

基于禁忌搜索的启发式算法求解球体 Packing 问题*

刘景发^{a,b}, 周国城^b, 潘锦基^b

(南京信息工程大学 a. 网络信息中心; b. 计算机与软件学院, 南京 210044)

摘要: 为求解具有 NP 难度的球体 Packing 问题, 通过将禁忌搜索方法与基于自适应步长的梯度下降法和二分法相结合, 提出了一个启发式算法。对 50 个等球算例进行了实例测试, 算法改进了其中 44 个算例的目前最优结果。大量的实例计算结果表明, 该启发式算法是求解球体 Packing 问题的一个有效算法。

关键词: 球体 Packing 问题; 启发式算法; 禁忌搜索算法; 梯度下降法; 二分法

中图分类号: TP301.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3695(2011)03-0892-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2011.03.027

Heuristic algorithm based on taboo search for sphere Packing problem

LIU Jing-fa^{a,b}, ZHOU Guo-cheng^b, PAN Jin-ji^b

(a. Network Information Center, b. College of Computer & Software, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract: To solve the sphere Packing problem which was a NP-hard problem, proposed a heuristic algorithm which combined the taboo search algorithm with the gradient descent method based on the adaptive step length and dichotomous search. Tested 50 equal sphere instances. The proposed algorithm approved the results of 44 instances obtained by previous algorithms. The computational results show that this heuristic algorithm is an effective algorithm for the sphere Packing problem.

Key words: sphere Packing problem; heuristic algorithm; taboo search algorithm; gradient descent method; dichotomous search

Packing 问题研究的是将多个物体互不重叠地放置在有限空间的容器内, 要求尽量提高容器的利用率, 降低空间的浪费。Packing 问题被广泛应用于货物装载、工业切割等领域, 此问题的解决能够大量地节约资源、降低生产成本和运输费用。

在理论上, Packing 问题早已被证明是具有 NP 难度的组合优化问题。近年来的研究表明, 对于此类 NP 难度问题, 不存在既严格完整又不太慢的求解算法, 目前多数研究采用启发式求解算法^[1-6]。黄文奇等人^[1]结合拟物下降算法和让诸圆在弹性力的作用下做剧烈运动的策略, 提出了等圆 Packing 问题的一种纯粹拟物算法。Akeb 等人^[2]融合集束搜索、局部搜索以及二分法, 提出了一种求解不等圆 Packing 问题的自适应集束搜索算法。对于三维圆柱体 Packing 问题, Birgin 等人^[3]提出了一种非线性决策问题的求解方法。对于长方体 Packing 问题, 黄文奇等人^[4]在拟人策略“金角银边草肚皮”的基础上, 提出了“价值最高钻石穴”的思想, 得到了一种最大穴度占角动作优先放置的纯粹拟人算法。对于球体 Packing 问题, Liu 等人^[5]通过将势能曲面变平法(ELP)与梯度下降法相结合, 提出了一种混合求解算法。

本文研究三维球体 Packing 问题, 即对于 N 个半径事先给定的小球体, 问怎样把它们放进半径尽量小的球形容器中, 使得小球体与小球体之间以及小球体与球形容器之间没有重叠。通过将禁忌搜索(taboo search, TS)算法与基于自适应步长的梯度下降法以及二分法相结合, 提出了球体 Packing 问题的一种新的有效的启发式求解算法。

1 问题的形式化描述

已知 N 个半径为 $R_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的小球, 问题求解的目标是如何将这些小球互不重叠地放进一球形容器中, 使得球形容器的半径尽可能小。此问题更加形式化的描述如下:

将半径为 R_0 的球形容器 S_0 的球心设置为空间笛卡尔直角坐标系的原点。设半径为 $R_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的小球 S_i 的球心坐标为 (x_i, y_i, z_i) , 问如何将这 N 个小球放入球形容器 S_0 中, 使得球形容器 S_0 的半径 R_0 尽可能小, 并使得式(1)和(2)成立:

$$\begin{aligned} \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} &\leq R_0 - R_i \quad i=1, 2, \dots, N \\ \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} &\geq R_i + R_j \quad i \neq j=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1) \quad (2)$$

式(1)表示任何小球 S_i 与球形容器 S_0 之间没有嵌入, 即任何一个 S_i 都放在球形容器 S_0 内。式(2)表示任意两个小球 S_i 和 S_j 之间没有嵌入。

