基于拉格朗日的高光谱解混算法研究*

刘万军[1]，杨秀红[1]，曲海成[1,2]
（1. 辽宁工程技术大学 软件学院，辽宁 葫芦岛 125105；2. 哈尔滨工业大学 电子与信息工程学院，哈尔滨 150006）

摘　要：针对混合像元分解误差问题，提出一种基于拉格朗日算法的高光谱解混算法。通过变分增广拉格朗日算法提取出部分端元，由于端元组中存在相似端元影响解混精度，利用基于梯度的光谱信息散度算法进行光谱区分，除去相似端元。通过对得到的端元进行排序，依次增加端元进行光谱解混，将满足条件的端元增加进端元组，最终得到优选端元。该方法不仅有效去除了相似端元的干扰，而且不需要不断搜索端元的组合，根据每个端元对于混合像元的重要性作出相应次数的非限制性最小二乘法计算，得到更精确高光谱端元的子集，该方法对高光谱混合像元解混的效率以及可靠性均有所提高。

关键词：光谱解混；相似端元；端元提取；丰度估计；解混算法
中图分类号：TP75　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1001-3695(2016)10-3173-04
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2016.10.067

Hyperspectral unmixing algorithm based on Lagrangian

Liu Wanjun[1], Yang Xiuhong[1], Qu Haicheng[1,2]
(1. *School of Software, Liaoning Technical University, Huludao Liaoning* 125105, *China*; 2. *School of Electronics Information Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150006, *China*)

Abstract: For mixed pixel decomposition error presents, this paper proposed an hyperspectral unmixing optimization algorithm based on lagrangian algorithm. Through simplex identification via split augmented Lagrangian algorithmed extract, it endmembers. Because endmembers subset had similar endmembers and similar endmembers had an impact on the accuracy of spectral unmixing, it used spectral information divergence based on gradient algorithm for spectral discrimination to remove similar endmembers. By sorting the resulting endmember, followed by additional endmembers, endmembers met the criteria would add into endmember groups and the resulting optimized endmembers would achieves. This method effectively removes interference of similar end, and no longer need to search combinations of endmembers. Each endmembers corresponding to the importance of the number of mixed will use in non-restricted least squares calculation, and more precise subset of hyperspectral endmember wil achieve. Efficiency and reliability of hyperspectral unmixing optimization algorithm will improve.

Key words: spectral unmixing; smiliar endmembers; endmember selection; abundance estimation; unmixing algorithm

由于高光谱影像的空间分辨率限制，其每个像元对应的地面区域包含了多种地物，像元的光谱值是由多种纯地物光谱值混合而成，这种像元即为混合像元，这些混合像元内的纯地物即为端元。混合像元分解问题不但影响地物的分类识别，并且阻碍了高光谱遥感技术向定量化方向发展[1]。混合像元的分解不仅对于高光谱图像的地物分类精度有重要的意义，而且对于高光谱地面目标的检测也有着重要作用[2]。为了有效地解决混合像元的分解问题，需要找出各种地物在混合像元中所占的比例，从而提高高光谱图像的解混精度。高光谱解混主要有端元提取和丰度估计这两个主要步骤。主要的端元提取方法有顶点成分分析[3]（vertex component analysis，VCA）、序列最大角度凸锥[4]（sequential maximum angle convex cone，SMACC）、N-FINDR[5]、纯像元指数[6]（pure pixel index，PPI）、单体增长算法[7]（simple growing algorithm，SGA）和迭代误差分析（iterative error analysis，IEA）[8]等。最小二乘法是最常见的丰度估计算法，最小二乘法包括非负限制性最小二乘法[9]（non-negativity constrained least squares，NCLS）、非限制性最小二乘法[10]（unconstrained least squares，UCLS）、和为一限制性最小二乘法[11]（sum-to-one constrained least squares，SCLS）、全限制性最小二乘法（fully constrained least squares，FCLS）[12]。

