文章编号: 1000 - 8152(2001)02 - 0263 - 03

不确定性关联时滞大系统的分散鲁棒控制——LMI 方法*

谢永芳 桂卫华 吴 敏 陈 宁
(中南工业大学信息科学与工程学院·长沙, 410083)

摘要: 对一类满足匹配条件的不确定性关联时滞大系统, 根据 Lyapunov 稳定性原理, 给出了其可分散状态反馈镇定的充分条件, 即一组线性矩阵不等式(LMI)有解. 在此基础上, 通过求解一凸优化问题, 提出了具有较小反馈增益的分散稳定化状态反馈控制律的设计方法. 文中最后用示例说明了该方法的应用与优越性.

关键词: 不确定性; 时滞; LMI; 分散控制; 鲁棒性
文献标识码: A

Decentralized Robust Control for Large Scale Interconnected Uncertain Systems with Time-Delay - LMI Approach

XIE Yongfang, GUI Weihua, WU Min and CHEN Ning
(College of Information Science and Engineering, Central South University of Technology · Changsha, 410083, P.R.China)

Abstract: For a class of interconnected time-delay uncertain systems, which satisfy the matching conditions, a sufficient condition for decentralized stabilization feedback control laws is derived based on Lyapunov stability theorem. This condition is expressed as the solvability problem of linear matrix inequalities. Based on that, a convex optimization problem with LMI constraints is formulated to design a decentralized state feedback control with smaller gain parameters which enables the closed-loop system asymptotically stable. The given examples show the application and the superiority of the method.

Key words: uncertainties; time-delay; linear matrix inequality; decentralized control; robustness

1 引言(Introduction)

由于其实现的可靠性、实时性和经济性, 分散控制成为大系统理论中一个十分活跃的分支[1]. 由于信息传输和测量的不灵敏性, 系统中关联会出现时滞, 具有关联滞后动态大系统鲁棒镇定问题已为众多学者关注[2~5]; 系统模型中常含有不确定性, 按照标称参数设计的控制器可能达不到预期的性能, 不确定性关联大系统鲁棒镇定问题引起了控制界的重视[6~9], 因此, 对不确定性关联时滞大系统的研究更具有理论价值和实际意义. 所有上述文献仅单独考虑系统的不确定性或时滞, 而且除文献[9]外都是以黎卡提方程或黎卡提不等式的形式给出充分条件, 求解时需预先调整多个参数, 因而计算复杂, 应用不便.

近几年, LMI 方法已成为鲁棒控制分析与设计的重要方法[10], 本文利用 LMI 方法计算上的优越性来研究不确定性关联时滞大系统的分散鲁棒稳定化问题, 在国内外文献中很少见这方面的报道. 针对一类满足匹配条件的不确定性关联时滞大系统, 得到了求解简便的分散状态反馈镇定的 LMI 条件, 并给出了具有较小反馈增益参数的控制律的设计方法, 用 LMI 工具软件可直接求解. 该方法求解简单, 应用方便.

2 问题描述及引理(Problem description and lemmas)

考虑一类由 N 个子系统 L_i 构成的满足匹配条件的不确定性关联时滞大系统 L, 其子系统方程为

$$L_i: \dot{x}_i(t) = [A_i + B_i\Delta A_i(r_i(t))]x_i(t) + [B_i + B_i\Delta B_i(s_i(t))]u_i(t) + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}x_j(t - \tau_{ij}),$$
$$i = 1, 2, \cdots, N, \tag{1}$$

式中, $x_i(t) \in \mathbb{R}^{ni}$ 为状态向量, $u_i(t) \in \mathbb{R}^{mi}$ 为控制向量; A_i, B_i 是维数适当的标称矩阵; $\Delta A_i(r_i(t))$, $\Delta B_i(s_i(t))$ 是与 A_i, B_i 维数相容的关于 $r_i(t), s_i(t)$ 连续的不确定性; A_{ij} 为第 j 个子系统对第 i 个子系统的关联作用矩阵, $\tau_{ij} \geqslant 0$ 表示关联项中的滞后时间.