根据拟物策略^[1], 假设所有小球 $S_i (i=1, 2, \dots, N)$ 和球形容器 S_0 为表面光滑且具有弹性的球形物体。若球体 S_i 与 S_j 之间相互嵌入, 即球体 S_i 与 S_j 之间球心的距离 $d(S_i, S_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} < R_i + R_j$, 则两球体 S_i 与 S_j 之间的嵌入深度 $d_{ij} = R_i + R_j - d(S_i, S_j)$, 否则 $d_{ij} = 0$ 。特别地, 若球体 S_i 与球形容器 S_0 之间相互嵌入, 即球体 S_i 与球形容器

收稿日期: 2010-09-02; 修回日期: 2010-10-21 基金项目: 江苏省自然科学基金资助项目(BK2010570); 中国博士后科学基金资助项目(20100471350); 江苏省高校自然科学基金研究项目(09KJB520008); 江苏省“青蓝工程”项目; 江苏省博士后科研计划项目(1001030B)

作者简介: 刘景发(1972-), 男, 副教授, 硕士, 博士, 主要研究方向为 NP 难度问题求解、生物信息计算、人工智能(jliu@nuist.edu.cn); 周国城(1986-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为人工智能; 潘锦基(1976-), 男, 副教授, 博士研究生, 主要研究方向为新型数据库、数据挖掘。

S_0 之间球心的距离 $d(S_i, S_0) = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} > R_0 - R_i$, 则球体 S_i 与球形容器 S_0 之间的嵌入深度 $d_{0i} = d(S_i, S_0) + R_i - R_0$, 否则 $d_{0i} = 0$ 。根据物理学上的弹性原理, 当两个物体相互嵌入时, 所产生的弹性势能与它们之间相互嵌入的深度成正比, 那么所有球体所产生的弹性势能总和 $E(X)$ 为

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n k d_{ij}^2 \tag{3}$$

式(3)中 $X = (x_1, y_1, z_1, \cdots, x_N, y_N, z_N)$ 称为一个构形, 即为某一时刻所有 N 个球体在空间笛卡尔直角坐标系中的坐标向量。 k 是一个正的比例系数, 本文中设置 k 为 1。从式(3)可以看出, $E(X) \geq 0$ 。若 $E(X) > 0$, 则表示某些小球体之间或者某些小球体与球形容器之间存在嵌入的部分, 即该构形为问题的不可行解; 若 $E(X) = 0$, 则表示任何两个小球体之间以及任一小球体与球形容器之间都不存在嵌入的部分, 即该构形为问题的可行解。这样, 球体 Packing 问题就转换为求解优化问题 minimize $E(X)$ 。对此优化问题, 倘若存在算法 A, 利用 A 可以搜索到构形 X , 使得 $E(X) = 0$, 则可以利用二分法得到球形容器 S_0 的最小半径。下面将讨论优化问题 minimize $E(X)$ 的求解。

2 基于禁忌搜索的启发式算法

对于规模较小的球体 Packing 问题, 利用梯度下降法求解优化问题 minimize $E(X)$, 可以很容易搜索到势能函数 $E(X)$ 的全局最小点; 而对于规模稍大的球体 Packing 问题, 梯度下降法则常常会落入局部极小点陷阱, 从而很难搜索到全局最小点。为了有效地使搜索逃离局部极小点的陷阱, 采用邻域结构来更新构形, 即通过挑出当前构形中势能半径比 E_i/R_i 最大的小球 S_i , 这里 $E_i = \sum_{j=0, j \neq i}^N d_{ij}^2$ 表示第 i 个小球 S_i 所受到的挤压弹性势能, 通过将 S_i 的球心放在球形容器内随机找到的空白区域内的一点(称为空位点), 同时保持其他小球的位置不变而跳出当前局部极小点。然而, 在跳出局部极小点陷阱的过程中, 可能出现随机找出的空位点不理想, 导致某些小球被反复挑选而找不到合适的放置位置, 影响算法执行的效率。为此, 本文采用禁忌搜索策略来解决此问题。

禁忌搜索(TS)的思想最早由 Glover 提出, 它通过邻域结构并引入一个禁忌表和相应的禁忌准则来避免迂回搜索。同时, 在算法搜索的过程中, 通过藐视准则来赦免一些被禁忌的优良状态, 从而避免错过优良解以实现全局优化。禁忌搜索算法涉及禁忌表、禁忌对象、藐视准则等概念, 它们的选取将直接影响到算法全局优化的效果。

