点和边有容量约束的网络最小费用最大流算法 *

库向阳
(西安科技大学 计算机科学与技术学院, 西安 710054)

摘 要: 分析了目前网络最小费用最大流算法存在的问题,提出网络最小费用最大流新算法。概括出条件约束下的网络最小费用最大流问题的两目标优化数学模型,针对点和边有容量约束的网络最小费用最大流问题特点,定义了有向路径、有向路径单位流费用和残量网络的概念。依据可行流分解定理,以邻接矩阵为网络数据存储结构,使用数据结构中的遍历方法,实现了网络最小费用最大流新算法。该算法在不破坏平面性条件下,可以求解点和边有容量约束的网络最小费用最大流。最后,通过实例进行了算法测试和比较。算法测试表明:点和边有容量约束的网络最小费用最大流算法是完全可行和有效的。

关键词: 网络最小费用最大流; 邻接矩阵; 容量约束; 残量网络

中图分类号: TP301.6　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 1001-3695(2010)08-3112-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2010.08.081

Min-cost and max-flow algorithm of network with both node and edge capacity confined

SHE Xiang-yang
(*College of Computer Science & Technology, Xi'an University of Science & Technology, Xi'an 710054, China*)

Abstract: This paper analyzed the characteristic and type of the min-cost and max-flow algorithm in network, put forward the new min-cost and max-flow algorithm of network with both node and edge capacity confined. It generated the two-objective optimizing model of min-cost and max-flow in network, facing the characteristic of min-cost and max-flow of network with node and edge capacity confined, defined the orientation path and residual network, carried out the new min-cost and max-flow algorithm of network with both node and edge capacity confined, with adjacency matrix to deposit data, being based on feasible flow decompose theorem, by the way of the traversing in data structure. In the end, validated and compared the algorithm by examples. Algorithm testing shows that the new min-cost and max-flow algorithm of network with both node and edge capacity confined is completely feasible and availability.

Key words: min-cost and max-flow of network; adjacency matrix; confined capacity; residual network

0 引言

最小费用最大流问题是网络优化中的一个核心问题,许多网络优化问题都可归结为最小费用最大流问题的特例,如最短路、最大流、指派和运输问题等,最小费用最大流问题在网络优化研究中具有更普遍的意义[13]。运输问题是研究比较早的最小费用最大流问题之一,早在 1941 年 Hitchcock 就进行了研究。网络最小费用最大流是在网络最大流问题基础上,给出了网络每一条弧的单位流量的费用,问题转换为费用最小、可行流量最大的两目标优化问题。目前,网络最小费用最大流算法主要有消圈算法、最小费用路算法、原始—对偶算法、瑕疵算法、松弛算法和网络单纯形算法[3]。前两种可归结为组合算法,后面四种可归结为线性规划算法。组合算法主要是利用图论、数据结构技术和启发式算法思想来构建算法。线性规划算法利用线性规划理论方法求解最小费用最大流问题,理论严密。随着生产和科学技术的发展,网络最小费用最大流算法面临新的问题和挑战。例如在 VLSI、光网路由等领域,往往涉及到一些节点和边都有容量的有向平面网络,其网络最小费用最大流问题不能使用目前网络最大流的组合算法直接求解,通过把每个有容量的节点分裂成两个节点并在其中加入一条边,从而将节点和边都有容量的问题转换为仅边有容量的问题,但这种转换破坏了网络的平面性。点和边有容量约束的网络最大流问题,只要增加约束条件就可以使用直接线性规划算法,但对于大规模凹费用网络最小费用最大流问题求解困难,且效率低。文献[4,5]分别给出了在不破坏网络的平面性条件下,将节点和边都有容量约束的无向平面网络和有向平面网络最大流问题转换为仅有边容量约束的网络最大流问题,然后采用目前的网络最大流算法求解,但这些转换方法复杂,实现有一定困难。本文引入人工智能中搜索的方法,以邻接矩阵为网络数据存储结构,针对点和边有容量约束的网络最小费用最大流问题特点,定义了有向路径和残量网络的概念,依据网络可行流分解定理,在组合算法基础上提出最小费用网络最大流新算法。

收稿日期: 2010-02-03; **修回日期**: 2010-03-03　**基金项目**: 陕西省自然科学基金资助项目(2009JM7007);陕西省教育厅专项科研计划资助项目(08JK354)

作者简介:库向阳(1968-),男,陕西周至人,副教授,博士后,主要研究方向为数据挖掘与智能信息处理、人工智能与模式识别、复杂系统建模与优化等(xiangyangshe@sohu.com).

