

# 稀疏性正则化的图像 Laplace 去噪及 PR 算子分裂算法\*

吕占强<sup>1</sup>, 孙玉宝<sup>1,2</sup>

(1. 总参谋部第六十研究所 科研处, 南京 210016; 2. 南京理工大学 计算机科学与技术学院, 南京 210094)

**摘要:** 在 Bayesian-MAP 框架下, 建立了针对 Laplace 噪声的稀疏性正则化图像去噪凸变分模型, 模型采用  $L_1$  范数作为数据保真项, 非光滑的正则项约束图像在过完备字典下表示系数的稀疏性。进一步基于 Peaceman-Rachford 算子分裂算法, 提出了数值求解该非光滑模型的多步迭代快速算法, 通过引入保真项与稀疏性正则项的邻近算子, 可将原问题转换为两个简单子问题的迭代求解, 降低了计算复杂性。实验结果验证了模型与数值算法的有效性, 本算法在摄像自动报靶系统中得到了应用。

**关键词:** 稀疏表示; 图像去噪; 拉普拉斯噪声; PR 算子分裂算法

中图分类号: TP391

文献标志码: A

文章编号: 1001-3695(2011)09-3542-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2011.09.096

## Sparsity regularized image Laplace denoising based on Peaceman Rachford operator splitting algorithm

LV Zhan-qiang<sup>1</sup>, SUN Yu-bao<sup>1,2</sup>

(1. Dept. of Scientific Research, 60th Research Institute of General Staff Department, Nanjing 210016, China; 2. Institute of Computer Science & Technology, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** Adopting Bayesian-MAP estimation framework, this paper proposed a sparsity regularized non-smooth convex functional model to denoise Laplace noisy image. The  $L_1$  norm was used for data fidelity term and non-smooth regularization term constrains the sparse representation of the underlying image over the overcomplete dictionary. Inspired from the Peaceman-Rachford operator splitting method, proposed a multi-step fast iterative algorithm to solve the non-smooth model above numerically. By introducing the proximal operators of fidelity term and regularization term, the original problem was transformed into solving two simple sub-problems iteratively, thus decreased the computational complexity rapidly. Experimental results demonstrate the effectiveness of our recovery model and numerical iteration algorithm. This algorithm has been applied to automatic target-reading system based on video processing.

**Key words:** sparse representation; image denoising; Laplace noise; Peaceman-Rachford operator splitting

### 0 引言

图像去噪是图像处理中的基本问题, 目标是从含噪的观测图像估计出理想图像, 当前国内外研究主要集中于高斯噪声情形下的图像去噪问题, 对 Laplace 噪声下图像去噪问题的研究尚不够成熟<sup>[1]</sup>。由于用于问题求解的信息量不足, 图像去噪通常为不适定的反问题。数学上, 图像去噪可建模为变分问题, 变分模型中应综合图像的先验信息以及与观测图像间的数据保真信息。先验信息的选择对图像恢复问题至关重要。自然图像是高度结构化的信号, 在合适的过完备字典 (over-complete dictionary) 下总能存在稀疏的表示。图像的稀疏表示刻画了图像信号的内在结构与本质属性, 将这一稀疏性先验知识应用于图像去噪与恢复, 有利于改善问题性质<sup>[2,3]</sup>。因此在 Bayesian-MAP 框架下, 选取 Contourlet 作为图像的稀疏表示字典<sup>[4]</sup>, 建立了针对 Laplace 噪声的稀疏性正则化图像去噪非光

滑凸变分模型, 模型采用  $L_1$  范数作为数据保真项, 非光滑的正则性约束图像表示系数的稀疏性。

本文给出了求解该去噪模型的数值算法。当前, 前向后向算子分裂法 (forward backward splitting, FBS) 在图像去噪问题求解中得到了广泛的应用, 然而为了保证算法的收敛性, FBS 算法要求分裂后的某一泛函具有 Lipschitz 连续的梯度, 无法处理本文非光滑的凸变分问题<sup>[5]</sup>。因此本文基于 Peaceman-Rachford 算子分裂算法 (PRS)<sup>[6]</sup>, 提出了数值求解该非光滑模型的多步迭代快速算法, 采取一种分而治之的策略, 通过引入保真项与稀疏性正则项的邻近算子, 可将原问题转换为两个简单子问题的迭代求解, 降低了计算复杂性。最后给出了本文的实验结果, 采取加权  $L_1$  范数作为 Contourlet 分解系数的稀疏性度量函数, 权重根据系数的变换层级与方向进行设置, 并同文献[7]进行了比较。文献[7]在非冗余的正交小波变换域去除 Laplace 噪声, 采用 Douglas-Rachford 算子分裂算法 (DRS) 进行

