文章编号: 1000-8152(2004)02-0299-03

不确定模糊 Delta 算子系统的鲁棒 H_∞ 控制

向峥嵘[1], 张端金[2], 陈庆伟[1], 胡维礼[1]
(1.南京理工大学 自动化系, 江苏 南京 210094; 2.郑州大学 信息工程学院, 河南 郑州, 450052)

摘要: 研究了一类 T-S 模糊 Delta 算子系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 首先利用 LMI 形式给出了模糊 Delta 算子系统鲁棒镇定的充分条件, 然后构造了可使闭环系统鲁棒稳定且对可允许的参数变化满足 H_∞ 性能的状态反馈控制律. 本文结果统一了连续与离散模糊系统的鲁棒 H_∞ 镇定设计结论, 数值算例说明了方法的可行性.

关键词: 模糊系统; Delta 算子; 不确定性; H_∞ 控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Robust and H-infinity control for a class of fuzzy systems using Delta operator

XIANG Zheng-rong[1], ZHANG Duan-jin[2], CHEN Qing-wei[1], HU Wei-li[1]
(1. Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Jiangsu Nanjing 210094, China;
2. College of Information Engineering, Zhengzhou University, Henan Zhengzhou 450052, China)

Abstract: A robust H-infinity control scheme is developed for a class of T-S fuzzy systems using the Delta operator. First, the sufficient conditions for robust stabilization is presented by using the linear matrix inequalities (LMIs). Then, a design method is proposed for the state feedback controller that guarantees the stability of the closed-loop system and satisfies the prescribed H-infinity performance for the tolerable variations of parameters. The results have unified the continuous-time and discrete-time fuzzy systems into the Delta operator framework. An illustrative example shows the feasibility of the proposed method.

Key words: fuzzy systems; Delta operator; uncertainties; H-infinity control; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

传统的 z 变换离散化方法在采样周期很小时, 会导致采样系统的所有极点位于稳定边界上, 在有限字长的计算机中实现时, 会引起量化误差、极限环震荡等数值不稳定问题, 且易于引入非最小相位零点, 使得离散化后的系统稳定性变差. 为此, Goodwin[1]等建议采用 Delta 算子来离散化系统, 在快速采样情形下使其离散模型趋近于原来的连续模型. Delta 算子现已成为连续时间模型和离散时间模型的统一描述方法, 既避免了 z 变换方法引起的数值不稳定问题, 又使得传统的用于连续域的各类设计方法可直接用于离散域设计[2~5]. 本文将 Delta 算子方法与 T-S 模型相结合, 探讨了一类具有参数不确定性的 T-S 型模糊 Delta 算子系统的状态反馈鲁棒 H_∞ 镇定设计问题, 给出了系统可进行鲁棒 H_∞ 镇定的充分条件及相应的状态反馈控制器实现形式.

2 问题的描述(Problem statement)

考虑下列由 Delta 算子描述的不确定 T-S 型模糊系统

R^i: if $x_1(t)$ is F_1^i, $x_2(t)$ is F_2^i $\cdots$ and $x_n(t)$ is F_n^i,

$$\text{then}\begin{cases}\delta x(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) + G_i v(t), \\ z(t) = C_i x(t).\end{cases} \tag{1}$$

其中: δ 表示 Delta 算子, 其定义见文献[1], R^i 表示第 i 条规则, $F_j^i(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 是模糊集合, l 是规则数, $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 为输入, $v(t) \in \mathbb{R}^q$ 为平方可积的干扰输入, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ 为控制输出, A_i, B_i, G_i, C_i 是具有适当维数的已知常阵, ΔA_i, ΔB_i 表示不确定矩阵, 其满足如下范数有界形式

$$[\Delta A_i, \Delta B_i] = D_i F_i(t)[E_{1i}, E_{2i}].$$

其中: D_i, E_{1i}, E_{2i} 是适当维数的已知常阵; $F_i(t)$ 是

收稿日期: 2002-08-01; 收修改稿日期: 2003-05-02.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60174019); 河南省自然科学基金项目(0311011600).

未知的函数矩阵,其元素 Lebesgue 可测,且满足条件 $F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t) \leqslant I$.

