基于小波域正则化和贝叶斯规则的图像恢复算法

李朝晖[1,2], 陈 明[1]
(1. 西北工业大学, 陕西 西安 710072; 2. 中国飞行试验研究院, 陕西 西安 710089)

摘 要: 提出了将小波变换的正则化图像恢复与贝叶斯统计模型分析相结合的方法用于对图像进行消噪处理。正则化图像恢复是条件约束的最优化问题,而小波系数的贝叶斯统计选择是基于图像的随机场观点。两者的有机结合可以辨证地处理正则化参数和算子的选择以及先验模型的分布计算问题。

关键词: 小波域; 正则化; 马尔可夫随机场; 贝叶斯规则
中图法分类号: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1001-3695(2005)07-0174-03

Image Denosing Based on Wavelet Regularity and Bayesian Regulation

LI Zhao-hui[1,2], CHEN Ming[1]
(1. *Northwestern Polytechnic University, Xi'an Shanxi* 710072, *China*; 2. *Chinese Flight Test Establishment, Xi'an Shanxi* 710089, *China*)

Abstract: This work puts forward a new algorithm that the wavelet transformation regularity for image restoration connects with Bayesian statistic modeling, as to make an image denosing. A regularized image restoration is the optimization for some conditional constraint, and the selection of wavelet coefficients based Bayesian statistic is on the image random field view. We could dialectically give the processing about choices of regularity coefficients, operators and the calculation of distributed prior-models according to the two former conditions.

Key words: Wavelet-domain; Regularity; Markov Random Field; Bayesian Regulation

提高对图像噪声抑制的能力在许多应用领域具有很高的价值。例如,由于云雾造成的可见光图像噪声,背景辐射/散射造成的目标红外图像噪声,使目标成像质量大大降低。图像质量的改善大大地方便和改进了对于图像的监测、解读和操作过程,也使得在同样条件下对图像采集硬件的投资幅度降低。

近年来,在信号和图像噪声抑制方法的研究中已经出现了许多基于 Wavelet 变换的方法。通常的思路是先对有噪图像或信号进行小波分解,然后再对分解所得小波系数进行筛选(或操纵),对被噪声干扰较大的小波系数以零或其他合适的值来取代,而对其他小波系数进行调整。因而以小波系数的绝对值作为小波系数的分类单元,当小波系数绝对值趋于零,意味着小波系数所包含的真正图像信息量少并且强烈地受噪声干扰。一幅图像可以通过少数大幅值的小波系数表示。在 Donoho 和 Johnstone 的小波减缩技术[1]中,已证明这种判断方法具有良好的统计优化特性。Xu 和 Weaver 在文献[2]中阐述了区别噪声和有意义信号的准则是基于这样的观测,即噪声小波系数比无噪图像小波系数在尺度间具有较弱的相关性。Mallat 方法[3]是基于如下假设,即无噪图像是正则化的,而有噪图像是非正则的。它揭示了一个事实,即函数的局域正则性参数可以从它的小波系数导出。然而该方法并不能检查与所有小波系数关联的正则性,只能检查局域极值的正则性。

在小波变换域中通过对小波系数的处理,目的是在保持原来有用信息的基础上减少噪声信息。但是以上包括阈值化在内的方法基本上是以变换域的小波系数相互独立为前提,按照一种局部分类准则——最小均方误差,将小波系数分成噪声(小波系数)和有用信号(小波系数)两类。这种分类法没有考虑相邻小波系数间存在的一定相关性。虽然小波变换也被称为一种近似 K-L 变换,具有去相关性的特点[4],但不够完全。其原因是:在不同尺度空间(分辨率)下,图像特征对应着许多大数值的小波系数,这些系数之间存在尺度间的相关性;其次,在相同尺度空间(分解层)下,重要的小波系数聚集在某些区域,如图像边缘,因此这些系数间也存在尺度内的相关。

拟采用的小波域正则化和多尺度马尔可夫随机场模型是依据贝叶斯规则来完成对每一类小波系数的选取,它从全局角度并利用空间相关性的先验信息,在噪声与数据间折中得到一组最小均方误差阈值。而小波变换的正则化处理则为小波系数的迭代算法的最优求解提供了可能。