收稿日期: 2011-02-11; 修回日期: 2011-03-21 基金项目: 国家“863”计划资助项目 (2007AA12Z142); 国家自然科学基金资助项目 (61071146, 60802039, 60672074); 高等学校博士点专项基金资助项目 (200802880018); 江苏省自然科学基金资助项目 (SBK201022367)

作者简介: 吕战强 (1966-), 男, 江苏宜兴人, 高级工程师, 主要研究方向为图像处理系统、训练模拟器材与射击靶场的设计与研发 (lzq60@126.com); 孙玉宝 (1983-), 男, 江苏灌云人, 工程师, 博士, 主要研究方向为图像稀疏表示、超分辨、分布式仿真、网络虚拟环境设计与开发。

数值求解。实验结果验证了本文模型与数值算法的有效性。

### 1 稀疏性正则化的 Laplace 去噪模型

#### 1.1 图像的稀疏表示模型

依据调和理论,图像可以表示为原子的线性组合

$$u = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_{\gamma} \varphi_{\gamma} \quad (1)$$

其中:  $\varphi_{\gamma}$  为参数化的具有单位长度的原子;  $\gamma$  为原子索引;  $\Gamma$  为原子参数集合,其元素个数为  $\text{card}(\Gamma) = L$ 。称原子的集合为字典  $D = \{\varphi_{\gamma} \mid \|\varphi_{\gamma}\|_2 = 1, \gamma \in \Gamma\}$ ,并要求字典能够张成欧氏空间  $R^N$ ,即  $\text{span}(D) = R^N$ 。对于不同的字典,原子参数呈现不同的物理意义,如 Fourier 字典中  $\Gamma$  表示频率参数集合,加窗 Gabor 字典中参数表示窗口宽度—时间—频率,小波字典中  $\Gamma$  表示尺度—位置参数集合,Curvelet、Bandelet、Contourlet、Wedgelet 等几何多尺度分析字典中  $\Gamma$  表示尺度—位置—方向。将所有原子作为列向量依次排列可构建  $N \times L$  字典矩阵  $\Phi \in R^{N \times L}$ ,从而图像  $u$  的线性分解可表示为

$$u = \Phi \alpha \quad (2)$$

当  $L > N$  时,字典  $D$  是冗余的或过完备的,该系统的前向分解定义为  $\Psi = \Phi^T \in R^{L \times N}$ ,为非方的列满秩矩阵。

稀疏表示理论表明进一步增加表示系统的冗余性,形成过完备字典,可对图像形成更为稀疏的表示,如非下采样的小波变换、可操纵小波塔式分解、复小波、Curvelet、Contourlet、Gabor 感知多成分字典<sup>[8]</sup>等。过完备系统更易生成稀疏的信号表示方式,实际应用中,可通过组合正交基与紧框架的方式来构造字典。对于正交基,反向重建可直接表示为  $\Phi = \Psi^T$ ,对于紧框架系统,重建与分解算子满足  $\Phi^T \Phi = \eta I$ ,  $\eta$  为框架界。

#### 1.2 图像 Laplace 去噪模型

针对图像去噪问题,考虑式(3)的数据观察模型

$$z = u + v \quad (3)$$

这里主要考虑独立同分布的零均值加性拉普拉斯噪声  $v$ ,而非高斯噪声。因此给定理想图像  $u$  时,观测图像  $z$  的似然概率分布由噪声  $v$  的分布类型决定,具体分布为

$$p(z|u) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|z-u|}{b}\right) \quad (4)$$

其中:  $b$  为尺度参数。借助于信号在冗余字典下的线性展开  $u = \Phi \alpha$ ,似然概率分布可改写为

$$p(z|u = \Phi \alpha) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|z - \Phi \alpha|}{b}\right) \quad (5)$$

图像去噪的任务是从观测图像  $z$  恢复出理想图像  $u$ ,由于用于问题求解的信息量不足,这是一个不定(ill-posed)的反问题。在 Bayesian 统计框架下充分利用理想图像的先验知识有利于改善问题性质。基于图像  $u$  在冗余字典  $\Phi$  下的稀疏表示先验知识,假设稀疏表示系数  $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq L}$  相互独立,且系数  $\alpha$  应满足的 Gibbs 分布为

$$p(\alpha) \sim \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^L \varphi_i(\alpha_i)\right) \quad (6)$$

