

基于压缩感知信号重建的自适应 正交多匹配追踪算法^{*}

白凌云¹, 梁志毅¹, 徐志军²

(1. 西北工业大学 航天学院, 西安 710072; 2. 空军装备研究院 导技所, 北京 100085)

摘 要: 近年来出现的压缩感知理论为信号处理的发展开辟了一条新的道路, 不同于传统的奈奎斯特采样定理, 它指出只要信号具有稀疏性或可压缩性, 就可以通过少量随机采样点来恢复原始信号。在研究和总结传统匹配算法的基础上, 提出了一种新的自适应正交多匹配追踪算法 (adaptive orthogonal multi matching pursuit, AOMMP) 用于稀疏信号的重建。该算法在选择原子匹配迭代时分两个阶段, 引入自适应和多匹配的原则, 加快了原子的匹配速度, 提高了匹配的准确性, 实现了原始信号的精确重建。最后与传统 OMP 算法进行了仿真对比, 实验结果表明该算法在重建质量和算法速度上均优于传统 OMP 算法。

关键词: 信号处理; 压缩感知; 稀疏表示; 匹配追踪; 重建算法

中图分类号: TP301.6

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2011)11-4060-04

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2011.11.015

Adaptive orthogonal multi matching pursuit algorithm for signal reconstruction based on compressive sensing

BAI Ling-yun¹, LIANG Zhi-yi¹, XU Zhi-jun²

(1. College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. Institute of Missile Technology, Air Force Armament Research Institute, Beijing 100085, China)

Abstract: The newly emerging compressive sensing theory in recent years has opened up a new path for the development of signal processing, which describes that it can reconstruct the original signal from a small amount of random sampling as long as the signal is sparse or compressible, which disobeys with the traditional Nyquist sampling theorem. Based on the study and summarize of the traditional matching algorithm, this paper presented a new adaptive orthogonal matching pursuit algorithm (AOMMP) for the reconstruction of the sparse signal. The algorithm divided each iteration into two stages for the choice of matching atoms, which accelerated the matching speed of the atom and improved the accuracy of the matching, ultimately led to exact reconstruction of the original signal. Finally, compared the AOMMP algorithm with the traditional OMP algorithm under the software simulation. Experimental results show that the AOMMP reconstruction algorithm is superior to traditional OMP algorithm on the reconstruction quality and the speed of the algorithm.

Key words: signal processing; compressive sensing; sparse representation; matching pursuit; reconstruction algorithm

0 引言

在信号与信息处理领域中,奈奎斯特采样定理几乎支配着所有的信号或图像等的获取、处理、存储以及传输,它要求采样频率必须大于或等于信号带宽的两倍,才能保证不失真地重构原始信号。然而随着人们对信息需求量的增加,携带信息的信号带宽也越来越宽,以奈奎斯特采样定理为基础的信号处理框架面临两个新的挑战:a)采样硬件成本高且信号获取效率低下;b)先将获得的数据进行压缩,最后将压缩后的数据进行存储或传输,这样的方式造成很大的资源浪费。

近年来,由 Donoho 和 Candès 等人提出了一种新的充分利用信号稀疏性或可压缩性的全新信号采集、编解码理论——压缩感知 (compressive sensing, CS)^[14]。该理论指出:只要信号在

某个变换域是稀疏的或可压缩的,就可以用一个与变换基不相关的观测矩阵将变换所得高维信号投影到一个低维空间上,通过求解一个最优化问题就可以从这些少量的投影中以高概率重构出原始信号,可以证明这样的投影包含了重构信号的足够信息。压缩感知理论在信号的获取方式上突破了传统的奈奎斯特采样定理,革命性地实现了在对数据获取的同时进行较大的压缩。

压缩感知理论的理论论证和应用研究都取得了较大突破。目前,最成功的应用当属美国 RICE 大学成功研制的“单像素”压缩数码相机,它的出现为传统相机的革新迈出了实质性的第一步。此外在通信领域,压缩感知理论在通信信道的错误检测、传感网络的分布式信源编码、认知无线电中的频谱感知等方面取得了较好的应用。压缩感知的理论研究主要集中在信

收稿日期: 2011-04-01; **修回日期:** 2011-05-09 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (60872158)

作者简介: 白凌云 (1982-), 男, 陕西榆林人, 硕士研究生, 主要研究方向为飞行控制与仿真技术 (bailingyun1982@163.com); 梁志毅 (1963-), 男, 陕西西安人, 教授, 研导, 主要研究方向为飞行控制与仿真技术; 徐志军 (1965-), 男, 内蒙古人, 高级工程师, 主要研究方向为导弹测试设备设计和非标机械设计。