* 基金项目: 国家 863 应用基础研究(863 - 511 - 9845 - 003; 863 - 511 - 945 - 014)资助项目.
收稿日期: 1999 - 07 - 12; 收修改稿日期: 2000 - 03 - 06.

假设 $r_i(t) \in \mathbb{R}^{l_{ri}}, s_i(t) \in \mathbb{R}^{l_{si}}$ 分别在勒贝格可测的紧集 R_i 和 S_i 中变化

$$\begin{aligned} R_i &= :\{r \mid |r_{ij}| \leqslant \bar{r}_i, j = 1,\cdots,l_{ri}\}, \\ S_i &= :\{s \mid |s_{ij}| \leqslant \bar{s}_i, j = 1,\cdots,l_{si}\}, \end{aligned} \quad i = 1,\cdots,N. \tag{2}$$

将 ΔA_i 和 ΔB_i 表示为秩 1 矩阵的和，即

$$\begin{aligned} \Delta A_i(r_i(t)) &= \sum_{j=1}^{l_{ri}} A_{ij}\bar{r}_{ij}, \\ \Delta B_i(s_i(t)) &= \sum_{j=1}^{l_{si}} B_{ij}s_{ij}, \end{aligned} \quad i = 1,\cdots,N. \tag{3}$$

其中 A_{ij}, B_{ij} 满足

$$A_{ij} = d_{ij}e_{ij}^{\mathrm{T}}, \quad B_{ij} = f_{ij}g_{ij}^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

$d_{ij}, e_{ij}, f_{ij}, g_{ij}$ 是秩均为 1 的矢量，为表达方便，引用以下符号

$$\begin{aligned} T_i &= :\bar{r}_i\sum_{j=1}^{l_{ri}} d_{ij}d_{ij}^{\mathrm{T}}, \quad U_i = :\bar{r}_i\sum_{j=1}^{l_{ri}} e_{ij}e_{ij}^{\mathrm{T}}, \\ V_i &= :\bar{s}_i\sum_{j=1}^{l_{si}} f_{ij}f_{ij}^{\mathrm{T}}, \quad Q_i = :\bar{s}_i\sum_{j=1}^{l_{si}} g_{ij}g_{ij}^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{5}$$

假定各个子系统的状态都是可以直接测量得到的，本文的目的是对每一个子系统设计一个局部无记忆状态反馈控制律

$$u_i(t) = K_i x_i(t), \tag{6}$$

其中 $K_i \in \mathbb{R}^{mi\times ni}$ 为局部反馈增益矩阵，使所得出的闭环复合大系统

$$L_i: \dot{x}_i(t) = [A_i + B_i\Delta A_i(r_i(t))]x_i(t) + [B_i + B_i\Delta B_i(s_i(t))]K_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}x_j(t - \tau_{ij}) \tag{7}$$

稳定．若这样的控制律(6)存在，则称系统(1)是分散能稳定化的，相应的控制律(6)称为系统(1)的一个分散稳定化控制律．

在以下讨论中，引进一个两值函数 $\delta(\cdot)$，定义为

$$\delta(E) = \begin{cases} 0, & E = 0, \\ 1, & E \neq 0. \end{cases}$$

下面先给出文中用到的引理．

引理 1 设 Y 和 Q 是具有适当维数的向量或矩阵，其中 $Q > 0, \alpha, \beta$ 是给定的正数，则有

$$Y^{\mathrm{T}}Y < \alpha I \text{ 当且仅当} \begin{bmatrix} -\alpha I & Y^{\mathrm{T}} \\ Y & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$Q^{-1} < \beta I \text{ 当且仅当} \begin{bmatrix} Q & I \\ I & \beta I \end{bmatrix} > 0.$$

3 分散稳定化控制器设计(Decentralized stabilizing controller design)

下述定理给出了不确定性关联时滞大系统(1)能分散稳定化的 LMI 条件．

定理 1 对大系统(1)，如果存在矩阵 $Y_i \in \mathbb{R}^{mi\times ni}$，对称正定矩阵 $X_i, Z_i \in \mathbb{R}^{ni\times ni}$ 及正数 α_i, β_i 使得线性矩阵不等式组(8)～(10)成立，则大系统(1)是分散能稳定化的，且具有以上矩阵 $K_i = Y_iX_i^{-1}$ 作为局部反馈增益矩阵的状态反馈控制律(6)是系统(1)的一个分散稳定化控制律．