为了满足稀疏性要求,系数在零点聚集出现,  $p(\alpha)$  通常应是非高斯的重尾分布,如拉普拉斯分布、广义高斯分布等可有效匹配系数的这一分布特性。由贝叶斯—最大后验概率估计(Bayesian-MAP)可建立如下关于稀疏表示系数  $\alpha$  的变分模型为

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} -\log(p(z|u = \Phi \alpha)) - \lambda \log p(\alpha) \quad (7)$$

模型中第一项为似然分布,第二项为系数  $\alpha$  的先验分布,将式(5)(6)代入后,式(7)可表示为变分问题  $P_1$ :

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha \in R^L} \|z - \Phi \alpha\|_1 + \lambda \sum_{i=1}^L \varphi_i(\alpha_i) \quad (8)$$

该模型中第一项为数据保真项,记  $\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^L \varphi_i(\alpha_i)$  为稀疏性正则项,具有可分离形式。记所有下半连续凸函数  $f: R \rightarrow (-\infty, +\infty)$  组成的集合为  $\Gamma_0(R)$ ,约束  $\varphi_i \in \Gamma(R)$ ,因而式(8)为凸变分问题,有利于问题的数值求解。为了有效度量系数的稀疏性,要求  $\varphi_i \in \Gamma(R)$  为非光滑函数,例如  $L_1$  范数、加权  $L_1$  范数、Huber 函数等,  $\lambda$  为正则化参数,在正则项与保真项之间相互权衡,最小凸变分模型式(8),可获得去噪后图像  $u^*$  为

$$u^* = \Phi \alpha^* \quad (9)$$

### 2 PR 算子分裂法的数值求解

1.2 节建立 Laplace 噪声下的图像去噪模型式(8),模型中稀疏性正则项与数据保真项均是非光滑的, FBS 算法将不再适用。由于 Peaceman-Rachford 算子分裂算法对目标泛函并无光滑性要求,可突破此限制。在此框架下,本文提出了数值求解该非光滑模型式(8)的多步迭代快速算法。

首先介绍邻近算子(proximal operator)的概念。Moreau 于 1962 年将凸投影算子进行推广,提出了邻近算子的概念。凸投影算法在信号非线性恢复中得到了广泛的使用,而最近邻近算子在图像恢复中的应用也成为了新的研究热点问题。令  $f \in \Gamma_0(R)$ ,给定  $\gamma > 0$ ,函数  $f$  的邻近算子定义为

$$\text{prox}_{\gamma f}(x) = \arg \min_{y \in H} f(y) + \frac{1}{2\gamma} \|x - y\|_2^2 \quad (10)$$

其中:  $\text{prox}_{\gamma f}(x)$  为变分式(10)的唯一解,对于任一  $x \in R$ ,式(10)的唯一极小值点为  $\hat{y} = \text{prox}_{\gamma f}(x)$ 。当  $\gamma = 1$  时,简记为  $\text{prox}_f$ 。对于邻近算子性质的详细内容请参见文献[9]。

对于变分问题  $P_1$ ,记  $f(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha)$ ,  $f_1(\alpha) = \|z - \Phi \alpha\|_1$ ,  $f_2(\alpha) = \lambda \varphi(\alpha)$ ,  $T = \partial f$ ,由凸分析理论,求解变分问题  $P_1$  的解等价于寻求算子  $\partial f(\alpha)$  的零点:  $0 \in T(x)$ 。令  $T_1 = \partial f_1$ ,  $T_2 = \partial f_2$ ,变分问题  $P_1$  自身即具有可分离的结构,很自然地,将算子  $T$  分裂为算子  $T_1$  与  $T_2$  的和,对  $T_1$  与  $T_2$  采用 Peaceman-Rachford 分裂法,具体迭代式为

$$\begin{cases} \alpha^{k+\frac{1}{2}} = \text{prox}_{\gamma/2}(\alpha^k) \\ \alpha^{k+1} = 2\text{prox}_{\gamma/1}(2\alpha^{k+\frac{1}{2}} - \alpha^k) - \alpha^{k+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (11)$$

在适当条件下,由式(11)生成的迭代序列能够收敛于算子  $T$  的零点。当应用上述迭代式求解问题  $P_1$  时,还有一个关键问题需要解决,那就是求解函数  $f_1$  与  $f_2$  的邻近算子,针对某些特定问题,其邻近算子存在解析解,即使不存在,也可通过(预条件)共轭梯度、Gauss-Sidel 迭代、连续过松弛等数值算法进行快速求解。