本文针对相似端元的干扰和搜索端元效率低下的问题，提出一种基于变分增广拉格朗日算法的高光谱解混算法。

1　高光谱端元提取算法

1.1　变分增广拉格朗日算法

令 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是观测向量，$S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 是表示其相应组分的矩阵，$M=(m_1,m_2,\cdots,m_p)$ 是包含端元的混合矩阵。因为 S 是非负的，而且它的总和是 1。所以

$$Y=MS \tag{1}$$

$$M^{*}=\arg\min_{M}|\det(M)| \quad \text{s.t.} \quad QY\geqslant 0,1_p^{\mathrm{T}}QY=1_n^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

其中：$Q\equiv M^{-1}$。因为 $\det(Q)=1/\det(M)$，所以式(2)可以替换为

收稿日期：2015-07-02；**修回日期**：2015-08-23　**基金项目**：国家高新技术研究发展“863”计划项目(2012AA12A405)；国家自然科学基金资助项目(61172144)

作者简介：刘万军(1959-)，男，辽宁北镇人，教授，硕士，主要研究方向为数字图像处理、运动目标检测与跟踪(liuwanjun39@163.com)；杨秀红(1989-)，女(通信作者)，江苏徐州人，硕士，主要研究方向为高光谱解混；曲海成(1981-)，男，山东烟台人，讲师，博士，主要研究方向为遥感影像高性能计算.

$$Q^* = \arg\min_{Q} -\log|\det(Q)| \quad \text{s.t.} \quad QY \geqslant 0, 1_p^{\mathrm{T}} QY = 1_n^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

式(3)的约束定义了一个凸集,如果矩阵 Q 是对称的和正定的,那个式(3)是凸的。然而,在大多数情况下 Q 既不对称也不正定,式(3)是非凸的。所以需要简化约束集 $1_p^{\mathrm{T}} QY = 1_n^{\mathrm{T}}$。通过在右边乘以等式约束 $Y^{\mathrm{T}}(YY^{\mathrm{T}})^{-1}$,得到 $1_p^{\mathrm{T}} QY = 1_n^{\mathrm{T}}$ 等价于 $1_p^{\mathrm{T}} Q = a^{\mathrm{T}}$,其中 $a^{\mathrm{T}} \equiv 1_n Y^{\mathrm{T}}(YY^{\mathrm{T}})^{-1}$。式(3)可以简化为

$$Q^* = \arg\min_{Q} -\log|\det(Q)| \quad \text{s.t.} \quad QY \geqslant 0, 1_p^{\mathrm{T}} Q = a^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

解决了式(4),得到如下的修改版本:

$$Q^* = \arg\min_{Q} -\log|\det(Q)| + \lambda \| QY \|_h \quad \text{s.t.} \quad 1_p^{\mathrm{T}} Q = a^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

设 $q \equiv \mathrm{vec}(Q)$,令 $f(q) = -\log|\det(Q)|$,式(5)可以写成

$$q^* = \arg\min_{q} f(q) + \lambda \| Aq \|_h \quad \text{s.t.} \quad Bq = a \tag{6}$$

其中:$A = (Y^{\mathrm{T}} \otimes I)$ 和 $B = (I \otimes 1_p^{\mathrm{T}})$。对于 $f(q)$ 利用二次近似,得到凸子序列算法1:

1. Set $k=0$, choose $\mu > 0$ and $q_0 = \mathrm{VCA}(Y)$.
2. repeat
3. $l_k = f(q_k) + \lambda \| Aq_k \|_h$
4. $g = -\mathrm{vec}(Q^{-1})$
5. $q_{k+1} \in \mathrm{argmin}_q\, g^{\mathrm{T}} q + \mu \| q - q_k \|^2 + \lambda \| Aq \|_h$
6. s.t. $Bq = a$
7. if $f(q_{k+1}) + \lambda \| Aq_{k+1} \|_h > l_k$
8. find $q \in \{\alpha q_{k+1} + (1-\alpha) q_k; 0 < \alpha < 1\}$
9. such that $f(q) + \lambda \| Aq \|_h \leqslant l_k$
10. $q_{k+1} = q$
11. $k \leftarrow k+1$
12. until a stopping criterion is satisfied.

