

# 基于动态超螺旋线的三维头发建模\*

孙武峰<sup>1</sup>, 周明全<sup>2</sup>, 耿国华<sup>1</sup>, 毛小林<sup>1</sup>

(1. 西北大学 信息科学与技术学院, 西安 710127; 2. 北京师范大学 信息科学与技术学院, 北京 100875)

**摘要:** 计算机动画中, 模拟人的头发是非常困难的。基于动态的、不可伸展弹性杆的基尔霍夫方程, 提出采用超螺旋线表示头发股来解决头发股的弯曲和挠曲的非线性行为。将头发股分成  $N$  段, 使用拉格朗日力学定律动画绘制每段超螺旋杆, 最后将各段连接起来, 构成整个头发股。基于其他可行的模型与动态超螺旋线模型比较, 实验结果显示模型能够有效地处理大范围具有高逼真度的卷发。

**关键词:** 头发建模; Cosserat 模型; 拉格朗日动力学; 基尔霍夫方程

**中图分类号:** TP391.9      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1001-3695(2010)01-0396-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.01.119

## Modeling 3D hairs based on dynamic super-helices

SUN Wu-feng<sup>1</sup>, ZHOU Ming-quan<sup>2</sup>, GENG Guo-hua<sup>1</sup>, MAO Xiao-lin<sup>1</sup>

(1. School of Information & Technology, Northwest University, Xi'an 710127, China; 2. School of Information & Technology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

**Abstract:** Simulating human hair is recognized as one of the most difficult tasks in computer animation. The concept that each strand was represented by a Super-Helix was presented to solve the nonlinear behavior of hair strands with respect to bending and twisting, based on the Kirchhoff equations for dynamic, inextensible elastic rods. Hair grand was divided into  $N$  pieces, which each piecewise helical rod which was animated using the principles of Lagrangian mechanics. At last, each piece would be connected to constitute the entire hair grand. A series of experiments based on the comparison of other realistic models for dynamic hair and dynamic Super-Helix, which shows that the model efficiently handles a wide range of curls with a high level of realism.

**Key words:** hair modeling; Cosserat model; Lagrangian dynamics; Kirchhoff equations

### 0 引言

动画绘制虚拟人时, 实现头发模拟是一个非常困难的问题。人的头发是非常复杂的物质<sup>[1]</sup>, 由成千上万个细的(直径大约为 0.1 mm)不可延伸的股组成。它们彼此之间以及与身体之间发生交互。因此, 对动态头发的模拟仍然是一个挑战。目前模拟动态头发股的方法有: 质量弹簧系统、二维投影动力学和刚体链等。

现有的模拟方法都各有其优点但不能同时满足计算开销小、单独股复杂的非线性行为、真实感强、可设计复杂发型四方面的要求, 尚未像固体和流体一样可以用典型的方程建立通用的模型。本文给出一种新颖的头发力学模型, 准确地模拟动态头发。在头发渲染方面, Marschne 依靠真实头发的结构力学特征完成仿真<sup>[2]</sup>, 这导致本文使用动态杆的 Kirchhoff 方程。由于新的可变形模型-Super-Helices<sup>[3]</sup>, 才使得这些方程被及时整合。头发股被模拟为连续的、分段的螺旋杆  $C^1$ , 具有椭圆或圆形横截面。使用不可伸展杆模型的自由度作为广义坐标, 通过拉格朗日力学得到运动方程。在此基础上建立的模型兼顾了

计算花费、真实感强两方面的需求, 并着重考虑了单独股复杂的非线性行为和发型设计, 得到了较好的效果。

### 1 Cosserat 曲线

Cosserat 杆<sup>[4]</sup>的数学模型, 是 Cosserat 连续体理论的一个特例。采用空间曲线  $r(s)$  和曲线上点的方向坐标系描述股的结构(图 1)。经常用在图形学和机器人学中, 将这些组合成坐标  $E(s) = [e_1, e_2, e_3, r](s)$ 。如果在与参考坐标系相关的齐次笛卡尔坐标下表示向量  $e_i$  和点  $r$ , 那么  $E$  则是  $4 \times 4$  的矩阵。而且,  $E$  不再是曲线的费雷内坐标系, 而提供曲线挠曲的附加信息。然而, 本文假设坐标系适合曲线, 在  $Z$  轴上  $e_3$  和曲线的切线一致, 参数  $s$  表示曲线的长度。