遵循迭代式(11),对于  $P_1$  的正则项,需要确定稀疏性度量函数  $\varphi(\alpha)$  的邻近算子。对于某些特定的  $\varphi(\cdot)$  函数,具有解析解,例如当  $\varphi(\alpha) = \sum_{1 \leq i \leq L} \omega_i |\alpha_i|$  (加权  $L_1$  范数),  $\omega_i$  为权重,对应的是逐个元素的软阈值收缩为

$$\begin{aligned} \alpha_i^{k+\frac{1}{2}} &= \text{prox}_{\gamma/2}(\alpha_i^k) = \text{soft}(\alpha_i^k, \gamma_k \lambda) = \\ \text{sign}(\alpha_i^k) \max(|\alpha_i^k| - \gamma_k \omega_i \lambda, 0), & 1 \leq i \leq L \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{当 } \varphi_i(\alpha_i) = \begin{cases} \frac{\alpha_i^2}{2} & |\alpha_i| \leq \xi_i \\ \xi_i(|\alpha_i| - \frac{\xi_i}{2}) & |\alpha_i| > \xi_i \end{cases}, \xi_i \in (0, +\infty) \text{ 为}$$

Huber 函数时,对应的邻近算子为

$$\alpha_i^{k+\frac{1}{2}} = \text{prox}_{\gamma_k/2}(\alpha_i^k) = \begin{cases} \frac{\gamma_k \alpha_i^k}{\gamma_k \lambda + 1} & |\alpha_i^k| \leq 2\lambda \xi_i \\ \gamma_k \alpha_i^k - \gamma_k \lambda \xi_i \text{sign}(\alpha_i^k) & |\alpha_i^k| > 2\lambda \xi_i \end{cases} \quad (13)$$

当  $\varphi_i(\alpha_i) = |\alpha_i| - s_i \ln(1 + \frac{|\alpha_i|}{s_i})$ ,  $s_i \in (0, +\infty)$  为光滑化的  $L_1$  函数时,对应的邻近算子为

$$\alpha_i^{k+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\gamma_k \alpha_i^k - \gamma_k \lambda - s_i + \sqrt{(\gamma_k \lambda + s_i - \gamma_k \alpha_i^k)^2 + 4s_i \gamma_k \alpha_i^k}), \alpha_i^k \geq 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma_k \alpha_i^k + \gamma_k \lambda + s_i - \sqrt{(\gamma_k \lambda + s_i + \gamma_k \alpha_i^k)^2 - 4s_i \gamma_k \alpha_i^k}), \alpha_i^k < 0 \end{cases} \quad (14)$$

对于  $P_1$  的保真项,当  $\Phi$  为紧框架时,由文献[9]的引理 5 以及邻近算子的运算法则,保真项的邻近算子具有解析表达式为

$$\text{prox}_{\gamma_k/1}(\alpha^k) = \alpha^k + \eta^{-1} \Phi^T \circ (z + \text{soft}(\kappa - z, \lambda \gamma_k \eta) - I) \circ \Phi(\alpha^k) \quad (15)$$

其中: $\alpha^k$  为 PRS 算法的第  $k$  次迭代值, $\gamma_k$  为迭代参数, $\eta$  为框架界, $\kappa = \Phi \alpha^k$ ,  $\text{soft}(\cdot, \cdot)$  为软阈值收缩, $\circ$  表示算子的复合运算。具体应用中,还需要确定算法的初始迭代点,本文选取  $\alpha^0$  为

$$\alpha^0 = \Phi^T y \quad (16)$$

### 3 实验结果与分析

仿真实验中,选择  $256 \times 256$  的 women 与 target 作为测试图像,实验中选取加权  $L_1$  函数作为稀疏性度量函数,稀疏表示字典  $\Phi$  选用离散的 Contourlet,进行三层变换,第二层与第三层分解均为八个方向,分别为  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$  与  $315^\circ$ 。对于第一层的低频系数采取较小的阈值,设置为 0.5,对于第二层(次高频)中水平与垂直方向子带设置为 0.8,对角与反对角方向子带设置为 1.0,对于第三层(高频)中水平与垂直方向子带设置为 1.2,对角与反对角方向子带设置为 1.5。由于噪声主要集中在高频系数,因此对于第二层与第三层设置较大的阈值。同时人类视觉系统对于水平与垂直方向的误差比较敏感,而对角与斜对角并不敏感,因此相应地设置较大与较小的收缩阈值;设置正则化参数  $\lambda = 0.15$ 。对于本文的 PRS 算法,按照式(11)迭代计算,取  $\gamma_k \equiv 50$ ,并同 DRS 算法进行比较分析,DRS 算法按文献[7]中的说明设置参数,选取 DB6 正交小波作为稀疏分解字典。