1 小波域正则化和多尺度马尔可夫随机场模型方法

在数字图像的噪声抑制问题中,我们往往是基于以下模型

$$y = x + n \tag{1}$$

其中 x 代表原图像; y 表示降质图像; n 代表噪声。然而在实际的图像处理中还应考虑降质图像的传递函数。图像降质过程可以用下面的模型来描述

$$y(i,j) = (h(i,j) * x(i,j) + n_1) \cdot n_2 \tag{2}$$

其中 $y(i,j)$ 表示降质图像, $h(i,j)$ 表示图像模糊算子或退化算子, $x(i,j)$ 表示原图像, n_1 视为加性噪声, n_2 视为乘性噪声。由于在大多数情况下,图像降质过程作为线性时不变系统,因而式(2)可以改写成 $y = Hx + n$ (3)

其中 H 是一个分块循环矩阵,等效为一个线性不变(空间不移)低通滤波器,它反映了成像设备的运动、镜头散焦以及胶片长时间曝光等降质过程。

基于小波变换的正则化图像降噪就是利用输入图像的小波变换后各个子频带所具有的不同频率特性和不同方向特性。

收稿日期: 2004-05-28; 修返日期: 2004-09-21

对式(3)两边取小波变换,得到小波域线性时不变图像降质模型为 $Wy = WHW^T Wx + Wn$ (4)

其中 W 是小波算子,由二维小波变换滤波器系数组成,并且对于正交小波基,W 是正交矩阵,因此有 $W^T W = I$。式(4)规范化后为 $y = Hx + n$ (5)

其中 Y 是退化算子 H 的小波域表示,具有分块——分块半循环特殊矩阵表达形式。

设 λ 为正则化参数,C 为正则化算子阵列,沿用与空域(时域)上正则化迭代图像恢复算法的同样推导过程,得到如下基于小波域变换的正则化迭代算法:

$$\begin{aligned} \lambda^k &= (C^T CX^k)\ H^T(Y - HX^k) / \| C^T CX^k \|^2 \\ Z^k &= -H^T(Y - HX^k) + \lambda^k (C^T CX^k) \\ \beta^k &= \| Z^k \|^2 / (\| HZ^k \| 2 + \lambda^k \| CZ^k \|^2) \\ X^{k+1} &= X^k - \beta^k Z^k \end{aligned} \quad (6)$$

对原始二维图像进行一次小波分解,可得到一个低频子频带 LL 和三个高频子频带(包括水平方向高频垂直方向低频子频带 HL、水平方向低频垂直方向高频子频带 LH、水平方向高频垂直方向高频子频带 HH)。Y 向量是由原始图像的小波分解的子图像构成的,$Y = [Y_{LL}^T, Y_{HL}^T, Y_{LH}^T, Y_{HH}^T]^T$。

根据贝叶斯定理,用先验概率密度计算无噪声图像的小波系数后验概率密度 $p_{X|Y}(x|y) = (p_X(x)\, p_{Y|X}(y|x)) / p_Y(y)$ (7)

利用式(7)以及后验概率密度和均值计算真实图像小波系数在概率 1 意义上的最好初值估计 $X_0 = E(X \mid Y)$ (8)

为了找到条件概率 $p_{Y|X}(y|x)$ 的表达式,需要将基于 Lipschitz 指数的古典二元决策转换为概率。一旦确定了先验和条件概率,那么原则上是可以计算对应于每一 X 的后验概率的。但实际上很难做到这一点。因此,对每一小波变换系数 x 计算它们的边缘概率 $P(x_1 = 1|Y)$,这是一个无噪系数。如果概率为 0,相应的小波系数 w_1 置为 0;如果概率值为 1,则相应的小波系数不作调整。对于中值概率所对应的小波系数也减缩到中位值。换句话说,对于小波系数的筛选(操纵)是按照以下形式进行的: $w_1^{new} = w_1 \cdot R_1$ (9)

其中 R_1 是边缘概率 $P(x_1 = 1|Y)$ 的函数。这里产生了一个问题是概率值和系数减缩因子之间的关系如何? 根据文献[1],我们简单选择 $R_1 = P(x_1|Y)$。因而,小波系数的筛选就是减缩因子与边缘概率之积: $w_1^{new} = w_1 \times P(x_l = 1|Y)$。此式恰好符合小波系数的数值迭代运算。

在实际确定和使用上述多变量概率函数时会遇到很多麻烦,但却可以将它们作为 Gibbs 概率函数,从而通过指定 MRF 模型来间接确定概率值。MRF's 和 Gibbs 概率函数之间的关系已由 Hammersly-Clifford 定理所述,每个 MRF X 具有如下形式的 Gibbs 分布

$$P(X) = 1/Z \exp[-U(X)] \quad 其中\ Z = \sum_X \exp[-U(X)],\ U(X) = \sum_{c \in C} V_c(X) \quad (10)$$