号稀疏表示和信号重建算法上。重建算法可归纳为基追踪法和匹配追踪法两大类型。基追踪算法重建效果较好,但其算法复杂度较高;由于匹配追踪类算法复杂度较低且运行时间少,所以得到了广泛的应用,具有代表性的有匹配追踪法(MP)、正交匹配追踪法(OMP)、正则化正交匹配追踪法(ROMP)等。尽管匹配追踪类算法有较快的运行时间,但上述算法在选择匹配原子准确性上还有待提高,研究人员期望在保证匹配追踪类重建算法快速优势的前提下,能够达到更好的信号重建效果。

1 压缩感知和重建算法

1.1 压缩感知的理论模型

压缩感知理论认为只要信号在某已知变换域具有稀疏性,就可以通过原信号在某投影域的投影近似无损地重构原始信号,要求投影域的基与已知变换域的基是不相干的。设 x 为长度为 N 的一维信号,如果 x 在某一变换基 $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N]$ 下可表示为

$$x = \Psi s = \sum_{i=1}^N \psi_i s_i \quad (1)$$

其中,系数 s 仅有 $K \ll N$ 个非零元素,其余 $N-K$ 个元素为零或接近于零,称信号 x 是 K -稀疏的。通常情况下, K 要远小于 N 。

在上述稀疏条件的假设下,对该信号 x 进行采样或测量。与变换基 Ψ 不相干的测量矩阵 Φ 为 $M \times N$ 的矩阵($K < M \ll N$),则可得到的采样矩阵 y ,即

$$y = \Phi x \quad (2)$$

由式(1)(2)可得

$$y = \Phi \Psi s = \Theta s \quad (3)$$

压缩感知理论论证了通过式(3)可以从较少的 M 个采样 y 中获得原始信号的稀疏系数 s ,继而重建出原始信号 x 。该问题可转换为一个 l_0 最优化问题求解。

$$\hat{s} = \arg \min \|s\|_0 \quad \text{s.t. } y = \Phi x \quad (4)$$

其中, $\|s\|_0$ 是对 s 的一种稀疏性度量,表示 s 非零元素的个数,上述 l_0 范数最小问题是一个 NP-hard 问题,很难直接求解,然而通过对 l_0 最优化问题的改良可以得到两种更容易解决的算法:a)构建匹配追踪算法;b)通过求解 l_1 最优化问题得到它的等价解, l_1 最优化问题又称为基追踪算法。

$$\hat{s} = \arg \min \|s\|_1 \quad \text{s.t. } y = \Phi x \quad (5)$$

压缩感知理论主要涉及三个方面的内容:a)对于信号 x ,如何找到某个正交基或紧框架 Ψ ,使其在 Ψ 上的表示是稀疏的,即信号的稀疏表示问题;b)如何设计一个平稳的、与变换基 Ψ 不相关的 $M \times N$ 维的观测矩阵 Φ ,保证稀疏向量 s 从 N 维降低到 M 维时重要信息不遭破坏,即信号低速采样问题;c)如何设计快速重构算法,从线性观测 $y = \Phi x$ 中恢复信号,即信号重构问题^[5]。

1.2 重建算法

重建算法的关键问题是如何从仅有的低维数据中最大程度地恢复出原始的高维数据。目前研究论证的主要算法包括:

a)贪婪追踪算法。这类方法是通过每次迭代时选择一个局部最优解来逐步逼近原始信号。这些算法包括 MP 算法^[6]、OMP 算法^[7]、分段 OMP 算法(STOMP)和正则化 OMP 算法^[8]等。

b)凸松弛法。这类方法通过将非凸问题转换为凸问题求解找到信号的逼近,如 BP 算法、内点法、梯度投影方法^[9]和迭

代阈值法^[10]。

c)组合算法。这类方法要求信号的采样支持通过分组测试快速重建,如傅里叶采样^[11]、链式追踪和 HHS(heavy hitters on steroids)追踪^[12]等。

匹配追踪类算法的优点在于其算法复杂度低,最早提出的有匹配追踪算法(MP)和正交匹配追踪算法(OMP)。MP 算法的基本思想是在每次迭代中进行原子选择和余量更新;通过计算求余量 r 与测量矩阵 Φ 中各个原子之间内积的绝对值来计算相关系数 u ,从而找出最匹配的原子;通过每次选择的最匹配的原子来进行原始信号稀疏逼近并求出余量;然后继续选出与信号余量最为匹配的原子,经过 K 次迭代,该原始信号便可以由过完备原子库(感知矩阵)里的一些原子线性表示,从而得到原始信号的重建。