1　问题描述和预备知识

1.1　网络与流

1）流网络　在以 V 为节点集，A 为弧集的有向图 $G=(V,A)$ 上定义如下的权函数：

a）$L:A\to R$ 为弧上的权函数，弧 $(i,j)\in A$ 对应的权 $L(i,j)$ 记为 l_{ij}，称为弧 (i,j) 的容量下界(lower bound)。

b）$U:A\to R$ 为弧上的权函数，弧 $(i,j)\in A$ 对应的权 $U(i,j)$ 记为 u_{ij}，称为弧 (i,j) 的容量上界，或直接称为容量(capacity)。

c）$C:A\to R$ 为弧上的权函数，弧 $(i,j)\in A$ 对应的权 $C(i,j)$ 记为 c_{ij}，称为弧 (i,j) 上单位流量的费用，或直接称为成本(cost)。

d）$D:V\to R$ 为顶点上的权函数，节点 $v_i\in V$ 对应的权 $D(i)$ 记为 d_i，称为顶点 v_i 的容量上界。

此时构成的网络称为流网络，记为 $N=(V,A,L,U,C,D)$。

2）可行流　对于流网络 $N=(V,A,L,U,D)$，其上的一个流 x 是指从 N 的弧集 $A\to R$ 的函数 $f(x)$，即每一条弧 $(i,j)\in A$ 赋予一个流量 x_{ij}。在流网络中指定一个源节点 $s\in V$ 和一个汇节点 $t\in V$，其余点为中转点。如果流网络中 $N=(V,A,L,U,C,D)$ 存在从 s 到 t 的流 $x=\{x_{ij}\}$，且满足

$$l_{ij}\le x_{ij}\le u_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{j,(i,j)\in A}x_{ij}\le d_i,\ \sum_{k,(k,i)\in A}x_{ki}\le d_i \tag{2}$$

$$\sum_{j,(i,j)\in A}x_{ij}-\sum_{k,(k,i)\in A}x_{ki}=\begin{cases}f(x) & i=s\\ 0 & i\ne s,t\\ -f(x) & i=t\end{cases} \tag{3}$$

则称 x 为流网络 $N=(V,A,L,U,D)$ 中从 s 到 t 的可行流，流量记为 $f(x)$。式(1)(2)分别为弧和节点的容量约束条件，式(3)为节点的流量平衡条件。

3）可行流费用　在流网络 $N=(V,A,L,U,C,D)$ 中，存在从 s 到 t 的可行流 $x=\{x_{ij}\}$，可行流中的弧 (i,j) 对应的成本为 c_{ij}，则该条可行流的费用为

$$C(x)=\sum_{x_{ij}\in x}x_{ij}\times c_{ij} \tag{4}$$

4）最小费用最大流　在流网络 $N=(V,A,L,U,C,D)$ 的所有从 s 到 t 的可行流 $x=\{x_{ij}\}$ 中，流量 $f(x)$ 最大、费用 $C(x)$ 最小的可行流称为最小费用最大流 $x^*=\{x_{ij}^*\}$，亦满足下式：

$$f(x^*)=\max_x f(x) \tag{5}$$

$$C(x^*)=\min_x C(x) \tag{6}$$

最小费用最大流可描述为以式(5)和(6)为目标函数，式(1)~(4)为约束条件的两目标优化模型。

1.2　有向路径和有向路径最大流量

1）有向路径　$(v_{i_1},a_{i_1},v_{i_2},a_{i_2},\cdots,v_{i_{k-1}},a_{i_{k-1}},v_{i_k})$，$v_{i_{j1}}\in V$，$a_{i_{j2}}=(i_{j2},j_{j2+1})\in A$，$j_1=1,2,\cdots,k-1$；$j_2=1,2,\cdots,k-1$ 是网络 $N=(V,A,L,U,D)$ 中的一个点弧交错序列，并且对于 $t=1,2,\cdots,k-1$，均有 $a_{i_t}=(i_t,i_{t+1})\in A$，则称为从节点 v_{i_1} 到节点 v_{i_k} 的一条有向路径 $P_{v_{i_1}-v_{i_k}}$。有向路径的方向是从节点 v_{i_1} 沿路径指向节点 v_{i_k}，在有向路径中所有弧的方向与有向路径的方向一致，有向路径 $P_{v_{i_1}-v_{i_k}}$ 可以表示为

$$P_{v_{i_1}-v_{i_k}}=(v_{i_1},a_{i_1},v_{i_2},a_{i_2},\cdots,v_{i_{k-1}},a_{i_{k-1}},v_{i_k}) \tag{7}$$