式(10)说明能量函数 $U(X)$ 是与子集 c 有关的势函数 V_c 的和,该证明已在文献[5]中论证。确定小波系数所受噪声影响程度是基于图像的 Lipschitz 指数,Daubechies 定理已指明了局域 Lipschitz 指数是如何根据小波系数来估计的。在本文中假定噪声和输入图像具有这样的特性,即噪声是非正则的,并且具有小的局域 Lipschitz 指数,而净图像是正则的,并具有大的局域 Lipschitz 指数。本文采用文献[5]介绍的粗略估计方法,它依靠先验模型来校正不精确估计带来的误差,对应于小波系数 w_1 的估计器定义为各分层上的 $|w_{j,l}/w_{j+1,l}|$ 比均值

$$m_1 = \frac{1}{\mathrm{depth}} \sum_{j=1}^{\mathrm{depth}} \left| \frac{w_{j,1}}{w_{j+1,1}} \right| \cong 2^{\alpha} \quad (11)$$

当 $|w_{j,l}/w_{j+1,1}|$ 增大时,m_1 随着尺度的减小而减小;局域 Lipschitz 指数 α 增大时,估计器因子 m_1 也增大。由于离散化图像的有限平滑性和非正则性,Lipschitz 指数,以及 $P(Y)$ 的分布域在任意情况下都是有界的。我们可以对特定种类的消噪图像核实其实际的 Lipschitz 指数分布,并由式(7)解释观测到的 $P(Y)$ 分布。但为了不失一般性,总是假定 $P(Y)$ 服从均匀分布。对于条件概率有

$$P(Y|X) = \prod_1 P(m_1|x_1) = \exp - \sum_1 v(m_1|x_1) \quad (12)$$

设 T 为噪声抑制阈值,$P(m_1|x_l)$ 表示如果标注 $x_l = 1$,那么高于阈值 T 的 m_l 的概率为真;如果标注 $x_l = 0$,那么低于阈值 T 的 m_1 的概率为真。由于已假定先验分布 $P(m_l)$ 是均匀的,因而条件概率应满足 $P(m_1|x_l = 0) + P(m_1|x_1 = 1) = C_1$,其中 C_1 为常数,如图 1 所示。

定义能量阈值函数为 $E(\cdot)$,选取阈值 T 使得满足 $E(T) = \sigma_w^2(1 + \xi)$,其中 σ_w^2 为噪声方差估计。

$$E(t) = \sum_{1 \in L | m_1 \le t} |w_1|^2$$

由上述引证的公式 $w_1^{new} = w_1 \times P(x_1 = 1|Y)$ 揭示了如何利用边缘概率 $P(x_1 = 1|Y)$ 来减缩小波系数,这些边缘概率是由联合概率函数 $P(X|Y)$ 推导出来的。$P(x_1 = 1|Y)$ 和与 $x_1 = 1$ 的图像 Masks 合并,并且定义为

$$\hat{P}(x_1 = 1|\hat{Y}) = \sum_x f_1(X) \cdot P(X|Y) \quad 其中\ f_1(X) = \begin{cases} 0, & x_1 = 0 \\ 1, & x_1 = 1 \end{cases} \quad (13)$$

上述公式并非采用二元 Masks,而是一个边缘均值 Masks。由于 Masks 数量之多,再加上必须对每一个小波系数进行计算,实际上不可能计算出上述公式。所幸我们可以采用所谓的随机样本器进行估算。此处所采用的随机样本器消噪法就是古典的 Metropolis 算法[6]。该算法的思路是从 Masks 概率空间选择样本进行估算,因而,Metropolis 算法实际上就是所谓的马尔可夫链—蒙特卡洛法。马尔可夫链是指在马尔可夫链内,由样本器连续产生样本 Masks。每个样本都是由前一个样本产生的,从而样本间的过渡变换符合一定的特性。此外,用随机数发生器来生成可选样本,即所谓的蒙特卡洛法。正如普通蒙特卡洛采样一样,样本 Masks X_j 并非是均匀选取的,但与其后验概率 $P(X_j|Y)$ 成比例。事实上,基于 N_{sampl} 个样本 Masks 的估计可以写成

$$P(x_1 = 1|Y) = \sum_x f_1(X) \cdot P(X|Y) \approx \frac{1}{N_{\mathrm{sampl}}} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{sampl}}} f_1 \quad \hat{X}_j \quad (14)$$