若模糊化采用单点模糊集合,清晰化采用加权平均法,则可得系统状态方程为

$$\begin{cases}\delta x(t) = \sum_{i=1}^{l} h_i(x(t))[(A_i + \Delta A_i)x(t) + \\ \qquad (B_i + \Delta B_i)u(t) + G_i v(t)], \\ z(t) = \sum_{i=1}^{l} h_i(x(t))C_i x(t).\end{cases} \tag{2}$$

其中: $\mu_j^i(x_j)$ 表示 F_j^i 关于 $x_j(t)$ 的隶属函数,

$$h_i(x) = \mu^i(x)/\sum_{i=1}^{l}\mu^i(x),\ \mu^i(x) = \prod_{j=1}^{n}\mu_j^i(x_j).$$

状态反馈模糊控制器为

$$u(t) = \sum_{i=1}^{l} h_i(x(t))K_i x(t). \tag{3}$$

本文的目的是对系统(2)设计状态反馈模糊控制器(3),使得: 1) 当 $v(t) = 0$ 时,闭环系统是渐近稳定的; 2) 在零初始条件下,对任意的外界干扰输入 $v(t) \in L_2[0,\infty)$,被控输出 $z(t)$ 满足 $\|z(t)\|_2 \leqslant \alpha\|v(t)\|_2$. 其中: $\alpha > 0$ 为预先给定的 H_∞ 性能指标, $\|\cdot\|_2$ 为 $L_2[0,\infty)$ 范数,其定义为

$$\|v(t)\|_2 = [\int_{t=0}^{\infty} v^{\mathrm{T}}(t)v(t)\mathrm{d}t]^{1/2}.$$

引理 1[6] 对于任意 $m \times n$ 实矩阵 X, Y 及正数 $\varepsilon > 0$,有 $X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leqslant \varepsilon X^{\mathrm{T}}X + \varepsilon^{-1}Y^{\mathrm{T}}Y$.

引理 2[7] 对于维数适当的任意常阵 D, E 和对称常阵 S,若 $S + DFE + E^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} < 0$,其中 $F(t)$ 满足条件 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant R$,当且仅当存在常数 $\varepsilon > 0$,使得 $S + \varepsilon^{-2}E^{\mathrm{T}}RE + \varepsilon^2 DD^{\mathrm{T}} < 0$.

引理 3 如果存在对称正定阵 P,使得下列 l 个不等式满足

$$A_i^{\mathrm{T}}P + PA_i + TA_i^{\mathrm{T}}PA_i < 0,\ i = 1,2,\cdots,l, \tag{4}$$

则模糊 Delta 算子系统 $\delta x(t) = \sum_{i=1}^{l} h_i(x(t))A_i x(t)$ 是渐近稳定的. 其中 T 为采样周期.

证 略.

3 主要结果(Main results)

定理 1 考虑如下模糊 Delta 算子系统

$$\begin{cases}\delta x(t) = \sum_{i=1}^{l} h_i(x(t))(A_{ci}x(t) + G_{ci}v(t)), \\ z(t) = \sum_{i=1}^{l} h_i(x(t))C_{ci}x(t).\end{cases} \tag{5}$$

对给定的 H_∞ 性能指标 $\alpha > 0$,如果存在对称正定阵 X,使得由

$$\begin{cases}\begin{bmatrix} -X & T^{1/2}XC_{ci}^{\mathrm{T}} & X(TA_{ci}+I)^{\mathrm{T}} \\ T^{1/2}C_{ci}X & -I & 0 \\ (TA_{ci}+I)X & 0 & -X+\alpha^{-2}TG_{ci}G_{ci}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} < 0, \\ i = 1,2,\cdots,l\end{cases} \tag{6}$$

给出的一组 LMI 有可行解,则系统(5)稳定,且对任意干扰输入 $v(t) \in L_2[0,\infty)$,被控输出 $z(t)$ 满足 $\|z(t)\|_2 \leqslant \alpha\|v(t)\|_2$.

证 取 $X = P^{-1}$,由 Schur 补定理得式(6)等价为

$$\begin{cases}(TA_{ci}+I)^{\mathrm{T}}(P^{-1}-\alpha^{-2}TG_{ci}G_{ci}^{\mathrm{T}})^{-1}(TA_{ci} + \\ I) - P + TC_{ci}^{\mathrm{T}}C_{ci} < 0, \\ \alpha^2 I - TG_{ci}^{\mathrm{T}}PG_{ci} > 0,\ i = 1,2,\cdots,l.\end{cases} \tag{7}$$

由矩阵逆公式知, $A_{ci}^{\mathrm{T}}P + PA_{ci} + TA_{ci}^{\mathrm{T}}PA_{ci} < 0$, 于是由引理 3 可得系统(5)稳定.