2）路流和路流的最大可行流　沿着有向路径的可行流称为路流，可行流量记为 $f(P_{v_{i_1}-v_{i_k}})$。设 $P_{v_{i_1}-v_{i_k}}$ 是从节点 v_{i_1} 到节点 v_{i_k} 的一条有向路径，有向路径中顶点 $v_{i_{j1}}$ 的容量上界为 $d_{i_{j1}}$，弧 $a_{i_{j2}}=(i_{j2},i_{j2+1})\in A$ 容量上界为 $u_{i_{j2}}$，弧 $a_{i_{j2}}$ 容量下界为 $l_{i_{j2}}$。如果 $\max(l_{i_1},l_{i_2},\cdots,l_{i_{k-1}})\le\min(d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_k},u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_{k-1}})$，则有向路径 $P_{v_{i_1}-v_{i_k}}$ 存在非零路流，且流量 $f(P_{v_{i_1}-v_{i_k}})$ 满足：

$$\max(l_{i_1},l_{i_2},\cdots,l_{i_{k-1}})\le f(P_{v_{i_1}-v_{i_k}})\le \min(d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_k},u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_{k-1}}) \tag{8}$$

满足式(8)的路流最大可行流为

$$f^*(P_{v_{i_1}-v_{i_k}})=\min(d_{i_1},d_{i_2},\cdots,d_{i_k},u_{i_1},u_{i_2},\cdots,u_{i_{k-1}}) \tag{9}$$

3）路流单位流成本　路流 $P_{v_{i_1}-v_{i_k}}$ 的单位流成本为路流中所有弧单位流成本的和，即

$$C(P_{v_{i_1}-v_{i_k}})=\sum_{(i_{j2},i_{j2+1})\in P_{v_{i_1}-v_{i_k}}}c_{i_{j2},i_{j2+1}} \tag{10}$$

1.3　可行流的分解定理

在网络 $N=(V,A,L,U,C,D)$ 中，任何一个可行流一定可以表示为若干个路流和若干个圈流之和，且这些路流和圈流满足下列性质[3]：

a）非零路流对应的有向路径从一个源点指向一个汇点；

b）至多有 $m+n$ 个路流和圈流为非零流，且其中至多有 m 个圈流为非零流(m 和 n 表示网络中节点和弧的数目)。

可行流的分解定理说明网络可行流可以表示为若干个路流和若干个圈流之和，与此同时，若干个路流和若干个圈流可以合成一个可行流。可行流的分解定理是本文算法设计的理论依据。

1.4　邻接矩阵

为了便于用计算机来存储网络、计算网络的最大可行流，可以采用两个数组来表示网络 $N=(V,A,L,U,C,D)$。一个是用于存储网络节点信息的一维数组，用来存放节点的权函数；另一个是用于存储网络中节点之间关联关系的二维数组，用来存放网络中弧的权函数，这个关联关系数组被称为邻接矩阵[6]。设一个有 n 个顶点的有向网络，它的邻接矩阵 $A_0[i,j]$ 具有如下性质：

$$A_0[i,j]=\begin{cases}w_{ij} & 若\ a_{ij}=(i,j)\in A\\ 0 & 反之\end{cases} \tag{11}$$

邻接矩阵 $A_0[i,j]>0$，表示网络中节点 i 和节点 j 邻接，数值 w_{ij} 表示对应弧的权函数。这两个数组是搜索有向路径和计算有向路径最大可行流量的基础。路流合成就是路流对应的邻接矩阵相加，矩阵的和对应整个网络最大可行流所对应的邻接矩阵。

1.5　残量网络

假设流网络 $N=(V,A,L,U,C,D)$ 的一个有向路径 $P_{v_{i_1}-v_{i_k}}$，对应路流的最大可行流 $x^*=f^*(P_{v_{i_1}-v_{i_k}})$。有向路径 $P_{v_{i_1}-v_{i_k}}$ 的路流最大可行流中每一条弧的流量 $x_{ij}^*=f^*(P_{v_{i_1}-v_{i_k}})$。把流网络 $N=(V,A,L,U,C,D)$ 中一个路流的最大可行流 x^* 分离出去，剩余的网络称为残量网络，记为 N