算法1被VCA估计所初始化,第4行计算 $f(q)$ 的梯度,第5行最小化目标函数,其中 $f(q)$ 被二阶近似所替换。优化算法1中的5,6等价于式(7):

$$\min_{q,z} E(q,z) \quad \text{s.t.} \quad Bq = a, Aq = z \tag{7}$$

其中:$E(q,z) \equiv g^{\mathrm{T}} q + \mu \| q - q_k \|^2 + \lambda \| z \|_h$。对于约束 $Aq = z$,增广拉格朗日算法给出式(8)和(9)。

$$\zeta(q,z,d,\tau) \equiv E(q,z) + \alpha^{\mathrm{T}}(Aq - z) + \tau \| Aq - z \|^2 \tag{8}$$

$$\zeta(q,z,d,\tau) = E(q,z) + \tau \| Aq - z - d \|^2 + c \tag{9}$$

其中:α 是拉格朗日乘子,$d = -\alpha/(2\tau)$,c 是一个不相关常数。增广拉格朗日算法为算法2:

1. Set $t=0$, choose (q_0, z_0), α_0, and $\tau > 0$
2. repeat
3. $(q_{t+1}, z_{t+1}) \in \mathrm{argmin}_z\, \zeta(q, z, d_t, \tau)$
4. s.t. $Bq = a$
5. $d_{t+1} \leftarrow d_t - (Aq_{t+1} - z_{t+1})$
6. $t \leftarrow t+1$
7. until a stopping criterion is satisfied.

在算法2的第三行相对于 (q,z) 确切的优化解决方法是一项复杂的任务。然而,相对于 q 和 z 的块最小化是非常容易计算的。基于此,提出算法2的改进算法,即变分增广拉格朗日算法为算法3:

1. Set $t=0$, choose (q_0, z_0), α_0, and $\tau > 0$
2. repeat
3. $q_{t+1} \in \arg\min_q g^{\mathrm{T}} q + \dfrac{\mu}{2} \| q - q_k \|^2 + \dfrac{\tau}{2} \| Aq - z_t - d_t \|^2$
4. s.t. $Bq = a$
5. $z_{t+1} \in \arg\min_z \dfrac{1}{2} \| Aq_{t+1} - z - d_t \|^2 + \dfrac{\lambda}{\tau} \| z \|_h$
6. $d_{t+1} \leftarrow d_t - (Aq_{t+1} - z_{t+1})$
7. $t \leftarrow t+1$
8. until stopping criterion is satisfied.

1.2 基于梯度的光谱信息散度

由于两条光谱的幅值变化,它们所呈现出的光谱曲线的形状也有所差异。因为梯度值能够反映出光谱曲线的几何形变,所以利用光谱梯度的信息散度可以更好地区分两条光谱之间的差异[13]。该方法不仅能够从形状上反映两条光谱曲线的匹配程度,而且能够对两条有较小差异的光谱曲线作出较大的响应。

光谱梯度角是在对两条光谱向量一阶求导的基础上求解它们的梯度向量,然后再得出两个梯度向量间的广义夹角大小。

光谱曲线 x 的梯度向量为

$$s_{GA}(x) = [x_2 - x_1, x_3 - x_2, \cdots, x_n - x_{n-1}] \tag{10}$$

光谱曲线 y 的梯度向量为

$$s_{GA}(y) = [y_2 - y_1, y_3 - y_2, \cdots, y_n - y_{n-1}] \tag{11}$$

则梯度向量的广义夹角大小为

$$S_{GA}(x,y) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle s_{GA}(x), s_{GA}(y) \rangle}{|s_{GA}(x)| \cdot |s_{GA}(y)|}\right) \tag{12}$$

根据式(11)和(12),求两光谱向量的一阶导数,得到相应的梯度向量。然后计算得到的两个梯度向量的自信息为

$$I(S_{GA,x_i}) = -\lg a_i \quad I(S_{GA,y_i}) = -\lg b_i \tag{13}$$

其中:$a_i = |S_{GA}(x_i)| / \sum_{i=1}^{n-1} |S_{GA}(x_i)|$,$b_i = |S_{GA}(y_i)| / \sum_{i=1}^{n-1} |S_{GA}(y_i)|$。