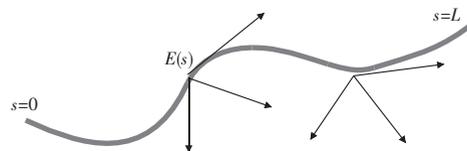


图 1 Cosserat 曲线

描述股的弯曲和挠曲, 等同于描述关于  $s$  的函数  $E$  的运

收稿日期: 2009-05-22; 修回日期: 2009-07-10      基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60736008); 西北大学研究生自主创新基金资助项目(08YZZ33)

作者简介: 孙武峰(1984-), 男, 陕西韩城人, 硕士研究生, 主要研究方向为图形图像与可视化(sunwufeng@126.com); 周明全(1954-), 男, 陕西人, 教授, 博导, 主要研究方向为计算机可视化技术、软件工程、中文信息处理; 耿国华(1955-), 女, 山东人, 教授, 博导, 主要研究方向为智能信息处理、计算机可视化技术; 毛小林(1984-), 男, 陕西西安人, 硕士研究生, 主要研究方向为图形图像与可视化、数据处理。

动。因此,如果  $s$  被理解为时间,则描述空间 Cosserat 杆和刚体运动就非常相似。对于刚体的运动,在空间导数  $(u', v')$  方面,  $E$  关于  $s$  的导数,  $E = dE/ds$  标准的定义如下:

$$E^{-1}E' = \begin{pmatrix} [u] & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中:  $3 \times 3$  的矩阵  $[u]$  是叉积  $u \times$  的反对称矩阵,  $u$  为空间角速度,  $v$  为初始点的空间线速度。然而,对于杆来说,这些都是旋转和平移的力,而不是速度。

在相对坐标系下,式(1)是方便整理的,因为  $E$  是单位矩阵,则

$$E' \begin{pmatrix} [u] & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

称为运动微分方程。

## 2 超螺旋线

在模型(图 2)中,使用动画绘制单独的头发股(导向股),而且可调节自由度的数目。它是建立在 Cosserat 曲线和 Kirchhoff 杆理论<sup>[5]</sup>上。在机械工程文献中,杆定义为弹性物质,在一维上是有效的:它的长度远大于它的横截面。

### 2.1 运动学

不可延伸杆的长度  $L, s \in [0, L]$  沿杆曲线的横坐标,中心线  $r(s, t)$  是通过每个横截面质心的曲线。这条曲线在特定时间  $t$  时描述杆的形状,但是它没有告诉绕中心线杆的挠曲程度。为了记录挠曲,在中心线的每个点, Cosserat 模型引入局部坐标系  $n_i(s, t) (i = 0, 1, 2)$ 。就坐标系而言,本文的坐标系统与周围坐标一起发生形变。按照惯例,  $n_0$  是中心线的切线:

$$r'(s, t) = n_0(s, t) \quad (3)$$

$(n_\alpha)_{\alpha=1,2}$  跨越横截面的平面(图 2(a)),沿中心线的空间导数  $f' = df/ds$ ; 时间导数  $f^{\dot{}} = df/dt$ 。

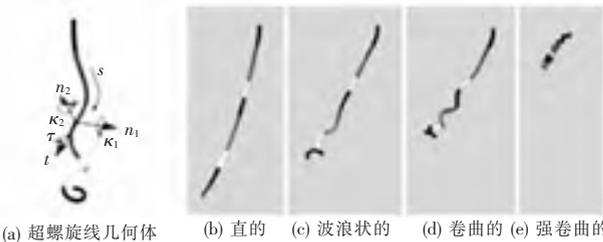


图 2 不同曲率和挠率的超螺旋线

弹性杆的 Kirchhoff 模型来自于 Cosserat 曲线的数学描述,增加不能延伸和不能切变的物理需求。这种情况下,

$$(n_i(s))_{i=0,1,2}$$

对所有的  $s$  标准正交,存在达布向量  $\Omega(s, t)$ :

$$n_i'(s, t) = \Omega(s, t) \times n_i(s, t); i = 0, 1, 2 \quad (4)$$

适当的边界条件一定要具体:插入头部的一端  $s = 0$ , 自由端  $s = L$ 。使用与初始结构方向一致的插入端位置,限制头部的运动(模拟过程中的输入):

$$\begin{aligned} r(0, t) &= r_c(t) \\ n_i(0, t) &= n_{i,c}(t); i = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (5)$$