禁忌表包括禁忌对象和禁忌长度。禁忌对象是指那些在禁忌表中被禁的对象。本文的禁忌对象为小球。当采用邻域结构更新构形时, 为了避免算法迂回搜索, 防止某些小球被反复挑出而找不到合适的放置位置, 本文将被挑出且放置四次仍未使搜索逃离局部极小点的小球设置为禁忌对象。禁忌长度是指禁忌对象在不考虑藐视准则的情况下不允许被选取的最大次数。本文采用禁忌长度为 3 的单向链表记录搜索过程中被禁忌的对象, 同时采用先进先出的队列原则来更新禁忌表。

藐视准则是指若某禁忌对象对应构形的适配值优于“best so far”状态, 则无视其禁忌属性而仍接收该构形为当前构形。藐视准则是算法避免遗失优良状态, 进而实现全局优化的关键步骤。在本文中, 若当前被挑出重放的小球是禁忌对象, 且其

对应构形的能量小于当前最优构形的能量时, 则将其强行解禁, 同时修改禁忌表中各对象的任期和“best so far”状态。如果当前被挑选的小球不是禁忌对象, 但其对应的构形的能量小于前一构形的能量, 则仍然接收该构形为当前构形, 同时修改禁忌表中各对象的任期; 若此时该构形的能量小于当前最优构形的能量, 则进一步更新“best so far”状态。

在执行禁忌搜索算法的过程中, 当用邻域结构产生新的构形 X' 时, 为了进一步搜索 X' 附近能量更低的构形, 避免搜索错过全局最优解, 本文从 X' 出发, 进一步执行精细的局部搜索算法——基于自适应步长的梯度下降(GD)法^[5,6], 以加速对最优解的搜索。基于禁忌搜索的启发式(TSH)算法步骤如下:

- 算法 1 基于禁忌搜索的启发式算法 TSH(R_0)
- a) 在半径为 R_0 的球形容器 S_0 中, 随机给出 N 个小球 $S_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ 的球心坐标 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \cdots, (x_N, y_N, z_N)$ 作为初始构形 X , 即 $X = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_N, y_N, z_N)$ 。令 $t = 1, \varepsilon = 10^{-8}, E_{\text{opt}} = 10^{10}$ 。

b) 计算 $E(X, t)$ 。

c) 挑出当前构形 X 中势能半径比 E_i/R_i 最大的小球 S_i , 令 $j = 1$ 。

d) 在容器 S_0 中找到一个随机的空位点, 将小球 S_i 的球心放在该点处, 产生新的构形 X' 。

e) 调用基于自适应步长的梯度下降法, 令 $X' = \text{GD}(X')$ 。

f) 如果 $E(X', t) < \varepsilon$, 则输出 X' , 且成功退出。否则, 如果 S_i 是禁忌表中的元素, 则

如果 $E(X', t) < E_{\text{opt}}$, 则

将 S_i 从禁忌表中删除, 令 $E_{\text{opt}} = E(X', t)$, 转 g);

否则不接受 X' , 令 $j = j + 1$, 转 h);

否则如果 $E(X', t) < E_{\text{opt}}$, 则令 $E_{\text{opt}} = E(X', t)$;

如果 $E(X', t) < E(X, t)$, 则转 g);
- 否则不接受
- X'
- , 令
- $j = j + 1$
- , 转 h)。

g) 接收 X' , 并将 X' 设置为当前构形, 即令 $X = X', E(X, t) = E(X', t)$, 同时将禁忌表中各禁忌对象的任期减 1, 转 i);h) 如果 $j > 4$, 则令 S_i 的势能半径比为 0, 且将 S_i 加入禁忌表中, 转 c); 否则转 d)。i) 如果 $t < 100$, 则 $t = t + 1$, 转 c); 否则失败退出。

3 基于二分搜索的启发式算法

在基于禁忌搜索的启发式(TSH)算法中, 只是尽量将 N 个小球互不重叠地放进半径给定的球形容器 S_0 内, 而问题求解的目标是寻求能够装载 N 个小球的最小半径的球形容器 S_0 。为了得到 S_0 的最小半径 R_0 , 对 R_0 进行二分搜索。