OMP 算法是在 MP 算法基础上提出的一种改进算法,与匹配追踪相比,该算法的特点是在每次迭代中将从过完备库中选出的原子用 Gram-Schmidt 正交化方法进行正交化处理,再将采样值在这些正交原子张成的空间上投影,得到信号在这些正交原子上的分量和余量,然后用相同方法分解余量,余量随着分解过程迅速减小。通过递归地对已选择原子集合进行正交化保证了迭代的最优性,从而减少了迭代次数。理论分析和实验数据都表明,对固定 K 稀疏 N 维离散时间信号 x ,用一个 $M \times N$ 维的高斯矩阵测量时,只需 $M = O(K \ln N)$,OMP 算法就能以极大概率准确重构信号^[13],而且比 BP 算法更快。但是,OMP 算法精确重构的理论保证比 BP 算法弱,并非对所有信号都能准确重构,而且对于测量矩阵的要求比限制等距性(RIP)更加严格^[14]。

正交匹配算法迭代步骤如下:

输入: $M \times N$ 维测量矩阵 Φ 采样,信号 y ,稀疏度 K 。

输出:索引集 Λ_l ,重建信号 $\hat{x}$,余量 r_l 。

a)初始化残留余量 $r_0 = y$,索引集 $\Lambda_0 = \emptyset$,迭代次数 $l = 0$;

b)找出与余量最大相关原子(感知矩阵 Φ 的列)的索引:

$$\lambda_1 = \arg \max_{j=1,2,\dots,M} |\langle r_{l-1}, \phi_j \rangle|$$

c)按照最大相关系数的索引,更新索引集 $\Lambda_l = \Lambda_{l-1} \cup \{\lambda_l\}$,更新已选原子库 $\Phi_l = [\Phi_{\Lambda_{l-1}} \cdot \phi_{\lambda_l}]$,定义 Φ_0 为空集;

d)通过求解最小二乘问题得到信号的近似解:

$$\hat{x} = \arg \min_x \|y - \Phi_l x\|_2$$

e)计算新的采样估计,残留余量更新是通过信号采样 y 减去其在所选原子上的正交投影得到:

$$y_l = \Phi_l x_l$$

$$r_l = y - P_{\text{span}\{\phi_k; k \in \Lambda_l\}} y$$

f)如果 $l < K, l = l + 1$,返回执行步骤 b),依次迭代。

本文在正交匹配算法的基础上,引入自适应和多匹配的原子选取原则,提出一种新的自适应正交多匹配追踪算法(adaptive orthogonal multi matching pursuit, AOMMP),最后对该算法和传统的正交匹配算法进行了仿真对比,结果表明该算法的重建质量和算法速度上均优于传统 OMP 算法。

2 自适应正交多匹配追踪算法

AOMMP 算法的核心是从测量矩阵 Φ 中选取一组最大相关的原子作为候选集,然后把本次候选集的原子索引集和上次候选集的原子索引集进行取交集进行多匹配,如果交集为空集,则再通过余量分析得到最佳候选原子。假设 Λ 是由测量

矩阵 Φ 的列向量 $\{\phi_i\}$ 构成的索引集, Λ_k 是经 K 次迭代后选取的原子索引集, 在每一次迭代中, AOMMP 算法通过两个阶段完成新原子的选择。相同于 OMP 算法, AOMMP 算法在第一阶段通过计算当前余量和剩余原子的内积, 分析剩余原子和当前余量的相关性。

$$w_i^{(k)} = |\langle r_{k-1}, \phi_i \rangle| \quad i \in \Lambda \setminus \Lambda_{k-1}$$

$$w_i^{*(k)} = \max \{w_i^{(k)}; i \in \Lambda \setminus \Lambda_{k-1}\}$$

AOMMP 算法首先按照内积计算相关性选取出一组潜在的候选集:

$$H_k = \{i; w_i^{(k)} \geq \alpha w_i^{*(k)}\}$$

其中, α 是一个松弛因子, $0 < \alpha \leq 1$, 通过情况下 α 的取值更靠近 1。

在第二阶段, AOMMP 算法分析当前候选集与上次迭代候选集是否有交集, 如果 $F_k = H_k \cap H_{k-1}$, 然后把 F_k 加入新的索引; 如果 $H_k \cap H_{k-1} = \emptyset$, 则通过计算最小余量在中确定一个原子加入索引集。

$$i_k = \arg \min_{i \in H_k} \|y - P_{\text{span}\{\phi_l; l \in \Lambda_{k-1} \cup H_{ki}\}} y\|_2$$