其中:下标  $c$  涉及杆的固点端  $s = 0$ 。

在横截面的两个方向上,杆的材料曲率  $(\kappa_\alpha(s, t))_{\alpha=1,2}$ 。在局部材料架构下,挠曲  $\tau(s, t)$  被定义为向量  $\Omega(s, t)$  的坐标:

$$\Omega(s, t) = \tau(s, t)n_0(s, t) + \kappa_1(s, t)n_1(s, t) + \kappa_2(s, t)n_2(s, t) \quad (6)$$

通过介绍挠曲的冗余标记  $\kappa_0 = \tau$ , 本文能涉及这些集体的参数  $(\kappa_i(s, t))_{i=0,1,2}$ 。

### 2.2 重建,广义坐标

Kirchhoff 杆的自由度是它的材料弯曲和挠曲  $(\kappa_i(s, t))_{i=0,1,2}$ 。下面介绍空间离散化:将股  $s \in [0, L]$  分为  $N$  段  $S_Q (1 \leq Q \leq N)$ , 每段具有不同的长度,  $N (N \geq 1)$  是任意整数。本文对每段使用分段常值函数定义可变形模型的材料弯曲和挠曲。  $q_{i,Q}$ : 段  $S_Q$  在时间  $t$  时的曲率  $\kappa_i$  (for  $i = 0, 1, 2$ ) 或者挠曲率  $\kappa_0 = \tau$  (for  $i = 0$ ) 的常值。因此,材料弯曲和挠曲显式公式如下:

$$\kappa_i(s, t) = \sum_{Q=1}^N q_{i,Q}(t) \chi_Q(s) \quad (7)$$

其中:  $\chi_Q(s)$  为段  $Q$  的特征函数。如果  $s \in S_Q$  值为 1, 否则为 0。整理  $q_{i,Q}$  大小为  $3N$  的向量  $q(t)$ , 称为模型的广义坐标。

广义坐标  $q(t)$  被用来重建杆的形状。将式(7)代入式(6), 再将式(6)代入式(3)~(5), 从而得到关于  $s$  的微分方程。通过对这个式子积分得到关于  $s$  和  $q(t)$  的中心线  $r(s)$  和材料架构  $n_i(s)$  的方程(见式(8)(9)), 这个过程称为重建。关于  $s$  的积分在每段  $S_Q$  上有一个符号解。通过补偿这些解, 每段  $S_Q$  模型变形为螺旋线。而且,  $C^1$  (在相邻螺旋线之间, 中心线和材料架构是连续的) 是光滑的。这就是称此模型为超螺旋线的原因<sup>[4]</sup>。就广义坐标  $q$  而言,  $r^{SH}(s, q)$  和  $n_i^{SH}(s, t)$  是超螺旋线的参数。

$$n_i(s) = n_{i,L}^Q + n_{i,L}^Q \cos(\Omega(s - S_L^Q)) + \omega \times n_{i,L}^Q \sin(\Omega(s - S_L^Q)) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} r(s) &= r_L^Q + n_{0,L}^Q (s - S_L^Q) + n_{0,L}^Q \sin(\Omega(s - S_L^Q)) / \Omega + \\ &\omega \times n_{0,L}^Q [1 - \cos(\Omega(s - S_L^Q))] / \Omega \end{aligned} \quad (9)$$

其中:  $S_Q = [S_Q^L, S_Q^R]$ ;  $\omega = \Omega / \Omega_1$  (向量  $\Omega$  的标准化  $\Omega_1$ ) 为与  $\Omega$  一致的单位向量;  $n_{i,L}^Q = n_i(S_L^Q)$  为间隔段  $S_Q$  的左边;  $\Omega(s - S_L^Q)$  为与平行于  $\omega$  的轴的旋转角度;  $Q^+$  为垂直于与  $\omega$  平行的轴;  $Q^{\parallel}$  为平行于与  $\omega$  平行的轴;  $r_L^Q = r(S_L^Q)$  为间隔段左边的中心线。下面是两种特殊情况:

- a) 当  $\tau = 0, \kappa_1 \neq 0$  或者  $\kappa_2 \neq 0$ : 曲线是圆弧。
- b) 当  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0, \tau = 0$  或者  $\tau \neq 0$ : 表示直线。

间隔右边  $S_Q^R$  类似于间隔左边  $S_Q^L$ , 应用此过程重建整个杆。

当材料的弯曲和挠曲超过头发长度, 利用统一的值使得它变形为普通的螺旋线。当选择最粗的空间离散化  $N = 1$ , 这种情况就会发生。在其他  $N$  值下, 几个螺旋线添补在一起组成杆。更大的值  $N$  产生任意细的空间离散化。