图 1、2 展示了本文模型与文献[7]的去噪结果。图 1(a)、图 2(a)分别为原图像 women 与 target。图 1(b)、图 2(b)分别为经标准差为 20 和 40 的拉普拉斯噪声退化后的噪声图像。图 1(c)(d)和图 2(c)(d)分别为 DRS 以及本文 PRS 算法均迭代 6 次的去噪结果。由于 Contourlet 字典能够有效匹配图像中的几何结构,本文算法能够更有效地去拉普拉斯噪声,去噪后图像视觉效果更好,PSNR 大约提高了 1 dB。



图 1 本文 PRS 与 DRS 算法的拉普拉斯去噪结果[women 图像]



图 2 本文 PRS 与 DRS 算法的拉普拉斯去噪结果[target 图像]

图 3 给出了实验中本文模型式(8)在 PRS 与 DRS 算法数值求解下,目标函数值相对比率(relative ratio)  $10 \log_{10} \frac{f(\alpha^n)}{f(\alpha^0)}$  (dB)随迭代次数的函数衰减变化曲线。从图可以看出,本文 PRS 算法与 DRS 算法的相对比率都随着迭代有着较为快速的衰减速度,并最终趋于平稳,都展现出很好的渐进收敛性。相比而言,本文 PRS 算法衰减速度更快,具有更好的渐进收敛性。

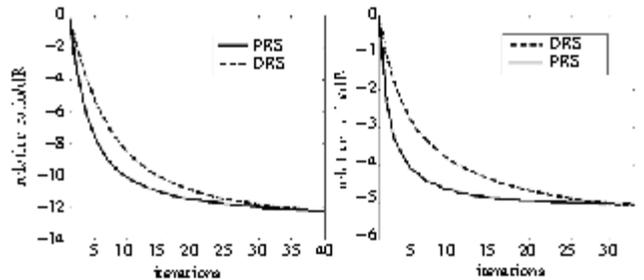


图 3 本文 PRS 与 DRS 算法的目标函数值比率随迭代次数的衰减图形

### 4 结束语

本文采用 Peaceman-Rachford 算子分裂法对建立的稀疏性正则化拉普拉斯去噪模型进行数值求解,不同于 FBS 算法,PRS 算法对目标函数并无光性要求。在实验结果部分,进行了多组实验,并同 DRS 算法进行了比较,验证了本文模型与数值算法的性能。本算法在射击靶场的摄像自动报靶系统中得到了应用,对靶标图像进行预处理,提高弹点识别的准确率,在后续工作中将进一步完善该模型与算法。

#### 参考文献:

- [1] KATSAGGELOS A K. Digital image restoration [M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
- [2] OSHER S, MAO Y, DONG B, et al. Fast linearized bregman iterations for compressed sensing and sparse denoising [J]. Communications in Mathematical Sciences, 2010, 8(1): 93-111.
- [3] MICHAEL E. Sparse and redundant representations; from theory to applications in signal and image processing [M]. [S. l.]: Springer, 2010: 1-376.
- [4] DO M N, VETTERLI M. The Contourlet transform: an efficient directional multiresolution image representation [J]. IEEE Trans on Image on Processing, 2005, 14(12): 2091-2106.
- [5] COMBETTES P L, WAJS V R. Signal recovery by proximal forward-backward splitting [J]. SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(4): 1168-1200.
- [6] LIONS P L, MERCIER B. Splitting algorithms for the sum of two non-linear operators [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1979, 16(6): 964-979.
- [7] COMBETTES P L, PESQUET J C. A Douglas-Rachford splitting approach to nonsmooth convex variational signal recovery [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 564-574.
- [8] 孙玉宝, 肖亮, 韦志辉. 基于 Gabor 感知多成分字典的图像稀疏表示算法研究 [J]. 自动化学报, 2008, 34(11): 1379-1387.
- [9] SETZER S. Split bregman algorithm, Douglas-Rachford splitting and frame shrinkage [C]//Proc of the 2nd International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision. Berlin: Springer-Verlag, 2009: 464-476.