通过以上推导和讨论求得了在小波域正则化条件下图像的最佳估计,设为 X_R(以示区别),同时我们也求得了马尔可夫随机场模型条件下图像的最佳估计,设为 X_M。假定这两个向量的维数相同、元排序一致,即它们之间对应的小波子频带具有相同的频率特性和方向特性。因而,可以对两个估计进行比差为 $\varepsilon = X_R - X_M$。理论上,原图像的真值是存在的,不论采用什么方案所求得最佳估计都应趋于原图像真值,即所谓一致性,并且使范数 $\|\varepsilon\|$ 在 $L^2(H)$ 上收敛到零值。基于这一概念,我们再将上述两种估计方案进行结构融合。先由马尔可夫随机场统计模型根据贝叶斯规则求得图像真实信号的最好估计作为初始值,如式(8)所示。将初始值代入式(6),进行小波域正则化条件下图像的最佳估计迭代运算。

对于马尔可夫随机场统计模型,也相应建立参数最佳化迭代算法。首先计算小波冗余框架下带噪图像的小波系数集

$W_J = \{ W_{J,l} \mid l \in L \}$，估计每个 W_J 元的噪声方差 σ_W^2，按照式(11)，对所有 $l \in L$ 计算近似的局域 Lipschitz 指数 m_l，再依据 $E(T)$ 方程确定阈值 T；引入加权因子 α β计算后验概率：

$$P(X \mid Y) \propto \exp(-(\alpha(V(m_1 \mid x_1) + \beta_1 V_{N_1}(X))) \quad (15)$$

加权因子对先验模型产生作用。对于边缘概率 $P(x_l = 1 \mid Y)$，我们计算每一 $l \in L$ 对应于不同 $f_l(X)$ 的概率值。显然，概率值越高的 Masks 被选中为采样 Masks 的概率就越高，而初始 Masks 的选取十分重要。若初始 Masks $\hat{X}_0$ 具有较低的后验概率，那么初始产生的 Masks 就不可能具有代表性。这里采用摄动法，即新的采样 Masks $\hat{X}_{j+1}$ 是由前一个 Masks $\hat{X}_j$ 在一个或几个 l 处的随机摄动位置上所形成。是否接受新的采样 Masks 取决于概率比 $r = P(\hat{X}'_{j+1} \mid Y) / P(\hat{X}_j \mid Y)$

当比值 r 越高，接受 $\hat{X}'_{j+1}$ 的可能性就越大。由 MRF Gibbs 型概率可以有效地计算这个概率比：

$$r = P(\hat{X}'_{j+1} \mid Y) / P(\hat{X}_j \mid Y) = \exp(V(\hat{X}_j \mid Y) - V(\hat{X}'_{j+1} \mid Y))$$

在不同位置处重复以上随机摄动和概率比演算，直到在所有 $l \in L$ 得到更新为止。在式(14)所示的估计都得到更新后才算完成一个完整的重复演算，选择的重复次数应保证使估计精度足够高。

根据前述，我们对由小波正则化最佳估计和小波统计建模最佳估计进行结构融合，并基于参数估计一致性，使 $\| \varepsilon \| \to 0$，构造双支路局域自适应最佳估计步骤如下：

第一支路

(1) 对给定的二维图像进行小波变换，得到小波变换后的原始图像的小波分解为 $Y = [y_{LL}^T, y_{HL}^T, y_{LH}^T, y_{HH}^T]$；

(2) 利用后验概率计算式(15)和式(8)计算图像小波系数的估计初值 X_0，并带入联立正则化迭代方程组(6)，选择正则化算子阵列 C 的初始值，迭代计算 $X_R^{k+1} = X_R^k - \beta^k Z^k$

第二支路

(3) 确定 Lipschitz 指数，对应于小波系数 w_l 的估计器，依据式(11)定义不同层上的比均值 m_l；

(4) 由 $E(T)$ 方程确定阈值 T；

(5) 通过随机摄动，计算后验概率比值 $r = P(\hat{X}'_{j+1} \mid Y) / P(\hat{X}_j \mid Y)$；

(6) 选取加权因子 α和 β值，根据式(15)计算后验概率 $P(X \mid Y)$；

(7) 依据式(14)对所有 l 计算边缘概率 $P(x_1 = 1 \mid Y)$；

(8) 依据上述边缘概率迭代计算图像小波的减缩系数 $w_l^{new} = w_l \cdot P(x_l = 1 \mid Y)$；

(9) 对基于小波域变换正则化最佳估计和基于小波域马尔可夫随机场统计最佳估计方案的小波系数进行范数意义下差值计算，$\| \varepsilon \| = (|X_R^2 - X_M^2|)^{1/2}$；