- 算法 2 基于二分搜索的启发式(DSH)算法
- a) 给定 N 个半径为 R_i 的小球 $S_i (i = 1, 2, \cdots, N)$, 设置二分搜索算法的球形容器 S_0 的半径的上界 $UL = 1.5 * \sqrt[3]{\sum_{i=1}^N R_i^3}$, 下界 $LL = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^N R_i^3}$ 。

b) 令 $R_0 = (UL + LL)/2$, 调用 TSH(R_0) 算法。

c) 如果 TSH(R_0) 成功退出, 则令 $UL = R_0$; 否则令 $LL = R_0$ 。

d) 如果 $|UL - LL| < 10^{-6}$, 则输出 R_0 及相应的构形; 否则转 b)。

4 计算结果与分析

用 Java 语言在奔腾 D 双核, 1.89 GHz, 1 GB RAM 的 PC 机上实现了本文所提出的基于二分搜索的启发式(DSH)算法, 并对文献[5]中的 50 个单位半径的等球算例进行了测试。对

于每个算例,独立运行 DSH 算法五次,五次计算中得到的球形容器的最小半径分别列于表 1 中,并与文献[5]中的混合算法 ELPGD 所得结果形成对比。从表 1 可以看出,除第 1、5、8、9、16、32 号算例外,DSH 算法在其余 44 个算例上所得球形容器的最小半径比文献[5]中 ELPGD 算法所得结果都要好。而对于这六个算例,DSH 算法与 ELPGD 算法结果的差别也非常小,均在 10^{-4} 之内。由此可见,对于球体 Packing 问题,本文提出的启发式算法 DSH 的总体效果比 ELPGD 混合算法要好。图 1 为 DSH 算法得到的第 50 号算例的最优构形的三维立体图。

表 1 基于二分搜索的启发式(DSH)算法与文献[5]中的混合算法 ELPGD 的计算结果比较

算例	ELPGD 算法得到的球形容器半径	DSH 算法得到的球形容器半径	算例	ELPGD 算法得到的球形容器半径	DSH 算法得到的球形容器半径
1			26	3.7544099284	3.7473586567
2	1.9999903454	1.9998940883	27	3.8232278317	3.8145940303
3	2.1546167514	2.1546165626	28	3.8515149358	3.8416035568
4	2.2246708262	2.2246704553	29	3.8839304098	3.8770538650
5	2.4141344424	2.4141434461	30	3.9261491500	3.9164538155
6	2.4141532067	2.4141528586	31	3.9586163857	3.9507563096
7	2.5911976306	2.5911971994	32	3.9702237305	3.9702324601
8	2.6452760424	2.6452760696	33	4.0297789249	4.0198752917
9	2.7320006394	2.7320010011	34	4.0597699668	4.0476803403
10	2.8324158104	2.8324155271	35	4.0892793950	4.0843770262
11	2.9020670076	2.9020669595	36	4.1228778440	4.1129581736
12	2.9020703080	2.9020701316	37	4.1599920917	4.1547394748
13	3.0012182585	2.9999584685	38	4.1665004961	4.1576309390
14	3.0920038218	3.0911029100	39	4.2333222860	4.2240217725
15	3.1416013295	3.1416009201	40	4.2610782845	4.2560544411
16	3.2156404405	3.2156405899	41	4.2992680183	4.2965039826
17	3.2725342088	3.2712061726	42	4.3090119020	4.3081096226
18	3.3189507406	3.3189502735	43	4.3628504653	4.3544440787
19	3.3861842506	3.3859769392	44	4.3847055183	4.3836854803
20	3.4771886832	3.4734992521	45	4.4168820245	4.4069816085
21	3.4863138754	3.4863133845	46	4.4490860772	4.4446947586
22	3.5798162793	3.5797933967	47	4.4834917689	4.4743812346
23	3.6274969467	3.6274796316	48	4.5080735101	4.4964415130
24	3.6862536176	3.6853547056	49	4.5211083524	4.5193084739
25	3.6875554317	3.6873952701	50	4.5604157703	4.5513369118