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_i & A_{i1}X_1 & A_{i2}X_2 & \cdots & A_{iN}X_N \\ X_1A_{i1}^{\mathrm{T}} & -\delta(A_{i1})Z_1 & & & \\ X_2A_{i2}^{\mathrm{T}} & & -\delta(A_{i2})Z_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ X_NA_{iN}^{\mathrm{T}} & & & & -\delta(A_{iN})Z_N \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} -\alpha_i I & X_iU_i^{\frac{1}{2}} \\ U_i^{\frac{1}{2}}X_i & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} -\beta_i I & Y_iQ_i^{\frac{1}{2}} \\ Q_i^{\frac{1}{2}}Y_i^{\mathrm{T}} & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

$$(i = 1,2,\cdots,N)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{A}_i &= X_iA_i^{\mathrm{T}} + A_iX_i + Y_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} + B_iY_i + B_iT_iB_i^{\mathrm{T}} + \\ &\quad B_iV_iB_i^{\mathrm{T}} + \alpha_iI + \beta_iI + \delta_iZ_i, \\ \delta_i &= \sum_{j=1}^{N}\delta(A_{ji}). \end{aligned}$$

定理 1 给出了大系统(1)存在分散鲁棒稳定化控制器的 LMI 条件，但所得的反馈增益难以保证尽可能的小．在实际工程应用中，为了保证系统良好的动态性能和抑制测量噪声，这时可采用文[9]介绍的方法来获得具有较小反馈增益的控制律．

为求较小反馈增益矩阵，考虑

$$Y_i^{\mathrm{T}}Y_i < \theta_iI, \quad X_i^{-1} < \gamma_iI, \tag{11}$$

其中 $\theta_i > 0, \gamma_i > 0$，则 $K_i^{\mathrm{T}}K_i = \theta_iX_i^{-1}Y_i^{\mathrm{T}}Y_iX_i^{-1} < \theta_i\gamma_i^2I$．故可通过使得 θ_i, γ_i 的极小化来获得具有较小增益的反馈矩阵．

由引理 1 知式(11)等价于

$$\begin{bmatrix} -\theta_iI & Y_i^{\mathrm{T}} \\ Y_i & -I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & \gamma_iI \end{bmatrix} > 0 \tag{12}$$

成立．因此，关联大系统(1)具有较小反馈增益的分

散控制律可由下述优化问题求解

$$\min\left(\sum_{i=1}^{N}\theta_i+\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\right), \tag{13}$$

约束条件为式(8)~(10)和式(12).

这是一个具有 LMIs 约束的凸优化问题,因此,可以应用 MATLAB 中的 LMI 工具软件中的 mincx 命令求解之.若该问题有解,则 $K_i = Y_iX_i^{-1}$ 提供了一个具有较小反馈增益参数的分散稳定化控制律.

当 $\Delta A_i(r_i(t)) = 0, \Delta B_i(s_i(t)) = 0$ 时,系统(1)为一关联时滞大系统.放松定理 1 中关于不确定项的约束,可得到纯关联时滞大系统的具有较小反馈增益的分散稳定化控制器的设计方法.

推论 1　对于(1)式描述的关联时滞大系统,当不考虑系统的不确定性时,其具有较小反馈增益的分散稳定化控制律可由(13)优化问题求解,约束条件为(8)~(10)和(12).

当 $\tau_{ij} = 0$ 时,系统(1)为一不确定性大系统.若系统的关联项满足匹配条件,其分散稳定化控制器的设计方法见文献[9].