得到两梯度向量的相应相关熵为

$$D(S_{GA,x} \| S_{GA,y}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot D_i(S_{GA,x} \| S_{GA,y}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot [I(S_{GA,y_i}) - I(S_{GA,x_i})] = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \lg(a_i/b_i) \tag{14}$$

$$D(S_{GA,y} \| S_{GA,x}) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \cdot \lg(b_i/a_i) \tag{15}$$

所以光谱梯度向量的信息散度,即 $SID(SG)$ 为

$$SID(S_{GA,x}, S_{GA,y}) = D(S_{GA,x} \| S_{GA,y}) + D(S_{GA,y} \| S_{GA,x}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \cdot \lg(a_i/b_i) \tag{16}$$

1.3 最大体积单体

一般而言,高光谱图像中的每个像元都能看做是图像中各端元的线性混合的像元:

$$x = \sum_{i=1}^{N} k_i e_i + n = Ek + n, \sum_{i=1}^{N} k_i = 1 \quad 0 \leqslant k_i \leqslant 1 \tag{17}$$

式中:x 是高光谱图像中任一 P 维的光谱向量(P 为图像的波段数目),$E = [e_1 e_2 \cdots e_n]$ 是 $P \times N$ 的矩阵,N 是端元的数目,E 中的每一列都是端元向量。$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$ 是系数向量,c_i 是像元 x 中端元 e_i 所占比例,n 表示误差项。

在误差项 n 非常小时,只有满足上面三个式子的点的集合,才能够构成高维空间的凸集,这些端元就坐落在凸面的单形体的各个顶点[14]。所以提取高光谱图像的端元问题就转换成求单形体的顶点问题[15]。

端元 a,端元 b 以及端元 c 所构成的三角形面积是图像中的任意三个像元所构成的面积集合中的最大的一个,表示为

$$S(a,b,c) = \max\{S(i,j,k)\} \tag{18}$$

式中:$S(i,j,k)$ 表示由像元 i、j 和 k 所构成的三角形面积。所以寻找单形体的顶点的问题就转换为求最大体积单体的问题,体积公式为

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$V(E) = \frac{1}{(n-1)!} abs(|E|) \tag{22}$$

式中:e_i 表示第 i 个端元的列向量,V 表示由 $e_1 e_2 \cdots e_n$ 这 N 个端元所构成的单形体体积,$|\cdot|$ 表示行列式的运算符。因为这里用到了求行列式的运算,所以要求 E 必须为方阵。

2　基于拉格朗日的高光谱解混算法

该算法的主要过程为:a)利用变分增广拉格朗日算法提取出部分端元,确定端元集 A;b)利用基于梯度的光谱信息散度法对端元集 A 中的端元进行光谱区分,寻找出相似的端元组;c)假定去除相似端元组中第一组的第一个端元,利用 FCLS 算法对剩余的端元进行解混求丰度,计算出其均方根误差值 RMSE;d)假定去除第二个端元,利用 FCLS 算法对剩余的端元进行解混求丰度,计算出其均方根误差值 RMSE;e)比较步骤 c)和 d)中两个均方根误差值,保留均方根误差比较小的端元,去除均方根误差比较大的端元,循环操作步骤 c)~e),直至去除端元中均方根误差比较大的相似端元得到新的端元组 Ae;f)对新得到的端元组 Ae 用非限制性最小二乘算法计算出其丰度向量;g)对丰度向量中的元素按照从大到小排列顺序,得到重新排序的丰度向量,将对应端元也进行相应的排序;h)依次利用排序后的端元组$[A_{11}]$、$[A_{11},A_{12}]$、…、$[A_{11},A_{12},\cdots,A_{1p}]$对混合像元进行非限制性光谱解混,并记录相应的丰度向量 $\boldsymbol{s}(k)$,$k=1,2,\cdots,p$;i)将满足条件的端元子集作为优选的端元子集;j)利用 FCLS 算法对最新的端元进行丰度估计,输出丰度图像。算法流程如图 1 所示。