$(x^*) = (V, A, L, U(x^*), D(x^*))$,且

$$u_{ij} = \begin{cases} u_{ij} - x_{ij}^* = u_{ij} - f^*(p_{v_{i_1}-v_{i_k}}) & \text{若 } a_{ij} = (i,j) \in p_{v_{i_1}-v_{i_k}} \\ u_{ij} & \text{反之} \end{cases} \tag{12}$$

$$l_{ij} = \begin{cases} l_{ij} - x_{ij}^* = l_{ij} - f^*(p_{v_{i_1}-v_{i_k}}) & \text{若 } a_{ij} = (i,j) \in p_{v_{i_1}-v_{i_k}} \\ l_{ij} & \text{反之} \end{cases} \tag{13}$$

$$d_k = \begin{cases} d_k - x_{ij}^* = d_k - f^*(p_{v_{i_1}-v_{i_k}}) & \text{若 } v_k \in p_{v_{i_1}-v_{i_k}} \\ d_k & \text{反之} \end{cases} \tag{14}$$

残量网络仍然是一个网络,同样可以使用邻接矩阵存储和表示。

2　点和边有容量约束的网络最小费用最大流算法

2.1　基本思想

利用数据结构中的遍历方法,搜索网络中所有从源点到汇点的有向路径,然后计算所有有向路径的最大可行流和相应的单位流费用,选取费用最小的最大可行流作为一个可分离路流,计算对应的残量网络。在残量网络和所有有向路径的基础上重复这一运算,直到剩余的残量网络不存在路流为止。最后将所有可分离路流进行合成,即可得到整个网络的最小费用最大可行流。

2.2　点和边容量约束的网络最小费用最大流算法

算法:点和边有容量约束的网络最小费用最大流算法。

输入:网络节点矩阵 D、邻接矩阵 A、源点 v_{i_1} 和汇点 v_{i_k}。

输出:满足约束条件的网络最小费用最大流。

a)搜索所有从源点到汇点的有向路径,并计算所有有向路径对应的最大可行路流和相应的单位路流费用,选取单位路流费用最小(若存在多个最小值,可任选其一)的最大可行流作为一个可分离路流。

b)按照式(12)(14)计算将可分离路流分离出去的残量网络。

c)在残量网络基础上,计算所有剩余有向路径的最大可行路流和单位路流成本,如果残量网络中存在可行流,则选取单位路流费用最小(若存在多个最小值,可任选其一)的最大可行流作为一个可分离路流,转向 b),否则转向 d)。

d)将所有可分离路流进行合成,得到整个网络的最小费用最大可行流的邻接矩阵。

3　算法实例

为了测试本文提出的基于通路搜索的网络最大流算法的有效性,使用 MATLAB 语言编制了相应的计算机程序。

1)测试实例 1

如图 1 所示,括号内的第一个数字为相应弧的单位流成本,第二个数字为相应弧的容量;1 号点为网络源点,6 号点为网络汇点,其余点为中转点。使用栈按照图的广度搜索算法得到从源点到汇点的所有有向路径、路流最大流量和单位路流成本,如表 1 所示。依次选取序号 1、2、3、4 作为可分离的可行路流,经过分离可行流后,不存在可行流的残量网络如图 2 所示。将可分离可行路流合成后的网络最大流为 14,最小费用为 205。图 3 为可分离路流合成所得网络最小费用最大可行流,括号内的数字为相应弧的容量和可行流的流量,弧(4,5)的可行流流量为 0,表明该边在网络最小费用最大流中的贡献为 0,可以删除。计算检核:a)将最终残量网络和路流合成网络最小费用最大流对应弧的流量相加,与原网络对应弧流量相等;b)使用标号算法,求得该网络最大流的结果与图 3 相同。图 4 为费用与流量变化曲线,曲线斜率增大(变徒),表明增加单位可行流的成本增加,同时可行流增加也受有弧和节点容量上限约束,曲线上的点均为网络最小费用最大流两目标优化的所有可行解。

表 1　有向路径及路流最大流量

序号	有向路径	路流流量	单位路流费用	路流总费用
1	1→3→5→6	5	10	50
2	1→3→5→2→4→6	2	15	30
3	1→3→2→4→6	1	17	17
4	1→2→4→6	6	18	108