把经上式分析的最小余量的候选集中原子 F_{ik} 加入到新索引集 Λ_k :

$$\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup F_{ik}$$

余量是通过 y 减去其在所选原子上的正交投影得到:

$$r_k = y - P_{\text{span}\{\phi_l; l \in \Lambda_k\}} y$$

从选择的原子的角度发现, OMP 算法和 AOMMP 算法的本质区别在于, OMP 算法每次选取一个较好原子(内积计算较大原子)。相比之下, AOMMP 算法是选取一组在连续两次迭代中相关性都较大的一组原子, 因此 AOMMP 算法在选择原子上就比 OMP 算法更加鲁棒, 理论分析表明, 特别是当测量次数很小时, 这种鲁棒性更明显^[15]。

当索引集 Λ_k 中原子数达到一个固定值时, 设置 AOMMP 算法迭代停止。实验研究表明, 通常情况下 Λ_k 中原子数设置为测量矩阵列数的一半时停止迭代, 该算法有较好的重建效果。在有噪测量中, 可以选择的另一种迭代停止条件为 $\|r_k\|_2 \leq \varepsilon$ 。算法的基本步骤如下:

输入: $M \times N$ 维测量矩阵 Φ , 采样信号 y , 稀疏度 K 。

输出: 索引集 Λ_i , 重建信号 $\hat{x}$, 余量 r_k 。

a) 初始余量 $r_0 = y$, 估计信号稀疏度为 K , 迭代次数 $n = 1$, Λ 是含有所有原子的索引集, 索引值集合 $\Lambda_0 = \emptyset, J = \emptyset$;

b) 计算索引集中原子和当前余量的内积:

$$w_i^{(k)} = |\langle r_{k-1}, \phi_i \rangle| \quad i \in \Lambda \setminus \Lambda_{k-1}$$

$$w_i^{*(k)} = \max \{w_i^{(k)}; i \in \Lambda \setminus \Lambda_{k-1}\}$$

$$H_k = \{i; w_i^{(k)} \geq \alpha w_i^{*(k)}\}$$

c) 分析当前候选集与上次候选集是否有交集, $F_k = H_k \cap H_{k-1}$, 然后把 F_k 加入新的索引;

d) 如果 $H_k \cap H_{k-1} = \emptyset$, 则通过计算最小余量在 H_k 中确定一个原子加入索引集 Λ_k ;

$$i_k = \arg \min_{i \in H_k} \|y - P_{\text{span}\{\phi_l; l \in \Lambda_{k-1} \cup H_{ki}\}} y\|_2$$

e) 设置索引集, 更新余量: $\Lambda_k = \Lambda_{k-1} \cup F_{ik}, r_k = y - P_{\text{span}\{\phi_l; l \in \Lambda_k\}} y$;

f) 把先前设置好的误差参数与 $\|r_k\|_2$ 比较, 或者计算索引集原子数目是否达到要求值。如果没要到达停止条件, $n = n +$

1, 返回执行步骤 b)。

AOMMP 算法在步骤 b)d) 引入的自适应多匹配原则使得该算法在原子选择上, 既加快了原子的选择速度, 又能保证原子选择的准确性, 使得该算法在获得较好的重建质量的同时, 大大缩短程序的运行时间^[16]。

3 实验结果及对比分析

目前对于 OMP 算法的理论分析主要集中在两个方面: a) 涉及到相关性参数 $u = \max_{i,j} |\langle \phi_i, \phi_j \rangle|$ 的概念, 这里 ϕ_i 表示矩阵 Φ 的列向量, 当矩阵 Φ 的每一列都是单位化的列向量且 $u < 1/(2K - 1)$, 那么 OMP 算法就可以通过测量 $y = \Phi x$ 恢复任意 K 稀疏信号 x ; b) 涉及到概率论的概念, 假设一个信号 $x \in R^N$ 满足 $\|x\|_0 = |\text{sup}(x)| \leq K$, 并且 Φ 是从一个合适的随机分布(相对于 x 是独立的)获得, 只要它含有 $M = O(K \log(N))$ 列, 那么 OMP 算法通过测量 $y = \Phi x$ 准确恢复信号 x 就具有很高的可能性^[7,13]。然而, 它并不能同时保证这样给定的矩阵能够恢复所有的稀疏信号 x 。按照文献[7,13]的理论成果, 采用限制等距原则(RIP)对本文算法进行理论分析, 理论结果表明本文算法在测量矩阵相关性参数 $u < 1/(2K - 1)$ 条件下, 同样可以极大概率地恢复原始信号。