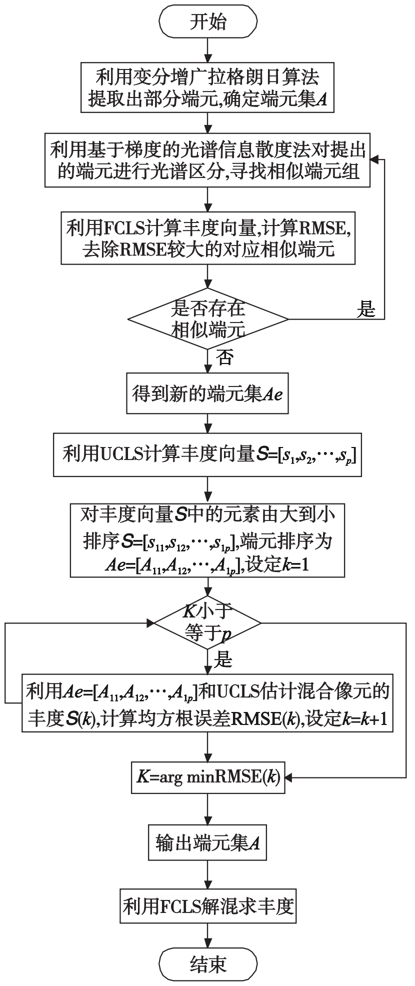

图1　基于拉格朗日的高光谱解混算法流程

3　实验结果及分析

3.1　光谱区分精度

本实验采用的实验数据一是 Pavia 数据,Pavia 数据的研究领域主要位于意大利北部的帕维亚地区,该地区主要有农田、草地、灌木、水体、城镇和森林等复杂的地物类型。

本实验利用 Pavia 数据来验证 SID(SG)方法的优越性。分别采用光谱角匹配(spectral angle mapping,SAM)法、光谱信息散度(SID)法、光谱梯度角(SGA)法这三种方法和 SID(SG)方法作比较,将它们在分类精度上进行对比验证,如表 1 所示。

表 1　光谱区分精度分析

比较项	SAM	SID	SGA	SID(SG)
样本数量	24	27	25	29
精度/%	60.51	69.75	62.81	79.38

从表 1 中可以看出,分类精度最高的是 SID(SG),达到 79.38%,它对所调查的样本点正确分类的个数是 29 个。分类精度最低的是 SAM,它的精度是 60.51%,它对所调查的样本点正确分类的个数是 24 个。SID 的分类精度低于 SID(SG)的分类精度,高于 SAM 的分类精度,它对所调查的样本点正确分类的个数是 27 个,其精度是 69.75%。SGA 的分类精度也低于 SID(SG)的分类精度,高于 SAM 的分类精度,它对所调查的样本点正确分类的个数是 25 个,其精度是 62.81%。从这些数据可以看出,SID(SG)的分类精度要高于 SAM、SGA 和 SID,所以采用 SID(SG)算法提取相似端元的效果要优于 SAM、SGA 和 SID。

本实验采用的实验数据二是数据集 USGS(united states geological survey)光谱库中的光谱集,这个数据库中的光谱数据拥有 224 波段,除去信噪比较低以及水蒸气吸收的这些波段,实验采用余下的 188 个波段,此数据的光谱覆盖是 0.38~2.5 m,其光谱分辨率是 10nm。将 USGS 光谱库中的光谱集用最大体积单体进行端元的初次提取后,再利用 SID(SG)算法寻找相似端元,得出四组相似端元如图 2~5 所示。