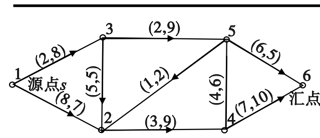

图1　测试实例1

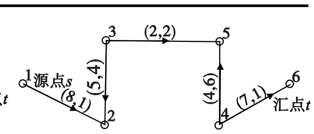

图2　测试实例1最终残量网络

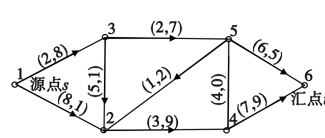

图3　测试实例1路流合成网络最小费用最大流

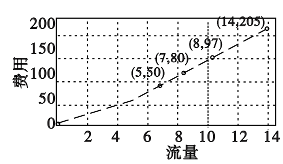

图4　测试实例1费用与流量变化曲线

2)测试实例 2

如图 5 所示,括号内的第一个数字为相应弧的单位流成本,第二个数字为相应弧的容量;弧的容量为 inf 表明容量没有限制;1 号点为网络源点,9 号点为网络汇点,其余点为中转点。使用栈按照图的广度搜索算法得到从源点到汇点的所有有向路径、路流最大流量和单位路流成本,如表 2 所示。依次选取序号 1、2、3、4 作为可分离的可行路流。经过分离可行流后,不存在可行流的残量网络如图 6 所示。将可分离可行路流合成后的最大流为 35,最小费用为 230,图 7 为可分离路流合成所得网络最大可行流,括号内的数字为相应弧的容量和可行流的流量。图 8 为费用与流量变化曲线。

表 2　有向路径及路流最大流量

序号	有向路径	路流流量	单位路流费用	路流总费用
1	1→2→5→4→9	5	1	5
2	1→3→4→9	15	2	30
3	1→2→5→6→8→9	5	11	55
4	1→2→7→10→9	10	14	140

4　结束语

本文针对点和边有容量约束的网络最小费用最大流问题的特点,通过定义有向路径、有向路径费用和残量网络的概念,利用网络分解和合成思想,提出点和边有容量约束的网络最小费用最大流的搜索算法。该算法适用于有边和节点容量约束的有向或无向网络的最小费用最大流问题求解,而且不破坏网络的平面性,该算法扩展了最大流算法的适用范围。算法测试表明该算法具有有效性和实用性。算法的效率取决于搜索网络中所有从源点到汇点的有向路径,对于大规模最小费用最大流问题使用多目标优化方法求解应该是今后 (下转第 3119 页)

更密切地将缓存定位与高能力节点的利用结合起来，充分地发挥了高能力节点在查询中的作用，使得查询效果更好。

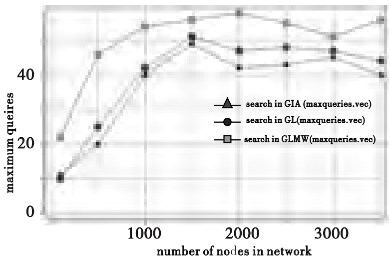

图7　最大查询消息数

6　结束语

GLMW 算法充分考虑了搜索过程中的局部性原理以及 P2P 网络的全局特征，同时利用局部性原理和全局性原理来指导搜索过程。根据分析和仿真实验说明，本文提出的算法可以有效地增加查找效率，在副本查找率和响应时间上的表现较原算法更好。高能力的节点有机会处理更多的网络搜索消息，分担搜索任务，为更多的搜索任务提供有效的响应，最终提高搜索效果。

参考文献：

[1] SAURIOUS S, GUMMADI K P, GRIBBLE S D. A measurement study of peer-to-peer file sharing systems[C]//Proc of SPIE Multimedia Computing and Networking. Bellingham: SPIE, 2002: 156-170.

[2] FRANKEL J, PEPPER T. Gnutella protocol specification[S/OL]. (2000-03-14)[2008-07-23]. http://wiki.limewire.org/index.php?title=GDF.

[3] YASNG B, GARCIA M H. Improving search in peer-to-peer networks[C]//Proc of the 22nd IEEE International Conference on Distributed Computing. Washington DC: IEEE Computer Society, 2002: 1-10.

[4] LV Q, CAO P, COHEN E, *et al*. Search and replication in unstructured peer-to-peer networks[C]//Proc of the 16th International Conference on Supercomputing. New York: ACM Press, 2002: 1-8.

[5] TSOUMAKOS D, ROUSSOPOULOS N. Adaptive probabilistic search for peer-to-peer networks[C]//Proc of the 3rd IEEE International Conference on P2P Computing. Washington DC: IEEE Computer Society, 2003: 102-109.

[6] GKANTSIDIS C, MIHAIL M, SABERI A. Hybrid search schemes for unstructured peer-to-peer networks[C]//Proc of IEEE INFOCOM. Miami: IEEE Press, 2005: 1526-1537.