当信号的稀疏基选择为小波基时, 本文算法在原子匹配选择速度优势更加明显, 这是因为自然信号和图像在小波基变换下, 只有很少部分重要小波系数, 而且这些重要系数呈树型结构。文献[15]论证了树型结构在原子选择上的快速性, 并且原子选择的准确性也较高。

用 MATLAB 软件对本文算法进行了测试, 实验一选取一维信号进行测试, 由高斯随机信号进行稀疏化生成一个长度为 $N = 300$ 的一维稀疏信号, 信号的稀疏度 $K = 20$, 采用高斯随机矩阵作为测量矩阵, 采样次数 $M = 100$, AOMMP 算法重建效果如图 1 所示。从图 1 可以看出, AOMMP 算法对一维信号的重建效果很好, 相对误差较小, 算法收敛性也较好。

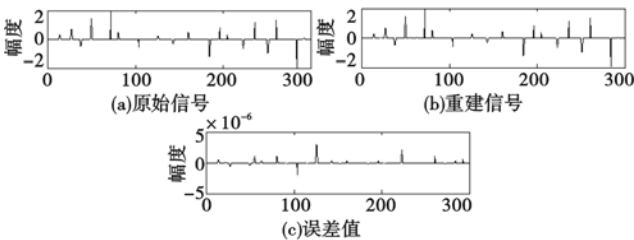
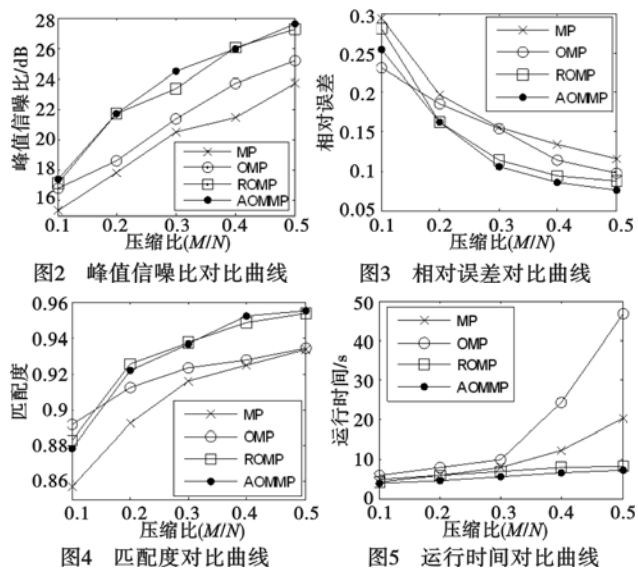


图1 AOMMP算法一维信号重建质量

为了进一步分析本文算法的性能, 对 256×256 像素大小的二维 Lena 图像使用离散余弦变换作为稀疏变换矩阵进行信号稀疏表示, 使用高斯随机矩阵作为测量矩阵进行信号采样, 图 25 比较了在不同压缩比(M/N)情况下 MP、OMP、ROMP 和 AOMMP 算法的峰值信噪比、运算时间、相对误差以及图像匹配度, 对于 AOMMP 算法, 选择松弛因子 $\alpha = 0.8$ 。由图 2 可见, 在压缩比相同的情况下, 由 AOMMP 算法所重建信号的峰值信噪比相对于 MP 和 OMP 两种算法都有明显提高, 并且略优于 ROMP 算法。当压缩比 $M/N = 0.1$ 时, AOMMP 算法的相对误差高于 OMP 算法, 但随着采样数增加后, AOMMP 算法的相对误差很快就降低了。由图 4 可以看出, 在压缩比较小, 重建图像的匹配度并不是很好, 但随着压缩比 M/N 增加, 匹配度参数上升很快。同时在运行时间上, AOMMP 算法要优于其

他算法。理论分析表明当松弛因子 α 较小时,AOMMP 算法的重建速度更快,松弛因子 α 较大时,AOMMP 算法的重建质量更好。综合图 2~5 可知,本文算法是一种具有重建质量和运行速度双重优势的新算法。