4　仿真研究(Numerical study)

考虑由文献[5,4,3]研究的关联时滞大系统,其中

$$A_1=\begin{bmatrix}-2&0\\-2&-1\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&-4&-1\\1&1&0\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\\0&1\end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}-1&-2\\3&6\\1&2\end{bmatrix},\quad A_{23}=\begin{bmatrix}-1&0\\3&0\\1&0\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0&1\\-1&-2\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ A_{31}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}.$$

易知该系统的关联矩阵满足匹配条件,根据文献[5]的结论,该大系统是能分散状态反馈稳定化的.将应用本文方法(推论 1)得到的分散增益矩阵和用现有方法得到的结果一并列于表 1.通过比较可知,由本文方法所得的分散稳定化控制器具有较小的增益参数,且不需要解黎卡提方程和预先选择任何参数.

表 1　本文方法与现有方法的比较

Table 1　Comparison between this paper and the existed literature

方法	所得结果	方法	所得结果
本文推论 1 方法	$K_1=[-0.8256\quad -0.9253]$, $K_2=\begin{bmatrix}-1.2284&-1.0642&-0.6953\\0.0323&-1.4437&-1.7995\end{bmatrix}$, $K_3=\begin{bmatrix}-2.5656&-0.1959\\-0.1959&-1.7364\end{bmatrix}$.	文献[4]方法	$K_1=[-3.015\quad 1.5587]$, $K_2=\begin{bmatrix}-2.3047&-1.8161&-0.9642\\0.7439&-2.2917&-4.2769\end{bmatrix}$, $K_3=\begin{bmatrix}-4.5816&-0.1580\\-0.1580&-3.0439\end{bmatrix}$.
文献[5]方法	$K_1=[-1.5869\quad -0.8421]$, $K_2=\begin{bmatrix}-1.2781&-1.0562&-0.7351\\0.0125&-1.5694&-2.6924\end{bmatrix}$, $K_3=\begin{bmatrix}-2.5831&-0.3736\\-0.3736&-1.7043\end{bmatrix}$.	文献[3]方法	$K_1=[-4.7897\quad -2.3483]$, $K_2=\begin{bmatrix}-3.9110&-3.0098&-1.2885\\1.0828&-3.3971&-6.1532\end{bmatrix}$, $K_3=\begin{bmatrix}-6.4879&-0.1251\\-0.1251&-4.8069\end{bmatrix}$.

5　结论(Conclusion)

对满足匹配条件的不确定关联滞后大系统,用 LMI 方法研究了其能分散线性状态反馈控制镇定问题.通过建立受 LMIs 约束的 LMI 问题,用 LMI 工具软件可方便求出分散反馈增益阵.文中用例子说明了该方法没有参数调整的过程,求解应用方便,值得在国内推广.

参考文献(References)

[1]　Jamshidi M. Large-Scale Systems, Modeling and Control [M]. Amsterdam, North Holland: Elsevier Science Publishing Co. Inc., 1983

[2]　Furukawa T and Shimemura E. Stabilization conditions by memoryless feedback for linear systems with time-delay [J]. Int. J. Contr., 1983, 37(3): 353 - 365

[3]　Lee T N and Radovic U L. Decentralized stabilization of linear continuous and discrete-time systems with delay in interconnections [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1998, 33(8): 757 - 761

[4]　Trinh H and Aldeen M A. A comment on decentralized stabilization of large scale interconnected systems with delays [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1995, 40(5): 914 - 916

[5]　Yu L and Chen G D. Decentralized stabilizing controller design for a class of interconnected systems with delays [J]. Control and Decis-

(下转第 269 页)

图 2 为设计所得的全局最优鲁棒控制器的奇异值 Bode 图，图 3 为参数 $r_1(t)$，$r_2(t)$ 分别摄动到 ± 1.5，± 2时的闭环系统 $T_{w_2z_2}$ 的奇异值 Bode 图，由图 3 可以看出系统性能达到指标 $\gamma_{\min} = 0.30182$ 且具有鲁棒性.

5 结论(Conclusions)

1) 本文在证明过程中，把常值对角标定问题等价为一个一般的 H_∞ 问题，由此给出了全局最优鲁棒控制器的设计方法，使得在求解全局最优鲁棒性能时，从求解结果可以设计出相应的控制器.

2) 本文对常值对角标定系统的研究是结合参数不确定系统进行的，其实对一般的不确定系统，不确定性用范数来表示时，其鲁棒性能问题都可用常值标定的方法来处理[1,2]. 如果块对角的不确定性结构摄动中每个摄动块均为满块，则标定阵为常值对角阵. 同样可应用三角覆盖算法，用 LMI 来求解，所以本文有一定的普遍性.