[7] DASWANI S, FISK A. Gnutella UDP extension for scalable searches (GUESS) v0.1[S/OL]. (2002-08). https://www.limewire.org/fisheye/browse/raw, r = 1.2/limecvs/components/gnutella – core/guess_01.html.

[8] KALOGERAKI V, GUNOPULOS D, ZEINALIPOUR-YAZTI D. A local search mechanism for peer-to-peer networks[C]//Proc of the International Conference on Information and Knowledge Management. New York: ACM Press, 2002: 300-307.

[9] CRESPO A, GARCIA-MOLIN H. Routing indices for peer-to-peer systems[C]//Proc of the 22nd International Conference on Distributed Computing Systems. Washington DC: IEEE Computer Society, 2002: 23-32.

[10] MENASC'E D, KANCHANAPALLI L. Probabilistic scalable P2P resource location services[J]. ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review, 2002, 30(2): 48-58.

[11] CHAWATHE Y, RATNASAMY S, BRESLAU L, *et al*. Making Gnutella-like P2P systems scalable[C]//Proc of ACM SIGCOMM Conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communications. New York: ACM Press, 2003: 407-418.

[12] SRIPANIKULCHAI K, MAGGS B, ZHANG H. Efficient content location using interest-based locality in peer-to-peer systems[C]//Proc of the 22nd Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. Washington DC: IEEE Press, 2003: 2166-2176.

[13] ZHU Ying-wu, HU Yi-ming. Enhancing search performance on Gnutella-like P2P systems[J]. IEEE Trans on Parallel and Distributed Systems, 2006, 17(12): 1482-1495.

[14] ZHU Qing-bao, YANG Zhi-jun. An ant colony optimization algorithm based on mutation and dynamic pheromone updating[J]. Journal of Software, 2004, 15(2): 185-192.

[15] ADMAIC L A, LUKOSE R M, HUBERMAN B A. Search in power-law networks[J]. Physical Review E, 2001, 64(4): 461351-461358.

[16] ADAMIC L A, LUKOSE R M, HUBERMAN B A. Local search in unstructured networks[M]//BORNHOLDT S, SCHUSTER H G. Handbook of Graphs and Networks. Berlin: Wiley-VCH, 2005: 295-317.

[17] BAUMGART I, HEEP B, KRAUSE S. OverSim: a flexible overlay network simulation framework[C]//Proc of the 10th IEEE Global Internet Symposium in Conjunction with IEEE INFOCOM. Washington DC: IEEE Press, 2007: 79-84.

[18] ANDRAS. OMNeT++ 4.0 user manual[R/OL]. (2009-03-01). http://www.omnetpp.org/doc/omnetpp40/manual/usman.html.

（上接第 3114 页）进一步的工作方向。

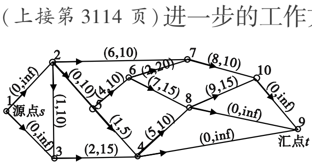

图5　测试实例2

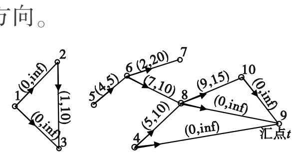

图6　测试实例2最终残量网络

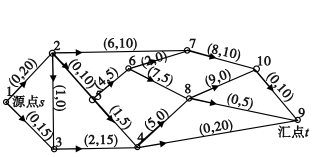

图7　测试实例2路流合成网络最小费用最大流

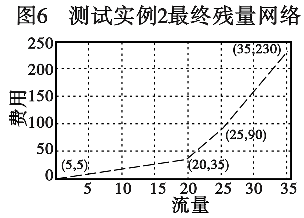

图8　测试实例2费用与流量变化曲线

参考文献：

[1] AHUJIA R K, MAGNATI T L, ORLIN J B. Network flows: theory, algorithms and applications[M]. New Jersey: Rentice Hall, 1993.

[2] 张宪超，陈国良，万颖瑜. 网络最大流问题研究进展[J]. 计算机研究与发展，2003，40(9)：1281-1292.

[3] 谢金星，邢文训. 网络优化[M]. 北京：清华大学出版社，2000.

[4] 张宪超，万颖瑜，陈国良. 一类实际网络中的最小截算法[J]. 软件学报，2003，14(5)：885-890.

[5] 张宪超，江贺，陈国良. 节点和边都有容量的有向平面网络中的最小截和最大流[J]. 计算机学报，2006，29(4)：544-551.

[6] 严蔚敏，吴伟民. 数据结构[M]. 北京：清华大学出版社，1997.