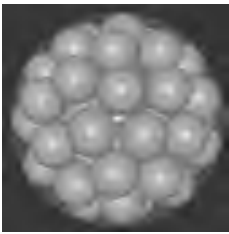


图1 基于二分搜索的启发式(DSH)算法得到的第50号算例的最优构形的三维立体图

5 结束语

对于球体 Packing 问题,本文提出了一种启发式求解算法。该算法通过将禁忌搜索算法与基于自适应步长的梯度下降法以及二分法相结合,通过将该算法运行到等球算例上,大量的实例计算结果表明,该启发式算法是求解球体 Packing 问题的一个有效算法。从算法的实现过程不难看出,该算法稍作修改便可推广应用于其他各种二维或三维、圆形或矩形区域的 Packing 问题。

参考文献:

[1] 黄文奇,叶涛. 求解等圆 Packing 问题的完全拟物算法[J]. 系统科学与数学, 2008, 28(8): 993-1001.

[2] AKEB H, HIFI M, M' HALLAH R. A beam search algorithm for the circular packing problem [J]. Computers & Operations Research, 2009, 36(5): 1513-1528.

[3] BIRGIN E G, MARTINEZ J M, RONCONI D P. Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: a nonlinear approach [J]. European Journal of Operational Research, 2005, 160(1): 19-33.

[4] 黄文奇,何琨. 求解长方体 Packing 问题的纯粹拟人算法[J]. 中国科学 F 辑: 信息科学, 2009, 39(6): 617-622.

[5] LIU Jing-fa, YAO Yong-lei, ZHENG Yu, et al. An effective hybrid algorithm for the circles and spheres packing problems[C]//Proc of the 3rd Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications. 2009:135-144.

[6] LIU Jing-fa, LI Gang. Basin filling algorithm for the circular packing problem with equilibrium behavioral constraints [J]. Science China: Information Sciences, 2010, 53(5): 885-895.

(上接第 891 页)都比基本粒子群算法的小,对优化项目、缩短工期方面的效果更显著。因此,混沌粒子群算法比基本粒子群算法更具有优势。

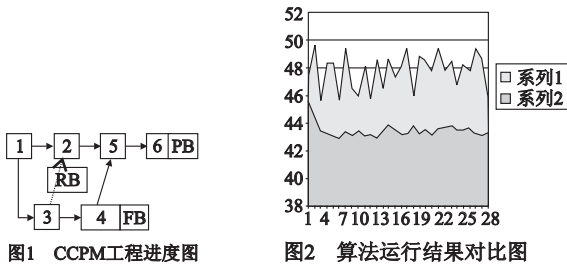


图1 CCPM工程进度图

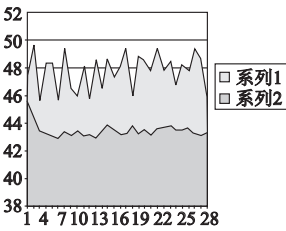


图2 算法运行结果对比图

5 结束语

利用混沌粒子群算法解决关键链的项目管理问题,其基本思想是在粒子群的迭代过程中,首先通过混沌初始化产生初始粒子群,然后对粒子群进行混沌扰动,以实现进一步的全局搜索。通过实例验证,混沌粒子群具有比基本粒子群算法更好的

优化性能和收敛性能。混沌粒子群算法还广泛应用于生产调度、厂房选址、工作人员排班等其他项目优化调度的问题中。

参考文献:

[1] KOLISCH R, SPRECHER A. PSPLIB: a project scheduling problem library OR software-ORSEP operations research software exchange program[J]. European Journal of Operational Research, 1997, 96(1): 205-216.

[2] 黄炜斌,马光文,王和康,等. 混沌粒子群算法在水库中长期优化调度中的应用[J]. 水力发电学报, 2010, 29(1): 102-105.

[3] 刘士新. 项目优化调度理论与方法[M]. 北京:机械工业出版社, 2007: 86-101.

[4] 纪震,廖惠连,吴青华. 粒子群算法及应用[M]. 北京:科学出版社, 2009: 17-61.

[5] 刘志雄. 基于粒子算法的物流配送车辆优化调度研究[J]. 武汉科技大学学报, 2009, 32(6): 13-16.

[6] 秦明明,王坚,姜雷. 基于改进粒子群算法的电力系统有功调度[J]. 电力学报, 2009, 24(6): 471-473.

[7] 叶吉祥,徐玉良. 基于混沌 PSO 算法的求解电力公司最优报价策略研究[J]. 计算机工程与科学, 2010(2): 150-153.