### 2.3 超螺旋线的动态方程

给定一个可变形体, 其形状依赖于广义坐标  $q(t)$ 。拉格朗日力学提供系统的方法获得它的运动方程:  $\ddot{q} = a(q, \dot{q}, t)$ 。通过逐渐增强的运动拉格朗日方程实现:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{i,Q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{i,Q}} + \frac{\partial U}{\partial q_{i,Q}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_{i,Q}} = \int_0^L J_{i,Q}(s, q, t) \times F(s, t) ds \quad (10)$$

动能为  $T(q, \dot{q}, t)$ , 内能为  $U(q, t)$ , 扩散能为  $D(q, \dot{q}, t)$ 。式(10)右边部分是广义力, 从作用于杆力的线密度  $F(s, t)$  而得到。  $J_{i,Q}$  为雅可比矩阵,  $J_{i,Q} = \partial r^{SH}(s, q) / \partial q_{i,Q}$ 。笔者考虑三个要素的贡献, 头发的重力、与周围空气的粘性阻力和系数  $v$ , 同周围股及身体的交互力:

$$F(s, t) = \rho S g - v r^{SH} \times (s, q) + F^i(s, t) \quad (11a)$$

其中:  $F(s, t)$  为作用于单位长度杆的合外力,  $\rho S$  为单位长度杆的质量,  $g$  为重力加速度,  $F^i$  交互力(使用给出的模型计算)。运动方程(10)的三个能量与弹性杆有关:

$$T(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \rho S (r^{SH}(s, q))^2 ds \quad (11b)$$

$$U(q, t) = \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{i=0}^2 (EI)_i (\kappa_i^{SH}(s, q) - \kappa_i^n(s))^2 ds \quad (11c)$$

$$D(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} \int_0^l r \sum_{i=0}^2 (\kappa_i^{SH}(s, q))^2 ds \quad (11d)$$

从杆的速度方面定义动能  $T$ ,  $\dot{r} = dr/dt$ ,  $U$  是杆的内能。  $(EI)_i$  是在方向  $n_i$  (for  $i = 1, 2$ ) 上杆的主要弯曲刚度,  $(EI)_i$  是扭转刚度, 可记为  $\mu J$  (for  $i = 0$ )。材料属性方面和横截面的几何形状这些参数通过公式给出。  $\kappa_i^n(s)$  杆的自然曲率 ( $i = 1, 2$ ) 和扭曲率 ( $i = 0$ )。缺乏外力时, 杆的形状特征为  $\kappa_i(s) = \kappa_i^n(s)$ , 弹性能逐渐消失从而最小。消失的自然曲率  $\kappa_i^n$  (for  $\alpha = 1, 2$ ) 模拟直发。非零的值模拟波浪发、卷发和凌乱发。实际上, 通过调整这些参数选择所期望的发型。总之, 杆的机械性能通过六个实体得到: 刚度  $(EI)_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), 自然曲率和挠曲率  $(\kappa_i^n(s))_{i=0,1,2}$ 。笔者发现关于  $s$  微小的变化  $(\kappa_i^n(s))_i$  将得到逼真的发型。最后, 本文选择能量散布  $D$ 。在方程中, 一个简单的启发性模型获得头发股的黏弹性影响, 内部摩擦系数为  $\gamma$ 。

式(10)中需要的参数, 式(11)已经给出了, 将式(11)代入式(10), 得到广义坐标运动的显式方程。总之, 模拟过程可分为三步:

- a) 实现超螺旋线重建;
- b) 在需要时, 使用符号积分计算方程(11)的右边;
- c) 将计算结果代入方程(10); 从而产生超螺旋线的运动方程(12):

$$M[s, q] \times \ddot{q} + K \times (q - q^n) = A[t, q, \dot{q}] + \int_0^l J_{i,q}[s, q, t] \times F^i(s, t) ds \quad (12)$$

说明: 引用中括号强调所有的函数的参数是通过显式公式给出的。

方程(12)中, 惯性矩阵  $M$  是  $3N \times 3N$  的, 并且依赖于  $q$  的密方阵; 刚度矩阵  $K$  是  $3N \times 3N$  的对角线矩阵, 由杆的弯曲刚度和挠转刚度构成; 向量  $q^n$  定义为广义坐标的平衡位置, 由在  $Q$  点处杆的自然弯曲率和挠曲率构成; 最后, 向量  $A$  包含了所有剩余的量, 包括空气阻力和黏弹性消耗。它与  $\dot{q}$  无关, 只与非线性的  $q$  和  $\dot{q}$  有关。