4 结束语

本文在分析压缩感知理论和重建算法的基础上,通过对 OMP 算法进行优化,在原子选取上引入自适应和多匹配原则,提出了一种新的自适应正交多匹配追踪算法(AOMMP),该算法按照两个阶段对原子进行选取,既加快了原子选择的速度,又保证了原子选择的准确性,实现了信号的较好重建。经过大量实验证明,本文算法的重建质量和运行速度均优于同类算法,是一种重建质量较好的方法。此外,为了更好地保持图像信号的二维结构信息,基于全变差最小化的重建算法得到了广泛关注,并且已经在单像素成像系统中得到成功的应用。

压缩感知理论的发展必将引起信号处理方式的巨大变革,它的诞生在学术界引起了极大的反响,已经对理论数学、计算数学、计算科学、信息论、信号处理、电子工程、光学工程等诸多领域产生了重要影响。压缩感知理论具有广阔的应用前景,目前在医学影像、模拟/信息转换、地球物理数据分析、遥感方面已经取得一定的应用和突破,未来压缩感知理论将会与其他领域做到更好的融合,主要集中在以下几个领域:故障识别、量子动力学、光学与全息、机器人与控制、计算机图形学、声学与时频分析、超光谱成像。尽管压缩感知理论研究还处于起步阶段,理论论证还不完善,但它的出现引起了学者对信号处理方式的新认识,其研究成果可能对信号处理等领域产生重大影响。

(上接第 4056 页)

[7] DAS S, ABRAHAM A, CHAKRABORTY U K, *et al.* Differential evolution using a neighborhood-based mutation operator [J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2009, 13(3): 526-553.

[8] 贺毅朝,王熙照,刘坤起,等. 差分演化的收敛性分析与算法改进[J]. *软件学报*, 2010, 21(05): 875-885.

[9] 林志毅,李元香. 一种求解函数优化的混合差分演化算法[J]. *系统仿真学报*, 2009, 21(12): 3885-3893.

[10] BABU B V, JEHAN M M L. Differential evolution for multi-objective

参考文献:

[1] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2006, 52(4): 1289-1306.

[2] CANDÈS E, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2006, 52(2): 489-509.

[3] CANDÈS J. Compressive sampling[C]//*Proc of International Congress of Mathematics*, 2006: 1433-1452.

[4] CANDÈS E, WAKIN M. An introduction to compressive sampling[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21-30.

[5] BARANIUK R. A lecture on compressive sensing[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2007, 24(4): 118-121.

[6] MALLAT S, ZHANG Zhi-feng. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397-3415.

[7] TROPP J. Greed is good: algorithmic results for sparse approximation[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2004, 50(10): 2231-2242.

[8] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit[J]. *Foundation of Computational Mathematics*, 2009, 9(3): 317-334.

[9] BLUMENSATH T, DAVIES M E. Gradient pursuits[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2370-2382.

[10] NEEDELL D, TROPP J. CoSaMP: iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2009, 26(3): 301-321.

[11] GILBERT A C, GUHA S, INDYK P, *et al.* Near-optimal sparse Fourier representations via sampling[C]//*Proc of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. New York: ACM Press, 2002: 152-161.

[12] GILBERT A C, SLRAUSS M J, TROPP J A, *et al.* One sketch for all: fast algorithms for compressed sensing[C]//*Proc of the 39th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. New York: ACM Press, 2007: 237-246.

[13] TROPP J, GILBERT A. Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit[J]. *IEEE Trans on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655-4666.

[14] 石光明,刘丹华,高大化,等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. *电子学报*, 2009, 37(5): 1070-1081.

[15] LA C, DO M N. Tree-based orthogonal matching pursuit algorithm for signal reconstruction[C]//*Proc of IEEE International Conference on Image Processing*, 2006: 1277-1280.

[16] CANDÈS E J, ROMBERG J, TAO T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements[J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2006, 59(8): 1207-1223.

optimization[C]//*Proc of IEEE Congress on Evolutionary Computation*. 2003: 2696-2703.

[11] DAS S, SUGANTHAN P N. Differential evolution: a survey of the state-of-the-art[J]. *IEEE Trans on Evolutionary Computation*, 2011, 15(1): 4-31.

[12] GARCÍA S, MOLINA D, LOZANO M, *et al.* A study on the use of non-parametric tests for analyzing the evolutionary algorithms' behaviour: a case study on the CEC'2005 special session on real parameter optimization[J]. *Journal of Heuristics*, 2009, 15(6): 617-644.