选取 Lyapunov 函数 $V(x) = x^{\mathrm{T}}Px$,并考虑 $J = \int_0^{\infty}(z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - \alpha^2 v^{\mathrm{T}}(t)v(t))\mathrm{d}t$,由引理 1 ~ 3,不难得到 $J < 0$,于是 $\|z(t)\|_2 \leqslant \alpha\|v(t)\|_2$.

证毕.

注 1 在定理 1 中,令 $T = 0$ 得连续模糊系统 H_∞ 鲁棒镇定的充分条件为下列 l 个 Riccati 不等式有正定对称阵 P:

$$A_{ci}^{\mathrm{T}}P + PA_{ci} + \alpha^{-2}PG_{ci}G_{ci}^{\mathrm{T}}P + C_{ci}^{\mathrm{T}}C_{ci} < 0.$$

令 $T = 1, A_{ci} + I = A_{ci}$,得离散模糊系统 H_∞ 鲁棒镇定的充分条件为下列 l 个 Riccati 不等式

$$A_{ci}^{\mathrm{T}}(P^{-1} - \alpha^{-2}G_{ci}G_{ci}^{\mathrm{T}})^{-1}A_{ci} - P + C_{ci}^{\mathrm{T}}C_{ci} < 0$$

有正定对称解阵 P,且满足 $\alpha^2 I - G_{ci}^{\mathrm{T}}PG_{ci} > 0$.

由系统(2)与控制器(3)所构成的闭环系统为

$$\begin{cases}\delta x(t) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} h_i(x)h_j(x)((A_i + \Delta A_i + \\ \qquad (B_i + \Delta B_i)K_j)x(t) + G_i v(t)), \\ z(t) = \sum_{i=1}^{l} h_i(x)C_i x(t).\end{cases} \tag{8}$$

记 $A_{ij} = A_i + \Delta A_i(B_i + \Delta B_i)K_j$,由定理 1 可知,如果存在对称正定阵 Y,使得由

$$\begin{cases}\begin{bmatrix} -Y + YTC_i^{\mathrm{T}}C_iY & Y(TA_{ij}+I)^{\mathrm{T}} \\ (TA_{ij}+I)Y & -Y+\alpha^{-2}TG_iG_i^{\mathrm{T}}\end{bmatrix} < 0, \\ i,j = 1,2,\cdots,l\end{cases} \tag{9}$$

给出的一组 LMI 有可行解,则闭环系统(8)稳定,且对任意干扰输入 $v(t) \in L_2[0,\infty)$,被控输出 $z(t)$ 满足 $\|z(t)\|_2 \leqslant \alpha\|v(t)\|_2$. 于是由引理 2 及 Schur 补定理,可得到如下结论.

定理 2 对给定的 H_∞ 性能指标 $\alpha > 0$,如果存

在对称正定阵 Y、矩阵 $M_j(j=1,2,\cdots,l)$ 及正常数 $\varepsilon_{ij}(i,j=1,2,\cdots,l)$,使得下列 LMI 有可行解

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}-Y & \Xi_{ij}^{\mathrm{T}} & T^{1/2}YC_i^{\mathrm{T}} & \Omega_{ij}^{\mathrm{T}}\\ \Xi_{ij} & -\varepsilon_{ij}I & 0 & 0\\ T^{1/2}C_iY & 0 & -I & 0\\ \Omega_{ij} & 0 & 0 & \Psi_{ij}\end{bmatrix}<0,\\ i,j=1,2,\cdots,l.\end{cases}\tag{10}$$

其中

$$\Psi_{ij}=-Y+\alpha^{-2}TG_iG_i^{\mathrm{T}}+\varepsilon_{ij}T^2D_iD_i^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_{ij}=E_{1i}Y+E_{2i}M_j,\ \Omega_{ij}=(TA_i+I)Y+TB_iM_j.$$

则由系统(2)与控制器(3)构成的闭环系统是鲁棒稳定的,且对任意干扰输入 $v(t)\in L_2[0,\infty)$,被控输出 $z(t)$ 满足 $\|z(t)\|_2\leqslant\alpha\|v(t)\|_2$.此时反馈增益阵可取为 $K_i=M_iY^{-1}(i=1,2,\cdots,l)$.