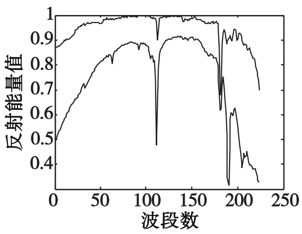

图2　相似端元组1

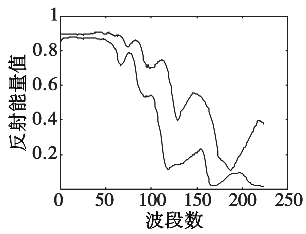

图3　相似端元组2

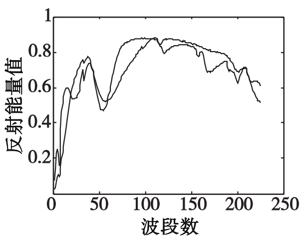

图4　相似端元组3

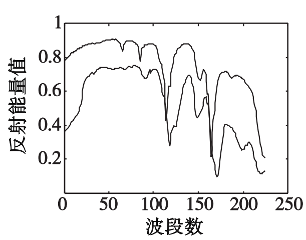

图5　相似端元组4

3.2　子空间投影

本实验采用的数据集是实验数据二 USGS 光谱库中的光谱集。将 MVSA、MVES 算法和本文算法应用到光谱解混中,其中 SNR=40 dB,取 10 000 个光谱向量和 3 个端元,得到的子空间投影结果如图 6 所示。取 10 000 个光谱向量和 20 个端元,得到的子空间投影结果如图 7 所示。由于 MVES 算法在端元数超过 10 的时候,需要花费大量的时间,并且 MVSA 在端元数超过 12 的时候需要耗尽大量的内存,所以图 7 中只列出了本文算法的真实端元子空间投影。

从图 6 和图 7 这两个端元子空间投影图上可以看出,本文算法远远超过 MVSA 和 MVES 算法。这种场景不适合 VCA,

因为 VCA 不适用与非纯像元的场景,但是 VCA 在本文算法、MVSA 算法和 MVES 算法初始化中起着重要的作用。

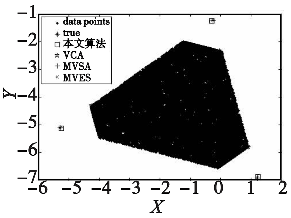

图6　端元子空间投影(端元数为3)

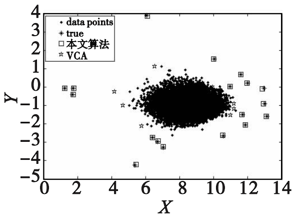

图7　端元子空间投影(端元数为20)

3.3　端元数目不同时实验对比

本实验对比 MVSA、MVES 和本文算法随着端元数的不同,这三种算法的端元矩阵误差以及运行时间也有所不同,如表 2 所示。其中样本量是 10 000,时间以 s 为单位,符号“ * ”表示该算法耗尽大量的内存,符号“ - ”表示运行终止。

表 2　端元矩阵误差及运行时间

端元数	MVSA		MVES		本文算法	
	T	$\|\varepsilon\|_F$	T	$\|\varepsilon\|_F$	T	$\|\varepsilon\|_F$
3	2	0.02	2	0.03	3	0.03
6	4	0.10	56	0.10	4	0.08
8	10	0.18	296	0.24	10	0.07
10	24	0.25	》1500	–	10	0.13
12	*	*	》1500	–	14	0.15
20	*	*	》1500	–	16	0.18

表 2 中的 $\|\varepsilon\|_F$ 表示端元误差矩阵的 Frobenius 范数,T 表示算法运行的时间。从表 2 中可以看出,它们的误差是相当的,但是 MVES 算法在端元数超过 10 的时候,需要花费大量的时间,并且在算法未达到收敛前终止,而 MVSA 算法在端元数超过 12 的时候需要耗尽大量的内存。所以利用本文算法是比较合适的。

3.4　整体丰度估计误差对比

本实验对比 MVSA、FCLS 和本文算法这三种算法的丰度估计误差随着信噪比的变化而变化的情况,如图 8 所示。

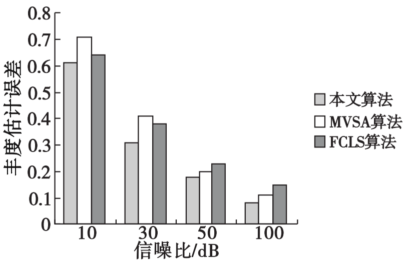

图8　三种算法的丰度估计误差

从图 8 中可以看出,当信噪比 SNR 是[10,100]时,本文算法的丰度估计误差最小,并且当信噪比达到 100 时,本文算法的丰度估计误差是小于 0.1 的。综上所述,本文算法要优于最大体积单体算法和全约束最小二乘算法。