参考文献(References)

[1] Megretski A. Necessary and sufficient condition of stability: a multi-loop generalization of the circle criterion [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1993, 38(5): 753 – 756

[2] Shamma J S. Robust stability with time-varying structured uncertainty [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1994, 39(3): 714 – 724

[3] Rotea M A and Iwasaki T. An alternative to the *D-K* iteration? [A]. Proc. American Control Conf. [C], Baltimore, Maryland, 1994, 53 – 57

[4] Yamamada Y and Hara S. Global optimization for H_∞ control with constant diagonal scaling [J]. IEEE Trans. Automat. Contr., 1998, 43(2): 191 – 202

[5] Yamamada Y, Hara S and Fujioka H. Global optimization for constantly scaled H_∞ control problem [A]. Proc. American Control Conf. [C], Seattle, Washington, 1995, 427 – 430

[6] Yamamada Y and Hara S. An LMI approach to local optimization for constantly scaled H_∞ control problems [J]. Int. J. Control, 1997, 67(2): 233 – 250

[7] Gahinet P and Apkarian P. An LMI-based parameterization of all H_∞ controllers with applications [A]. Proc. IEEE Conf. Decision Contr. [C], San Antonio, Texas, 1993, 656 – 661

[8] Schmitendorf W E. Design methodology for robust stabilizing controllers [J]. AIAA J. Guidance, Contr. Dynamics, 1987, 10(3): 250 – 254

[9] Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J and Chilali M. LMI Control Toolbox [M]. Natick, Mass.: The Math Works Inc., 1995

本文作者简介

李连锋　1974 年生. 哈尔滨工业大学控制工程系博士研究生. 1998 年于哈尔滨工业大学电气工程系取得硕士学位，致力于电机工程的研究. 目前研究方向为鲁棒控制系统设计，H_∞ 控制.

王广雄　1933 年生. 1957 年哈尔滨工业大学研究生毕业，现为哈尔滨工业大学教授、博士生导师. 研究方向为 H_∞ 控制理论及应用，高精度伺服系统的设计和实践.

姚　远　1973 年生. 1998 年在哈尔滨工业大学控制工程系获硕士学位. 现为香港城市大学研究生. 主要研究方向为鲁棒控制及滤波，计算数学复杂性和视觉.

(上接第 265 页)

ion, 1997, 12(5): 559 – 564 (in Chinese)

[6] Chen Y H, Leitmann G and Kai X Z. Robust control design for interconnected system with time-varying uncertainties [J]. Int. J. Contr., 1991, 54(5): 1119 – 1142

[7] Lin S and Sunil K S. Decentralized control for interconnected uncertain systems: extensions to higherorder uncertainties [J]. Int. J. Contr., 1993, 57(6): 1453 – 1468

[8] Wu H S. Decentralized robust control for a class of large-scale interconnected systems with uncertainties [J]. Int. J. Syst. Sci., 1989, 20(12): 2597 – 2603

[9] Xie Y F, Gui W H, Liu X Y and Wu M. Decentralized robust stabilizing control design for interconnected time-varying uncertain systems [J]. Control Theory and Applications, 1999, 16(6): 903 – 906 (in Chinese)

[10] Boyd S, Ghaoui L El and Feron E, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994

本文作者简介

谢永芳　1972 年生. 1999 年毕业于中南工业大学信息科学与工程学院，获工学博士学位. 主要研究方向为分散控制和鲁棒控制，H_∞ 控制理论及应用，生产过程控制.

桂卫华　见本刊 2001 年第 1 期第 130 页.

吴　敏　1963 年生. 教授，博士生导师. 目前主要研究方向是鲁棒控制，智能控制和非线性控制.

陈　宁　1970 年生. 1995 年获中南工业大学自控系工学硕士学位，现为该校信息科学与工程学院教师，在读博士. 研究方向为 LMI 方法及应用，大系统分散控制，H_∞ 控制和结构奇异值控制.