4 数值算例(Numerical example)

考虑由描述的 T-S 型不确定模糊 Delta 算子系统,其中参数

$$A_1=\begin{bmatrix}-5 & 1.2\\ -1 & -4\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}-4 & 0.5\\ -1.2 & -3\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0.5\\0.2\end{bmatrix},\ G_1=\begin{bmatrix}0.8\\0\end{bmatrix},$$

$$G_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ D_1=D_2=\begin{bmatrix}0.2 & 0\\ 0 & 0.2\end{bmatrix},$$

$$E_{11}=E_{12}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ E_{21}=E_{22}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

取 $\alpha=1,\varepsilon_{ij}=1,T=0.001$ s,求解线性矩阵不等式(10),可求得一组状态反馈增益阵为

$K_1=[-1.7117\quad 0.1548]$, $K_2=[-2.1896\quad 0.0666]$.

经检验,由上述给出的控制律可使闭环系统是渐近稳定的,且满足期望的 H_∞ 性能指标要求.

5 结论(Conclusion)

本文将 Delta 算子方法应用到模糊系统研究中,考虑了基于 T-S 模型的模糊 Delta 算子系统的状态反馈鲁棒 H_∞ 控制器设计问题.其设计结果依赖于相应的 LMI 的解,而目前 LMI 的解法已比较成熟,这些不等式可直接由 MATLAB 中的 LMI 工具箱求解,不需要调整任何参数,因此设计过程简单、方便.本文研究结果在极限情况下,可分别得到不确定连续与离散模糊系统的鲁棒 H_∞ 镇定控制器设计结果.

参考文献(References):

[1] MIDDLETON R H, GOODWIN G C. *Digital Control and Estimation: a Unified Approach* [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.

[2] 张端金,杨成梧.反馈控制 Delta 算子理论的研究与发展[J].控制理论与应用, 1998,15(2):153-160.
(ZHANG Duanjin, YANG Chengwu. Delta operator theory for feedback control systems - a survey [J]. *Control Theory & Applications*, 1998, 15(2): 153-160.)

[3] XIANG Zhengrong, CHEN Qingwei, HU Weili. Robust H_∞ control of interval systems using the Delta operator [C]// *Proc of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Shanghai: IEEE Press, 2002:1731-1733.

[4] 向峥嵘,陈庆伟,胡维礼.具有执行器故障的不确定 Delta 算子系统鲁棒 H_∞ 控制[J].控制与决策,2001,16(4):491-493.
(XIANG Zhengrong, CHEN Qingwei, HU Weili. Robust control of uncertain Delta operator systems with actuator failure [J]. *Control and Decision*, 2001, 16(4):491-493.)

[5] SHOR M H, PERKINS W R. Reliable control in the presence of sensor/actuator failures: a unified discrete/continuous approach [C] // *Proc of the 30th IEEE Conf Decision and Control*. Brighton, UK: IEEE Press,1991:1601-1606.

[6] 吴方向,史忠科,戴冠中.动态区间系统的鲁棒稳定性[J].控制理论与应用, 2001, 18(1): 113-115.
(WU Fangxiang, SHI Zhongke, DAI Guanzhong. On robust stability of dynamic interval systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(1):113-115.)

[7] XIE L, de SOUZA C E. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty [J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1188-1191.

作者简介:

向峥嵘 (1969—),男.副教授.1998 年于南京理工大学获博士学位,已发表论文 40 余篇.研究方向为非线性系统,智能控制,鲁棒控制等.E-mail: xiangzr@mail.njust.edu.cn;

张端金 (1966—),男.教授.1998 年于南京理工大学获博士学位,2001 年在华南理工大学完成博士后研究工作.主要从事高速信号处理与鲁棒控制研究.E-mail: scutdjzhang@163.com;

陈庆伟 (1963—),男.教授.研究方向为智能控制,计算机控制,故障诊断等;

胡维礼 (1941—),男.教授,博士生导师.1965 年毕业于清华大学自动控制系.研究方向为自适应控制,智能控制,非线性控制等.