4　结束语

本文提出一种基于拉格朗日算法的高光谱解混算法,可以有效地减少混合像元分解误差。通过变分增广拉格朗日算法从混合像元中提取出部分端元,由于端元组中存在相似端元影响解混精度,利用基于梯度的光谱信息散度算法进行光谱区分,除去相似端元。通过对得到的端元进行排序的方法,依次增加端元进行光谱解混,将满足条件的端元增加进端元组,最终得到优选端元。该方法不仅有效去除了相似端元的干扰,而且不需要不断搜索端元的组合,根据每个端元对于混合像元的重要性作出相应次数的非限制性最小二乘法计算,得到更精确高光谱端元的子集,该方法对高光谱混合像元解混的效率以及可靠性均有所提高。该方法对高光谱遥感影像进行深度解译具有十分重要的意义。

参考文献:

[1] Yang Xiukun, Wang Donghui. Hyperspectral unmixing algorithm using the independent constrained nonnegative matrix factorization[J]. Journal of Harbin Engineering University,2014,35(5):637-641.

[2] 余肖玲,黄光鑫. 基于最小体积约束的非负矩阵分解模型的高光谱解混算法探究[J]. 成都大学学报:自然科学版,2014,33(4):343-346.

[3] Krafft C, Diderhoshan M A, Recknagel P, *et al*. Crisp and soft multivariate methods visualize individual cell nuclei in Raman images of liver tissue sections[J]. Vibrational Spectroscopy,2011,55(1):90-100.

[4] Aggarwal A, Garg R D. Systematic approach towards extracting endmember spectra from hyperspectral image using PPI and SMACC and its evaluation using spectral library[J]. Applied Geomatics,2014,7(1):37-48.

[5] Xiong Wei, Chang C, Wu Chaocheng, *et al*. Fast algorithms to implement N-FINDR for hyperspectral endmember extraction[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing,2011,4(3):545 - 564.

[6] Tang Wei, Shi Zhenwei, Duren Zhana. Sparse hyperspectral unmixing using an approximate L0 norm[J]. Optik,2014,125(1):31-38.

[7] Shi Zhenwei, Tang Wei, Duren Zhana, *et al*. Subspace matching pursuit for sparse unmixing of hyperspectral data[J]. IEEE Trans on Geoscience & Remote Sensing,2014,52(6):3256-3274.

[8] Fang Yong, Yan Huachao. Error analysis for remote nonlinear iterative learning control system with wireless channel noise[J]. Journal of Shanghai University :English Edition,2011,15(3):7-11.

[9] Iordache M D, Bioucas-Dias J M, Plaza A, *et al*. MUSIC-CSR: hyperspectral unmixing via multiple signal classification and collaborative sparse regression[J]. IEEE Trans on Geoscience & Remote Sensing,2014,52(7):1-19.

[10] Bemabe S, Sanchez S, Plaza A, *et al*. Hyperspectral unmixing on GPUs and multi-core processors: a comparison[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing,2013,6(3):1386 - 1398.

[11] Vishnu S, Nidamanuri R R, Bremananth R. Spectral material mapping using hyperspectral imagery: a review of spectral matching and library search methods[J]. Geocarto International,2013,28(2):171-190.

[12] Villa A, Chanussot J, Benediktsson J A, *et al*. Unsupervised methods for the classification of hyperspectral images with low spatial resolution[J]. Pattern Recognition,2013,46(6):1556-1568.

[13] 汤毅,万建伟,许可,等. 地物空间分布特性的高光谱遥感图像解混算法[J]. 红外与毫米波学报,2014,33(5):560-570.

[14] Li Xiaorun, Cui Jiantao, Zhao Liaoying. Blind nonlinear hyperspectral unmixing based on constrained kernel nonnegative matrix factorization[J]. Signal Image & Video Processing,2012,8(8):1555-1567.

[15] Agathos A, Li Jun, Petcu D, *et al*. Multi-GPU implementation of the minimum volume simplex analysis algorithm for hyperspectral unmixing[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations & Remote Sensing,2014,7(6):2281-2296.