532 (in Chinese)

[9] Boyd S, Ghaoui El, Feron E and Balakhrishnan V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994

[10] Gahinet P, Nemirovsky A, Laub A J and Hilali M. LMI Control Toolbox [CP/CD]. Massachusetts: The Math Works Inc., 1995

本文作者简介

王远钢 1964年生. 讲师、博士生. 主要研究领域为控制系统期望指标集的相容性、随机系统的满意控制与估计.

郭 治 1937年生. 1961年毕业于哈尔滨军事工程学院, 现为南京理工大学自动控制理论与工程专业教授, 博士生导师. 国务院学位委员会控制科学与工程学科评议组成员, 中国兵工学会理事. 目前主要研究领域: 随机系统的满意控制与估计.