### 2.4 超螺旋线求解 Kirchhoff 方程

动态弹性杆运动方程源于 Kirchhoff 方程。作为超螺旋线它遵循了同样的原则。最大的不同是本文限制材料的弯曲和挠曲为  $s$  的分段常值函数, 见式(7)。对规则的 Kirchhoff 杆的这些方程依靠任意的  $s$ 。除了此不同之外, 基于物理假想的超螺旋线模型与 Kirchhoff 方程是相同的。因此, 超螺旋线方法为解决 Kirchhoff 方程提供离散化模型。

本文给出一些超螺旋线模型的重要特征, 这些将有助于实现稳定有效的头发模拟。运动方程的所有空间积分象征性地离线执行, 导致在每个时间步长下快速的和准确的运动方程系数评估。通过式(3) ~ (5)限制的不可延伸性约束被并入重建过程。结果, 广义坐标对任何约束是自由的, 不可延伸性的刚

度约束有效地从方程去除。进而, 基于拉格朗日力学空间离散化的方法提供良好的控制, 从而产生稳定的模拟。对于  $N \rightarrow \infty$ , Kirchhoff 方程被恢复, 使得模拟变得非常精确。通过调整参数  $N$ , 降低头发运动的复杂性和允许的计算时间范围内, 自由地选择精确度和效率之间的折中。

### 3 实验结果

弹性杆的 Kirchhoff 理论精确地预测单独头发丝的运动, 单独头发股合成的力学模型称为超螺旋线, 相当于原始的、连续的 Kirchhoff 模型空间离散化。对于每段预先定义的杆, 假设杆的弯曲和扭曲保持恒定。因此, 头发股的形状是分段的螺旋线, 具有有限的自由度数目, 然后利用拉格朗日力学定律动画绘制这个模型。超螺旋线模型充分地说明了头发的非线性行为和它的弯曲和扭曲变形模型。同时, 与质量弹簧系统、二维投影动力学和刚体链模型不同(图 3(a) ~ (c)), 超螺旋线模型适合处理头发自然的卷曲(图 3(d)), 使得它能精确地模拟卷发的动力学。

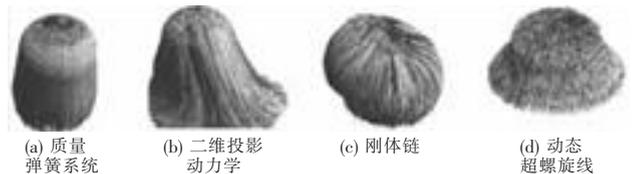


图 3 四种模型

### 4 结束语

本文介绍了一种能模拟大范围发型的头发动力学, 并且在真实头发运动过程中捕捉到复杂运动的可变形模型。特别是卷发的模拟已经得到解决。超螺旋线是基于弹性的, 不可伸展的杆的 Kirchhoff 方程和 Lagrangian 动力学, 同时可自由地调节自由度的数目。它考虑到头发重要的特征, 如: 头发股的自然弯曲和扭曲, 椭圆形的横截面等。强调采用超螺旋线表示移动的头发。并且在合理的计算时间内, 超螺旋线实现了头发的运动, 从而达到了较为逼真的模拟效果。下一步的工作可以集中在头发与头发之间以及头发与身体之间的交互的处理。此外, 随着固体摩擦的处理, 分析方法非常有用, 这将是未来模型的拓展方向。

### 参考文献:

- [1] LINDELOF B, FORSLIND B, HEDBLAD M A, et al. Human hair form morphology revealed by light and scanning electron microscopy and computer aided three-dimensional reconstruction [J]. Arch Dermatol, 1988, 124(9): 1359-1363.
- [2] WARD K, BERTAIL F, KIM T Y. A survey on hair modeling: styling, simulation, and rendering [J]. IEEE Trans on Visualization and Computer Graphics, 2007, 13(2): 213-234.
- [3] HADAP S, CANI M P, LIN Ming, et al. Realistic hair simulation animation and rendering [C] // Proc of International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. 2008.
- [4] PAI D K. STRANDS: interactive simulation of thin solids using Cosserat models [J]. EUROGRAPHICS, 2002, 21(3): 347-352.
- [5] DILL E H. Kirchhoff's theories of rods [J]. Archive for History of Exact Sciences, 1992, 44(1): 1-23.