(10) 设 ξ为图像去噪后的最佳小波系数估计精度，当 $\| \varepsilon \| / |X_M| \le \xi$ 接收估计系数；否则，转到第一支路的(2)继续迭代运算，直至满足设定精度要求。

2 仿真试验与结果

对图像消噪算法的性能评估，常用定性或定量测定方法。前者主要是对合成图像的效果进行视觉评价，而后者则从信号和噪声水平的量化角度来评估。我们在此以信噪比 SNR 定量对推荐算法和其他算法的性能进行对比。定义 $SNR = 10\log_{10}(P_{signal}/P_{noise})$，其中 P_{signal} 为净图像方差变量，P_{noise} 为噪声方差变量。SNR 增益定义为

$$SNR_{result} - SNR_{noise} = 10\log_{10} P_{inputnoise} / P_{remainingnoise} \quad (16)$$

设被试输入图像为 256 ×256 像素、名为“Cameraman. tif”图像，如图 2 所示。对该图像人为加入高斯白噪声如图 3 所示，用维纳自适应滤波和上述推荐算法分别进行图像处理。图 4 是用维纳自适应滤波得到的图像，图 5 是用推荐算法得到的图像。所选择的高斯白噪声的均值为 0，方差由小到大逐渐增强。表 1 所示为叠加不同方差的高斯白噪声所对应的图像输入信噪比和图像处理后所获得的增益幅值。

依据式(16)算得的信噪比增益分布如表 1 所示。信噪比增益分布点如图 6 所示。从图像对比试验点可知，推荐算法比维纳自适应滤波算法所得的 SNR 增益要提高约 2db。然而，由于图像恢复指标所涉及的因素很多，虽然推荐算法比维纳滤波算法在增益上提高约 2db，但是，前者的图像清晰度要比后者稍有逊色。这说明单一的定量指标还不足以评价一幅图像的内涵质量。

表 1 消噪信噪比增益

加入高斯白噪声(标准差)	输入 SNR (db)	维纳滤波后 SNR 增益 (db)	推荐算法 SNR 增益 (db)
0.008	15.99	18.55	20.13
0.01	14.48	20.12	22.22
0.05	4.719	32.51	35.08
0.08	2.386	34.91	37.44
0.1	1.594	36.07	38.7

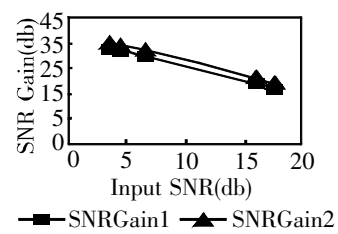

图 6 信噪比增益分布曲线

3 结论

本文所讨论的方法是基于小波域内规范正则化迭代图像恢复算法与马尔科夫随机场模型估计相结合的方法，它兼顾了正则化迭代算法的最小二乘本质，使算法简易、收敛；同时又在计算贝叶斯后验概率密度的基础上确定正则迭代的初始值，并依据边缘概率获得图像小波的减缩系数的迭代方程。通过双支路迭代运算的结构融合使各自支路的估计得到相关性补偿，确保在事先设定的搜索精度指标下，使降噪图像小波系数在每一层上都能够达到最好的估计值。

参考文献：

[1] L Donoho, *et al*. Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage[J]. Amer. Stat. Assoc., 1998, (3): 197-211.

[2] Y Xu, J B Weaver, D M Healy, *et al*. Wavelet Transform Domain Filters: A Spatially Selective Noise Filtration Technique[J]. IEEE Trans. Image Processing, 1994, (3): 747-758.

[3] S Mallat, W L Hwang. Singularity Detection and Processing with Wavelets[J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1992, 38: 617-643.

[4] 陈武凡. 小波分析及其在图像处理中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002. 152-166.

[5] J E Besag. Spatial Interaction and the Spatial Analysis of Lattice System[J]. Roy. Stat. Soc., Ser. B, 1974, 36: 192-236.

[6] N Metropolis, *et al*. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines[J]. Chem. phys. 1953, 21: 1087-1092.

作者简介：

李朝晖(1960-)，男，山东青岛人，研究员，博士生，主要从事军用目标特性研究、检测技术与自动化装置；陈明(1939-)，男，南京人，教授，博士生导师，主要从事检测技术与自动化装置教学与研究。